



Biosciences - Fondamentaux en maths Septembre 2023

Consignes

Ce questionnaire sera scanné, nous vous demandons de bien vouloir adhérer aux règles suivantes :

- Pour cocher une case, la noircir (■) avec un stylo noir;
- Pour corriger, utiliser du correcteur blanc ; **Ne pas redessiner**;
- Ne rien écrire dans les marges et en-têtes ;
- Le symbole ♣ un nombre variable de bonnes réponses (0, 1, 2, ...). Son absence indique qu'il n'y a qu'une bonne réponse.

Les choix multiples ont une espérance nulle: bonne réponse = 1 point; pas de réponse = 0 point; mauvaise réponse à une question multiple avec n propositions = $-\frac{1}{n-1}$ points.

Tous documents permis.

Identité

Remplir les champs ci-dessous en utilisant les informations sur votre carte étudiante (si disponible)

Prénom nom Nom: Numéro étudiant:

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

Les questions sont basées sur le programme du FIMI (formation initiale à l'INSA). Il n'est pas attendu que vous puissiez répondre à toutes les questions. Ce questionnaire servira à évaluer les besoins pour une courte remise à niveau en maths courant septembre, ainsi que pour anticiper les notions de maths qui devront être couvertes lors des cours de maths du semestre.

Question 1 ♣ (FIMI1 Outils pour fonctions) Soit p le polynôme défini par $p(x) = ax - x^3$, pour $x \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$, alors p

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> a trois racines réelles | <input type="checkbox"/> n'a qu'une racine réelle |
| <input type="checkbox"/> est borné | <input type="checkbox"/> est strictement décroissant |

Question 2 (FIMI1 Outils pour fonctions) Quelles équations parmi celles ci-dessous correspondent le mieux à chaque panneau de la Figure 1?

- (A): $y = \frac{1}{x}$; (B): $y = -1.0 + x - 3x^2 + x^3$; (C): $y = \frac{1}{1+x}$

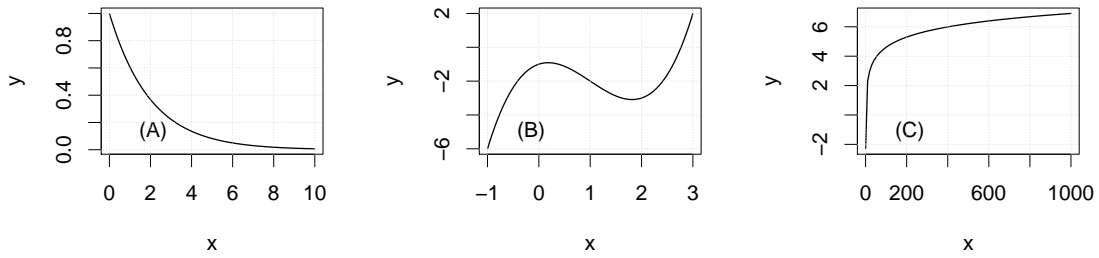
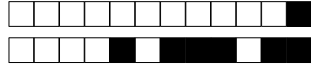


Figure 1

- (A): $y = \frac{1}{x}$; (B): $y = 1.0 + x - 3x^2 + x^3$; (C): $y = \ln(x)$
- (A): $y = \exp(-0.5x)$; (B): $y = -1.0 + x - 3x^2 + x^3$; (C): $y = \ln(x)$
- (A): $y = \exp(-0.5x)$; (B): $y = 1.0 + x - 3x^2 + x^3$; (C): $y = \frac{1}{1+x}$

Question 3 ♣ (FIMI1 Outils pour fonctions) Soit p le polynôme défini par $p(x) = ax - x^3$, pour $x \in \mathbb{R}$. Le point $x = 0$

- est un maximum local de p
- est une racine de p
- est un point d'inflexion de p
- est un minimum local de p

Question 4 ♣ (FIMI2 Limites et continuité) Cochez les énoncés vrais.

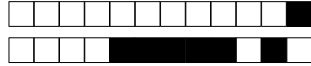
- La fonction $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ est continue
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}+2}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}+2}{x} = +\infty$
- La fonction $f(x) = |x|$ est continue

Question 5 ♣ (FIMI3 Dérivées) Cochez les énoncés vrais.

- $\frac{d}{dx} x^a = ax^{a-1}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$
- $\frac{d}{dx} 2^x = 2^x$
- Si deux fonctions f et g admettent une dérivée, $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{d}{dy}f(y)|_{y=g(x)} \frac{d}{dx}g(x)$
- La fonction $f, f(x) = \sqrt{x}$, admet une dérivée en $x = 0$

Question 6 (FIMI3 Dérivées) Soit f, g deux fonctions telles que $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. La dérivée de la fonction h définie par $h(x) = f(g(x))$ est

- $\frac{2x}{1+x^2}$
- $-2x$
- $\frac{-2x}{1+x^2}$
- $\frac{-2x}{(1+x^2)^3}$



Question 7 ♣ (FIMI4 Equations différentielles) Soit a, b et x_0 réels, avec $a > 0$. La solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = -ax + b$$

avec condition initiale $x(0) = x_0$ satisfait

- $x(t) = x_0 e^{-at} + \frac{b}{a}$
- $x(t) = x_0 e^{-at} + \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{b}{a}$
- L'équation n'a pas de solution

Question 8 ♣ (FIMI4 Equations différentielles) Soit f une fonction continue et bornée sur \mathbb{R} . L'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = f(t) + x^3$$

- est d'ordre 3
- est linéaire
- est non-autonome
- peut être réécrite comme le système

$$\frac{dy}{dt} = -y + f(t) + x^3,$$

$$\frac{dx}{dt} = y.$$

Question 9 ♣ (FIMI4 Equations différentielles) Soit x_0, r and K des nombres réels positifs, avec $x_0 < K$. La solution x de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = rx(1 - x/K)$$

avec condition initiale $x(0) = x_0$ possède les propriétés suivantes (cochez celle qui sont vraies):

- t est un point d'inflexion si $x(t) = K/2$
- x atteint un maximum $x = rK/2$
- x est non bornée
- x est bornée par K

Question 10 ♣ (FIMI6 Polynômes) Soit p le polynôme défini par

$$p(x) = (x^2 + 1)(x + 1)^2.$$

Le polynôme p

- possède des racines non-réelles
- possède exactement deux racines

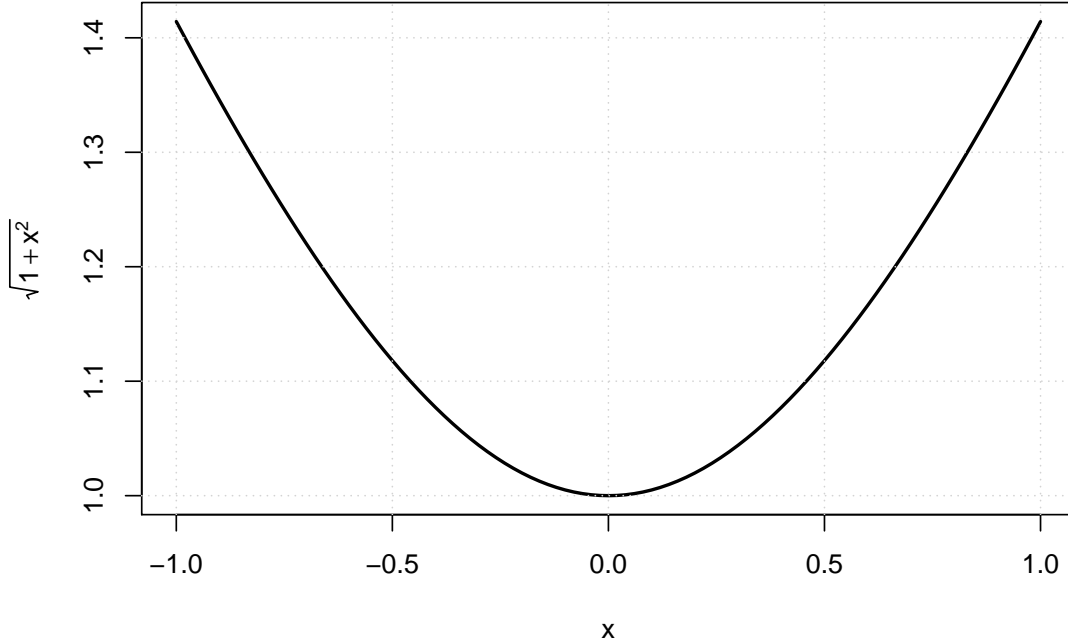


Figure 2. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

- possède une racine double en -1
- possède une racine double en $i = \sqrt{-1}$

Notation petit o . Soit f et g deux fonctions. On dit que f est négligeable devant g , ce que l'on dénote $f(x) = o(g(x))$, si

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

La limite est habituellement prise à 0 ou à l'infini. Par exemple, près de $x = 0$, x^3 est négligeable devant x^2 , et on écrit $x^3 = o(x^2)$. C'est vrai aussi pour des terme x^n , avec $n > 3$.

Question 11 (FIMI7 Développement limité) Soit la fonction f telle que $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ (Figure 2). Dans le voisinage de $x = 0$,

- f n'a pas de dérivée
- $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$
- $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Question 12 ♣ (FIMI8 Intégration) Soit f une fonction telle que

$$f(x) = \begin{cases} c_0, & x \in [0, 1) \\ c_1, & x \in [1, 2] \end{cases},$$

et soit g une fonction continue sur l'intervalle $[0, 2]$. Cochez les énoncés vrais.



- $\int_0^2 f(x)dx = 0$ si et seulement si $c_0 = -c_1$
- $\int_0^2 f(x)g(x)dx = \int_0^2 f(x)dx \int_0^2 g(x)dx$
- $\int_0^2 f(x) + g(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_0^2 g(x)dx$
- $\int_0^2 f(x)g(x)dx = c_0 \int_0^1 g(x)dx + c_1 \int_1^2 g(x)dx$

Question 13 ♣ (FIMI9 Primitives) Cochez les énoncés vrais.

- $\int e^{-3x}x^2dx = \frac{-e^{-3x}}{3}x^2 + \int \frac{2}{3}e^{-3x}xdx$
- $f(x) = \sqrt{x}$ admet la primitive $\frac{2}{3}x^3/2$
- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)dx = 0$
- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = 1$

Question 14 ♣ (FIMI10 Systèmes linéaires) Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}3x - 2y + z &= 1, \\x + 2y - z &= 2, \\-2x + y &= 3.\end{aligned}$$

Lesquels des systèmes suivants sont équivalent à celui ci-dessus ?



$$\begin{aligned}z &= \frac{31}{4}, \\x &= \frac{3}{4}, \\y &= \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3x - 2y + z &= 1, \\4x &= 3, \\-2x + y &= 3.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}3x - 2y + z &= 1, & z &= 1, \\x + 2y - z &= 2, & 4x &= 3, \\& & 2y &= 9.\end{aligned}$$

Question 15 ♣ (FIMI14 Suites) Soit u_0 et a deux nombres réels, et soit $\{u_n\}_{n \geq 0}$ la suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = au_n, \quad n \geq 0.$$

La suite $\{u_n\}_{n \geq 0}$ satisfait

- $u_{n+1} = a^n u_0$
- Si $a < 0$, alors u_n diverge vers $\pm\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ si et seulement si $|a| < 1$
- $u_n = a^n u_0$



Question 16 ♣ (FIMI15 Déterminants) Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix}.$$

- $\det A = bc - ad$
- $\det A = 0$ quelque soient a, b, c, d
- $\det A = \det A^t$ (t est la transposition de matrice)
- $\det A = ad - bc$

Question 17 ♣ (FIMI16 Factorisation) Soit A, B et C les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelles matrices admettent une décomposition en valeurs propres ?

- B seulement
- A et B
- A et C
- B et C

Question 18 (FIMI16 Factorisation) Soit A, B et C les trois matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les valeurs propres des matrices A, B et C ?

- $A: -2, -2; B: -1, 1; C: 1, 1$
- $A: -2, -2; B: 1, 1; C: 2, 2$
- $A: -2, 0; B: -1, 1; C: 0, 2$
- $A: -2, 0; B: 1, 1; C: -1, 1$

Question 19 (FIMI13 Matrices) Trouver la matrice deux par deux A telle que pour n'importe quel vecteur $(x_1, x_2)^t$, $Ax = (x_2, x_1)^t$.

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question 20 (FIMI13 Matrices) Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A correspond à



- Une translation
- Une réflexion
- Une projection
- Une rotation

Question 21 ♣ (FIMI20 Calcul) Soit f et g deux fonctions telles que $f(x, y) = \sin(xy)$ et $g(x, y) = 1 + e^{2x+y}$.

- Le gradient ∇f définie par $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})^t$ est $(y \cos(xy), x \cos(xy))^t$
- $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -y^2 \sin(xy)$
- $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = e^{2x+y}$
- Le développement limité de g autour de $(0, 0)$ est $2 + 2x + y$
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(y)$

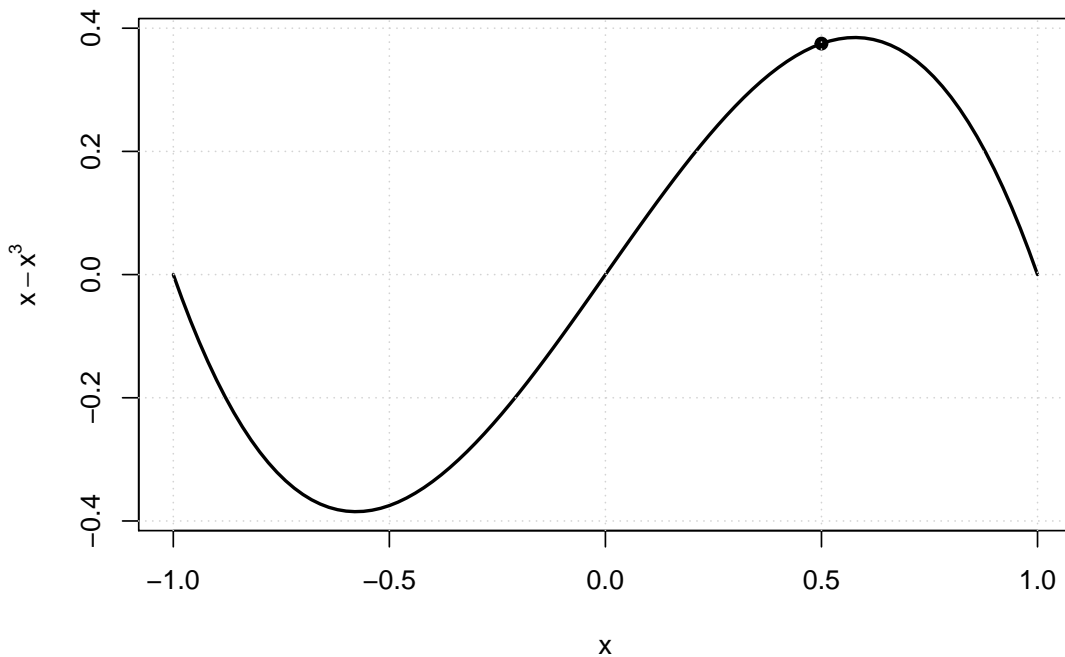


Figure 3. $x - x^3 = y$.

Question 22 (FIMI21 Courbes et surfaces) Considérons la courbe définie par l'équation $x - x^3 = y$, (Figure 3). La tangente au point $x = 1/2$ est

- $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
- $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$
- $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$
- $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



+1/8/53+