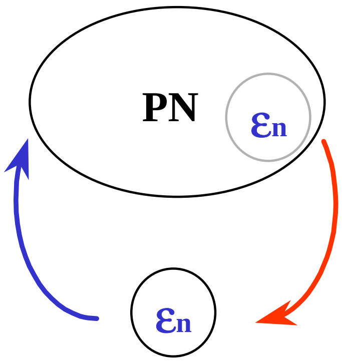
Génie Mécanique de Développement

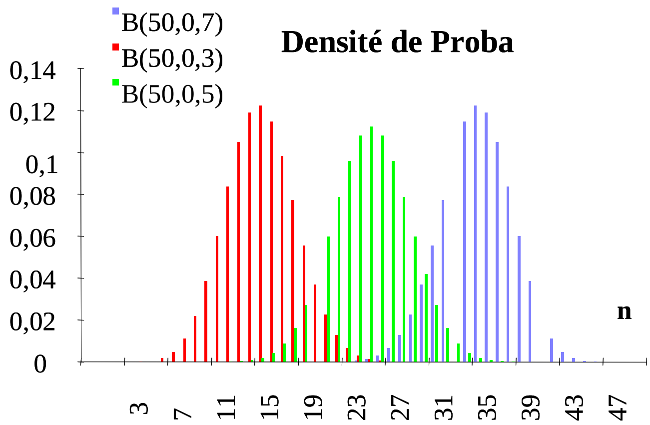
4ème Année

PROBABILITE & STATISTIQUES

$$\psi_X(t) = itm_1 + \frac{(it)^2}{2}\mu_2 + \frac{(it)^3}{3!}\mu_3 + \frac{(it)^4}{4!}\left[\mu_4 - 3\mu_2{}^2\right] + \dots$$

$K_1 = E\{X\} = m_1$ $\quad K_2 = V\{X\} = \mu_2$ $\quad K_3 = \mu_3$ $\quad K_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$





Lionel MANIN **David DUREISSEIX** **Jarir MAHFOUD**

Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Table des matières

Statistiques descriptives

100 composants électroniques ont été testés jusqu'à la défaillance. Leurs durées de vie sont consignées dans le tableau suivant :

214	1998	62	305	322	392	2053	1057	304	163
1868	102	970	181	648	356	371	574	713	727
32	1142	15	854	1211	159	205	863	964	189
492	1869	118	1479	1012	1580	687	80	12	1738
495	113	310	41	82	25	409	619	169	455
518	245	376	294	94	307	146	662	445	46
72	231	130	109	1419	227	387	16	430	126
403	138	690	161	692	641	545	260	107	300
240	110	1030	469	922	1003	410	2020	185	151
1021	236	591	244	53	167	148	906	528	395

On souhaite caractériser cet échantillon en calculant :
1) La moyenne et la médiane,
2) l'écart type. Comparer cette valeur à la moyenne,
3) coefficient d'asymétrie et le coefficient d'aplatissement,
4) et en traçant les diagrammes des fréquences relatives.

<u>Tutorial N°1: Descriptive Statistics</u>

Vocabulary and ideas

Sample
Grouping by class, classifying,
Class intervals
Lower class boundary< Interval< Upper class boundary
Lower class limit< Class (i)< Upper class limit
Length of the class interval = class length
Midpoint of the class interval = class midpoint,
Absolute frequency of a class = ni, relative frequency hi=ni /n,
Change of variable by choosing a computing origin

The observed phenomena and the method of observation are characterized by a few numbers:

central tendencies: mean, mode, median
spread: variance, the standard deviation,
skewness: degree of asymmetry of or departure from symmetry of a distribution,
kurtosis: peakedness or flatness of a graph of a frequency distribution compared to the normal distribution

Fréquences et Probabilités conditionnelles, Dépendance et indépendance d'événements

I- Soit une expérience élémentaire, son ensemble d'observables Ω, et l'ensemble des événements Ai. Soient A et C deux de ces événements. On réalise n expériences **indépendante**s et on note :

n_{ac} nombre de réalisations de A et de C ; $n_{a\bar{c}}$ nombre de réalisations de A seul,

$n_{\bar{a}c}$ nombre de réalisations de C seul ; $n_{\bar{a}\bar{c}}$ nombre de fois où ni A ni C se sont produits.

1) Depuis ces effectifs ou fréquences absolues, on définit les fréquences relatives correspondantes : $f_x = n_x / n$

2) dresser le tableau des contingences de A et C,

3) interpréter : $n_{ac} + n_{a\bar{c}}$, $f_{ac} / (f_{ac} + f_{a\bar{c}})$

4) Quelle conclusion se fait jour. En déduire la formule des probabilités conditionnelles.

II- L'expérience élémentaire est la suivante : tirer un entier, au hasard, entre 1 et 20. Soit ω_i l'un de ces 20 observables. Soient les événements suivants :

- A tel que , $\omega_i \in [7\,;14]$
- C tel que , $\omega_i \in [12\,;16]$
- C' tel que . $\omega_i \in [13\,;17]$

1. Calculer : P(A) ; P(A/C) et P(A/C'),
2. Les événements A et C ; A et C' sont-ils indépendants ?
3. Par quelle relation se traduit L'indépendance ? Quelle est son sens concret ?
4. Calculer P(A/Cx), lorsque P(Cx)=5/20 et Cx tel que $\omega_i \in [x\,;x+4]$ avec $x \in [1\,;16]$. Construire le graphe P(A/Cx)=f(x). Quelle est votre conclusion.
5. Soit plus généralement un événement A donné : Que faut il pour que : P(A/C)=1
6. Existe t il des événements C tell que P(A/C)=P(A) soit impossible.

<u>TUTORIAL II: Conditional frequencies and probabilities Independent and dependent events</u>

Pr(A/C) = The probability of the event A given the event C.
With a single toss of a coin we can have either head or tail.
Na = number of occurrences of event A, its absolute frequency.
Na/N = the relative frequency of event A.
If the Pr(A and C) = Pr(A) * Pr(C), then A and C are independent events.
If the Pr(A or C) = Pr(A) + Pr(C), then A and C are mutually exclusive events, Pr(A and C)=0
If B is included in A, B is a subset of A.
If A is an event, ~~A~~ is the complementary event Pr(A)+Pr(not A)=1.
Let X be a random variable (stochastic variable), E(X) is the Mathematical Expectation of X.
Pr(E)=p= probability of occurrence of E,
Pr(not E)=q= probability of non occurrence of E = 1-Pr(E)=1-p.
(E1∩ E2) = "both E1 and E2 occur" = compound event.

Permutation = $n!/(n-1)!$	Combination = $n!/r!(n-r)!$
Table of occurrence possibilities.	Possible outcomes.

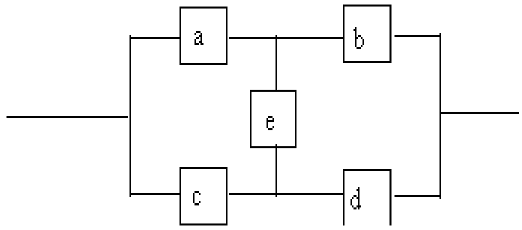
Fiabilité des Systèmes :

Série, Parallèle; Série-Parallèle; Parallèle-Série; Quelconques

Soit le système quelconque ci-dessous "S", composé de 5 sous ensembles indépendants a, b, c, d, e :

On adoptera les symboles suivants :

S « le système fonctionne »,
X « le sous ensemble x fonctionne »,
R fiabilité du système = Prob(S),
Rx fiabilité du sous ensemble x = Prob(X),
r fiabilité d'un composant.



I- Exprimer la Fiabilité du Système en fonction de la fiabilité des sous ensembles.

II- Les sous-ensembles a, b, c, d, e, sont définis comme suit :

Sous-ensemble a

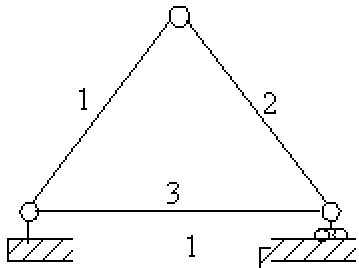
Il est formé de 3 séries de 4 composants chacune mises en parallèle. Les fiabilités des composants sont indépendantes et égales à r_a=0.90 .

Sous-ensemble b

Il est formé de 4 parallèles de 3 composants chacune mises en série. Les hypothèses sont les mêmes que ci-dessus, et r_b=0.90 (mêmes composants).

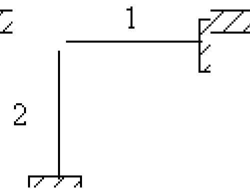
Sous-ensemble c

Il est formé de 3 barres articulées, et relié à son environnement comme indiqué ci-contre (1 encastrement, 1 liaison libre).Les fiabilités des composants sont r_1= 0.99; r_2= 0.95; r_3= 0.90 (indépendants en Fiabilité).



Sous-ensemble d

Il est formé de 2 barres articulées et relié à son environnement comme indiqué (les deux barres sont encastrées). Les fiabilités sont les suivantes : r_1= 0.80; r_2= 0.90 ; $r_{1/2}$= 0.85.



Sous ensemble e

Il s'agit d'un système redondant passif formé de 2 composants.
r_1(nominal)= 0.90; r_2(substitution) = 0.80. La fiabilité du relais non nécessaire au fonctionnement de 1 est de r'=0.99.

Déterminer la Fiabilité du Système.

TUTORIAL III: System reliability

Reliability Block Diagrams.

Series systems; Parallel (Redundant) Systems; Combined systems.
Series systems : All components must function.
Parallel systems : At least one component must function.
Standby system = Passive redundancy, Parallel system with relay.
S : “The system accomplish its required function”;
R : The reliability = Pr (S).
The reliability formula for combined systems is derived from Baye's theorem.
Subsystem A is constituted of three parallel sets of four in-series components.
Subsystem C comprises three linked bars clamped at one end.
Failure; λ(t) = Failure rate.

Formule de Bayes

Trois caisses viennent d'être déposées dans le magasin d'une entreprise. On sait qu'elles contiennent le même type de composant, mais avec des pourcentages de défectueux différents. Soit p_i le % de défectueux dans la caisse *ai (i=1,2,3)*. On sait que ces pourcentages sont : p1=0.01; p2=0.05; p3=0.1; Mais on a perdu la fiche d'identification des caisses!

On doit donc en effectuant des prélèvements, et en notant le nombre de pièces mauvaises rencontrées, identifier les caisses. Les prélèvements sont faits avec remise. On décide de procéder comme suit :

1. On prend une caisse « au hasard » (événement *Ai*) i=1,2,3
2. On prélève cinq composants et on note le nombre de j mauvais (événements *Bj*), avec j=0,1,2,3,4,5

Montrer quelles sont les probabilités d'identification en calculant les probabilités « a posteriori » P(*Ai/Bj*).

Il s'agit de la mise en oeuvre de la formule de Bayes

$$P\left(A_i / B_j\right) = \frac{P\left(B_j / A_i\right) \cdot P\left(A_i\right)}{\sum_k P\left(B_j / A_k\right) \cdot P\left(A_k\right)}$$

On connaît les probabilités « à priori » des causes Ai, P(Ai)=1/3. Il faut alors calculer les P(*Aj/Bi*).

===

L'homme ivre

Un gardien de nuit s'adonne de manière immodérée à la boisson. De ce fait il est ivre un jour sur trois. Pour ouvrir une porte, il dispose d'un trousseau de 10 clés. Selon son état, il procède, dans la recherche de la bonne clé, de 2 manières différentes :

- s'il n'est pas ivre, après avoir pris une clé au hasard, si celle-ci n'est pas la bonne, il l'élimine du trousseau avant d'en essayer une autre,
- s'il est ivre, il la remet dans le lot.

Soient les événements :

I « l'homme est ivre » ; A_j « il ouvre à la jème clé » ; B_j « il n'a pas encore ouvert à la jème clé »

1. Exprimer $P\left(A_j / I\right)$ et $P\left(A_j / \bar{I}\right)$, construire les diagrammes correspondants.
2. Calculer $\sum P\left(A_j / I\right)$ et $\sum P\left(A_j / \bar{I}\right)$
3. Calculer $P\left(B_j / \bar{I}\right)$ et $P\left(B_j / I\right)$, construire les diagrammes correspondants.

Un soir un cambrioleur caché à l'intérieur note qu'au 8ème essais l'homme n'a pas encore trouvé la bonne clé. Calculer la probabilité qu'il soit ivre cette nuit-là. Plus généralement, calculer $P\left(I / B_j\right)$, et construire le diagramme correspondant.

TUTORIAL IV:Bayes theorem

A workshop received three boxes, containing identical components. Each box contained a variable percentage of defective parts. Unfortunately the identification labels were lost. In order to identify each box, a sample is picked at random, and the number of defective parts are counted. A probability is assigned to the box of it being number 'i' given a 'Bj' defective components.

Pick at random with replace.

Another example

A night watchman occasionally abandoned himself to drink. In this manner he found himself drunk one night in three. To open his door he has a bunch of ten keys. Depending upon his state of drunkenness he searches for the correct key in two different ways:

1- If he is sober, after having taken a key at random, if it does not fit the lock, he will put it to on side before trying another.

Or if he is intoxicated, he continues to try random keys without putting them aside.

Application à la Loi de Poisson

On considère une flotte de 1000 navires, tous identiques, et de valeur « a ». La probabilité qu'un navire coule au cours d'une année est de 10^{-3}. On considère que les événements «disparition d'un navire » sont indépendants.

1. Soit la variable aléatoire **K** « Nombre de navires disparus au cours de l'année » :
   Établir la loi de **K**. Faire un tableau comparatif des probabilités ponctuelles et cumulées (fonction de répartition) pour k= 0; 1; ....; 4.
   Construire le diagramme en bâtons de la distribution. Situer E(**K**) sur ce diagramme. Quelle est le sens concret de E(**K**).

2. Une compagnie d'assurances C_1 assure cette flotte. Elle encaisse les primes le premier Janvier et elle recherche de quelle somme doit-elle disposer au 31 Décembre, pour pouvoir payer les sinistres, au niveau de confiance 0.999. Quelle est cette somme.
   Interpréter le sens de $1-\alpha = 0.999$.

3. Il existe une autre flotte de 1000 navires, en tous points identiques à la précédente. La compagnie d'assurances C_2 assure cette flotte, selon les mêmes prestations que C_1 et fait le même calcul pour ce qu'est de la somme disponible au 31 Décembre.
   Les deux compagnies C_1 et C_2 fusionnent, la nouvelle compagnie C assure donc les deux flottes réunies. De quelle somme doit disposer la nouvelle compagnie au 31 Décembre, pour pouvoir payer les sinistres au même niveau de confiance $1-\alpha = 0.999$.
   Comparer ce résultat à celui cumulé des deux compagnies C_1 et C_2 avant fusion. Comment expliquer la différence observée ?

4. Généraliser au cas de 3, 4, ...,10 fusions. Qu'observez-vous ? Quelles sont vos conclusions. Quelles relations faites-vous entre ces résultats et ce qui s'est passé ces dernières décennies dans le monde économique ?

TUTORIAL V: Poisson's law application

- The study deals with the rate of loss for a fleet of 1000 identical ships of aFF cost. The probability that a ship sinks during one year is estimated to be 10e-3. Let K be a random variable giving the number of lost ships during one year. Establish a probability model for K.
- Is it possible to describe this problem with another model? If yes, give the model and justify its use. Build a comparative table for the cumulative and punctual probabilities for k=0, 1,....4
- Plot the cumulative and absolute distributions, locate E(K) the expectation on the graphs. Give the significance of E(K).

- An insurance company C1 underwrites the risk on this fleet. The insurance premiums are collected on the first of January each year. The company must guarantee that it has sufficient capital throughout the year, until the 31^{st} December, to settle any claims against the policy with a confidence level of 0.999. How much capital must C1 set aside?

- Another identical fleet of 1000 identical ships exists, it is insured by a insurance company C2 in the same way as C1.

The two company merge, the new company C underwrites the risk on the two fleet. .How much capital must the company C set aside for the 31^{st} December, taking the same level of confidence?

Applications aux Lois de Probabilité

B(n,p) & N(m,σ)

Un automobiliste doit se garer 225 fois par mois. S'il se gare sans payer, la probabilité d'avoir un P.V. est 1/5 (on suppose qu'il peut avoir un seul P.V. à la fois). Soit X v.a. qui compte le nombre de P.V. obtenu par mois.

1) Quelle est la loi de X. Par quelle loi peut on l'approximer ?
2) Calculer :

a- pr($X < 51$)	;	e-	pr($X < 42$)
b- pr($X \geq 40$)	;	f-	pr($X \geq 57$)
c- pr($36 \leq X < 54$)	;	g-	pr($X < x$) = 0.8
d- pr($x_1 \leq X < x_2$) = 0.68	;	h-	pr($X \geq x$) = 0.4

3) La somme à payer pour chaque P.V. est 11 Euros. Jusqu'à quelle somme de stationnement 'y', il est plus rentable de payer l'horodateur pour un niveau de confiance de 0.80 ?

TUTORIAL VI

A driver has to park his car 225 times a month for his job. If he parks without paying, the probability of being fined is 1/5 (it is assumed that he can be fined only once per parking offence). Let X be the random variable that counts the number of fines at the end of the month.

Establish a probability model for X. Which law can approximate L(X)?
Calculate:

Pr($X< 51$) ; Pr($X < 42$)
Pr($X\geq 40$) ; Pr($X \geq 57$)
……

The payable amount for each fine is 11 Euros. Until which amount "y" for parking each time, it is worth paying with a confidence level of 0.80?

Études et Comparaison de Lois

I. Construire quatre observables suivants une Loi Binomiale avec $n = 50$ et $P = 0.7$, 0.5, 0.2 et 0.06.

1-Construire les histogrammes de la densité de Probabilité et de la Fonction de Répartition.
2-Caractériser ces observables (moyenne, écart type, g1, …).
3-Calculer la $Pr(X \leq \text{moyenne} - \text{écart type})$, $Pr(X > 16)$.
4-Comparer ces caractéristiques par rapport à des distributions suivant une Loi de Poisson de paramètre $\lambda = n * P$
Quelles sont vos conclusions ?
5-Comparer ces caractéristiques par rapport à des distributions suivant une Loi Normale de paramètres m et σ,
Quelles sont vos conclusions ?

II. Soit N v.a. nombre total de réparations journalières, la loi de N est une loi de poisson de paramètre $\lambda= 13$. La durée d'une intervention est une v.a. T, exprimée en heures, de loi Log - Normale LN, telle que $L(T) = ln(m_y ; \sigma_y)$, avec $Y=ln(T)$; la durée moyenne d'une réparation (m_T) est de1.5h avec un écart type (σ_T) de 2h. Soit X la v.a. « durée totale des réparations journalières »:

a. Exprimer X en fonction de N et T,
b. En utilisant la méthode de simulation numérique Monte Carlo, quelle est la Loi suivie par X?
c. quelle est sa moyenne ?
d. et quel est soin écart type ?

III. Pour un ressort la Force $F = K * X$, avec K raideur en N/cm et X déplacement en cm. Sachant que K est une v.a. suivant une Loi Normale de paramètre $m = 100$, et $\sigma = 1$, et X est une v.a. suivant une Loi Normale de paramètre $m = 10$, et $\sigma = 0.1$:

i. Quelle est la Loi de F,
ii. Justifier votre démarche,
iii. Calculer la $Pr(F > 1000)$.

Application de la loi Log Normal : *La compagnie de cars*

1ère Partie

Une compagnie de transports publics dispose d'un parc roulant de 500 cars. Ce parc régulièrement rajeuni (achat de véhicule neuf, élimination de véhicule ancien) est formé comme indiqué ci-dessous, lequel contient également la probabilité d'indisponibilité journalière (pannes, maintenance préventive) d'un véhicule de chacun des 5 sous - groupes Ai.

Ai	*A1*	*A2*	*A3*	*A4*	*A5*
Age (années)	0 à 1	1 à 2	2 à 3	3 à 4	4 à 5
Nombre	100	100	100	100	100
P_i	0,02	0.02	0.02	0.03	0,04

Soit Ni la v.a. « Nombre d'indisponibilité journalières rencontrées dans le sous groupe Ai.

1/ a) Établir la loi de probabilité suivie par Ni, i=1 à 5,

b) Exprimer E(Ni), V(Ni)

2/ Soit $N = \sum N_i$ le nombre total d'indisponibilité journalières

a) Quelle loi de probabilité usuelle suit N?

b) Exprimer E(N), V(N)

c) Calculer P(N>16).

2ème Partie

La durée d'une intervention est une v.a. T, exprimée en heures, de loi Log - Normale LN, telle que $L(T) = \ln(m_y ; \Omega_y)$, avec Y=ln(T) ; $E(T)= m_T = 1.5$ et $\Omega_T=2$.

1/ a) Rappeler la loi suivi par Y,

b) Calculer m_y et Ω_y ,

c) Calculer P(T ≥ 3.5)

2/ On décide à présent d'approximer la loi de probabilité de N par une loi Log - Normale LN, posant ainsi $L(N)= (m_u ; \Omega_u)$, avec U = ln(N)

a) Que pensez vous de cette modélisation non usuelle?

b) Calculer m_u et Ω_u ,

c) Calculer P(N > 16) et comparer au résultat trouvé précédemment

3/ Soit X la v.a. « durée totale des réparations journalières »

a) Exprimer X en fonction de N et T,

b) Quelle loi de probabilité suit la v.a. X?

c) Calculer $E(X) = m_x$ et Ω_x ,

4/ Sachant qu'un mécano travaille 8h/jour, combien la société doit elle avoir de personnels dans ses ateliers si elle souhaite que toutes les interventions soient réalisées avec une probabilités de 0.95?

TUTORIAL VII: Urban Transport Company

A public transport company has a fleet of 500 buses. This fleet is regularly renewed (old vehicles are replaced with new) and is presented by the table below. This table contains the probability of daily unavailability “pi” due to breakdown or preventive maintenance for the vehicles in each of the sub-groups Ai (Classification by age).

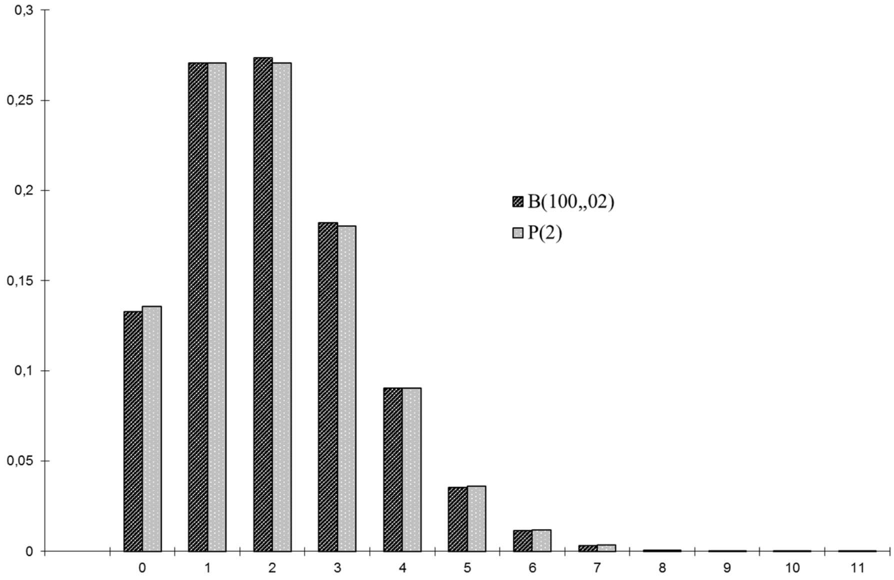
Ni “Number of daily unavailability for the sub-group i” T “Repair time”

N “Total number of daily unavailability” X “Daily total repair time”

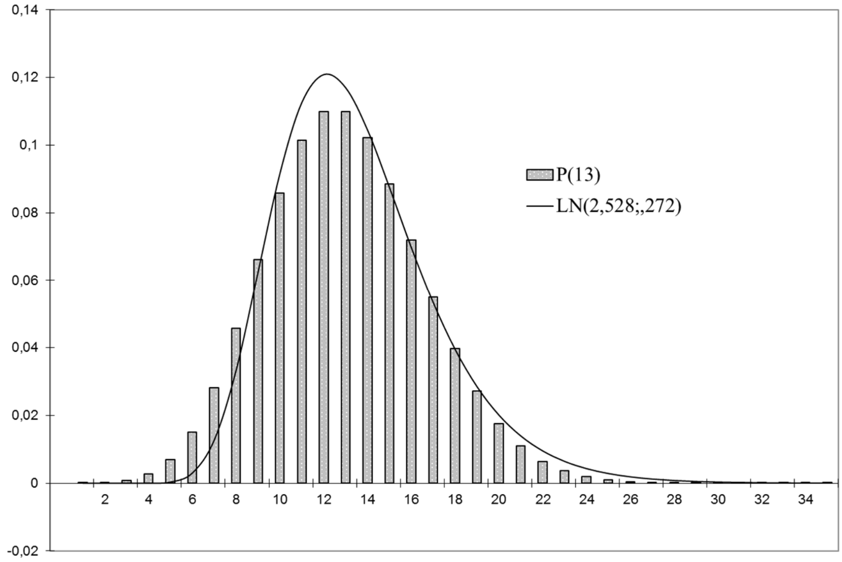
Given that a mechanic works 8 hours per day, how many mechanics must the company employ in its workshop if it wants all maintenance carried out with a probability of 95%.

Stable with respect to product Stable with respect to addition

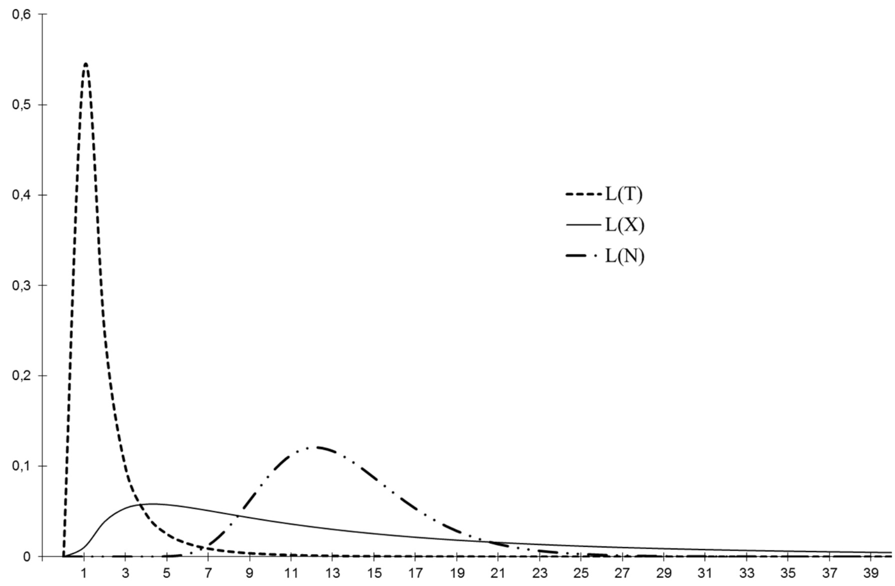
At least At the most.



0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
B(100,,02)
P(2)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11



0,14
0,12
0,1
0,08
0,06
0,04
0,02
0
-0,02
P(13)
LN(2,528;,272)
2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34



0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
L(T)
L(X)
L(N)
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39

Estimation de m et σ dans PN - L(X)=N(m, σ)

I- Estimation de σ
Un échantillon de taille 5 a donné un écart type de 6.

1- Estimer ponctuellement l'écart type de la population,
2- estimer l'écart type de la population avec un niveau de confiance (1-α=0.8) :
    a) estimation bilatérale, b) unilatérale supérieure, c) unilatérale inférieure.

II- Estimation de la moyenne
Un échantillon de taille 10 issu d'une population où l'écart type du caractère étudié est de 2, a fourni une moyenne de 100 :

1- Estimer ponctuellement la moyenne de la population,
2- estimer t la moyenne de la population avec un niveau de confiance (1-α=0.9) :
    a) estimation bilatérale, b) unilatérale supérieure, c) unilatérale inférieure.

Un échantillon de taille 16 a fourni une moyenne de 50 et un écart type de 3 :

1- Estimer ponctuellement la moyenne de la population,
2- estimer t la moyenne de la population avec un niveau de confiance (1-α=0.9) :
    a) estimation bilatérale, b) unilatérale supérieure, c) unilatérale inférieure.

III- Estimation de la Probabilité

1- Dans un échantillon de taille 10, l'événement étudié a été réalisé 4 fois. Estimer la probabilité de cet événement dans la population avec un niveau de confiance de 0.90.
2- Dans un échantillon de taille 100, l'événement étudié a été réalisé 4 fois. Estimer la probabilité de cet événement dans la population avec un niveau de confiance de 0.90.
3- Dans un échantillon de taille 90, l'événement étudié a été réalisé 36 fois. Estimer la probabilité de cet événement dans la population avec un niveau de confiance de 0.90.

Mean & standard deviation estimation in a Population

σ estimation:
A sample of 1 realisations has a standard deviation of 6,
1) estimate the standard deviation of the population.
2) with a certainty of 0.8:
    a) bilateral estimation
    b) unilateral superior estimation
    c) unilateral inferior estimation of the standard deviation of the population.

m estimation:
1) A sample of 10 realisations, issued from a population where the standard deviation is 2, has a mean value of 100:
I) estimate the mean value of the population
II) with a certainty of 0.9:
    a) bilateral estimation, b) unilateral superior c) unilateral inferior estimation.
2) A sample of 16 realisations has a standard deviation of 3 and a mean value of 50:
I) estimate the mean value of the population
II) with a certainty of 0.9:
    a) bilateral estimation, b) unilateral superior c) unilateral inferior estimation.

Probability estimation:

1) The event in question has occurred 4 times in a sample of 10. Estimate the probable occurrence of this event in the population with certainty of 0.9.
2) The event in question has occurred 4 times in a sample of 100. Estimate the probable occurrence of this event in the population with certainty of 0.9.
3) The event in question has occurred 36 times in a sample of 90. Estimate the probable occurrence of this event in the population with certainty of 0.9.

Introduction Aux Tests Graphiques

Echelles Fonctionnelles – H_0 : $L(X) = N\ (m\ ;\ \sigma)$

I) Sachant que $y = x^2 - 4$; $x = [\ 0\ ;\ 4\ ]$

a. Tracer y en fonction de x.
b. Tracer y en fonction de x^2.

II) Suivant le même principe, construire une échelle fonctionnelle pour la loi Normale.

III) Soit un échantillon avec les réalisations ci-dessous :

130 ; 100 ; 40 ; 70 ; 160 et 120

On fait l'hypothèse que ces réalisations de la Variable Aléatoire X sont issues d'une population où $L(X) = N\ (m\ ;\ \sigma)$.

a) Justifier graphiquement cet hypothèse à un niveau de confiance $1 - \alpha = 0.9$.
b) Comparer les estimations numériques et graphiques de m et σ

Tests Graphiques

Mise en Place du Modèle de Weibull – L(*T*) = W(β ;η ;δ)

Partie I

10 composants d'une production ont été testés jusqu'à défaillance, leurs durées de vie en cycles :

7000	6820	7500	6300	6460
7660	5580	6000	8740	5920

I) Soit *T* v.a. durée de vie d'un composant. Proposer une Loi de comportement de cette variable et estimer ponctuellement ses paramètres.

II) A partir du modèle établi, estimer ponctuellement :
   a. La Fiabilité à 5200 Cycles,
   b. La durée de vie pour une Fiabilité de 0.9,
   c. MTBF.

III) A partir du modèle établi, estimer par intervalle de confiance $1-\alpha = 0.8$:
   a. Les paramètres de cette Loi,
   b. La Fiabilité à 5200 Cycles,
   c. La durée de vie pour une Fiabilité de 0.9,
   d. MTBF.

Partie II

I) Calculer la probabilité que, dans un échantillon de taille 16 issu de la même population, le minimum observé soit inférieur à 5700 Cycles.

II) Calculer la durée de vie *T* dans un échantillon de taille 10 issu de la même population tel que $\Pr(T_n > T) = 0.1$.

Régression – Corrélation linéaire

A partir des résultats de mesure de Y en fonction de X :

X	1	2	3	4	6
Y	10	11	23	34	45

1) Proposer un Modèle Y = f(X) = a x + b,
2) Estimer a & b par intervalle de confiance 1- α = 0.9.
3) Estimer y = a x+ b par intervalle de confiance 1- 2 α = 0.9.
4) Estimer les réalisations possibles y_i par intervalle de confiance 1- 2 α = 0.9.

===

Tests Analytiques

Test du χ^2 – Test de KOLMOGOROV - SMIRNOV - (LILLIEFORS)

I) 100 composants électroniques ont été testés jusqu'à la défaillance. Leurs durées de vie sont consignées dans le tableau suivant :

214	1998	62	305	322	392	2053	1057	304	163
1868	102	970	181	648	356	371	574	713	727
32	1142	15	854	1211	159	205	863	964	189
492	1869	118	1479	1012	1580	687	80	12	1738
495	113	310	41	82	25	409	619	169	455
518	245	376	294	94	307	146	662	445	46
72	231	130	109	1419	227	387	16	430	126
403	138	690	161	692	641	545	260	107	300
240	110	1030	469	922	1003	410	2020	185	151
1021	236	591	244	53	167	148	906	528	395

Tester l'hypothèse que la v.a. *T* durée de vie suit une Loi Exponentiel.

II) On Souhaite tester la Normalité de l'échantillon au risque α =0.2 :

16 13 11 21 20 26 18

Annexe I : Formulaires

Caractéristiques de position centrale

moyenne arithmétique $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ **;** $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} t_i n_i = \sum_{i=1}^{k} t_i f_i$ (classes)

t_i : *milieu de la classe i*

moyenne quadratique $q = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$; $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i t_i^2}$

moyenne géométrique $g = \left\{\prod_{i=1}^{n} x_i\right\}^{1/n}$; $\left\{\prod_{i=1}^{k} (t_i)^{n_i}\right\}^{1/n}$

moyenne harmonique h, $\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$; $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{t_i}$

Dispersion

Etendue $W = x_{max} - x_{min}$

Variance "V" écart type "s"

$V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$; $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(t_i - \bar{x}\right)^2 = s^2$

Coefficient de variation $C_v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sigma}{m}$

Moments non centrés d'une Variable Aléatoire X

$$\boxed{m_k = \int_D x^k dF_X}$$

$\boxed{m_k = \int_D x^k f_X(x)}$ = moment non centré d'ordre k pour <u>X continue</u>

$\boxed{m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \Pr_i}$ = moment non centré d'ordre k pour <u>X discrète</u>

$m_0 = 1$

$m_1 = E\{X\}$ = Espérance mathématique (moyenne)

Si

$Y = aX + b$

donc

$E\{Y\} = aE\{X\} + b$

Moments centrés d'une Variable Aléatoire X

$$\boxed{\mu_k = \int_D \left(x - E\{X\}\right)^k dF_X = E\left(X - E(X)\right)^k}$$

$\boxed{\mu_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^k}$ moment centré d'ordre k pour <u>X discrète</u>

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = V(X)$ = Variance = σ^2

Théorème de Koenig :

$\boxed{\mu_2 = V(X) = E\left(X^2\right) - m_1^2}$

Si

$Y = aX + b$

Donc

$V\{Y\} = a^2 V\{X\}$

Coefficients de forme de la distribution

Asymétrie $g_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$

$g_1 < 0$, *distribution étalée à gauche*

$g_1 = 0$, *distribution symétrique*

$g_1 > 0$, *distribution étalée à droite*

Aplatissement $g_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$

$g_2 < 0$, *distribution plus aplatie que la loi normale*

$g_2 = 0$, *aplatissement d'un phénomène normal*

$g_2 > 0$, *moins aplatie que la loi normale*

Fonctions caractéristiques d'une Variable Aléatoire

<table>
<tr>
<th>1ère Fonction Caractéristique d'une Variable Aléatoire X</th>
<th>2ème Fonction Caractéristique d'une Variable Aléatoire X</th>
</tr>
<tr>
<td>

$$\boxed{\begin{array}{l}\phi_X(t) = \int_D e^{itx} dF_X = E\{e^{itx}\} \\ avec: \\ i = \sqrt{-1} \quad ; \quad t: \text{variable algébrique}\end{array}}$$

propriété

$$e^{y(x)} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{[y(x)]^{\alpha}}{\alpha\,!} \Rightarrow \phi_X(t) = E\left\{\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{[itx]^{\alpha}}{\alpha\,!}\right\}$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{[it]^{\alpha}}{\alpha\,!} E\{x^{\alpha}\} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(it)^{\alpha}}{\alpha\,!} m_{\alpha}$$

Si

$$Y = aX + b$$

Donc

$$\phi_Y(t) = e^{itb}\phi(at)$$

</td>
<td>

$$\boxed{\psi_X(t) = \ln[\phi_X(t)]}$$

Cumulants

$$\psi_X(t) = itm_1 + \frac{(it)^2}{2}\mu_2 + \frac{(it)^3}{3!}\mu_3 + \frac{(it)^4}{4!}[\mu_4 - 3\mu_2{}^2] + \ldots$$

$$K_1 = E\{X\} = m_1$$

$$K_2 = V\{X\} = \mu_2$$

$$K_3 = \mu_3$$

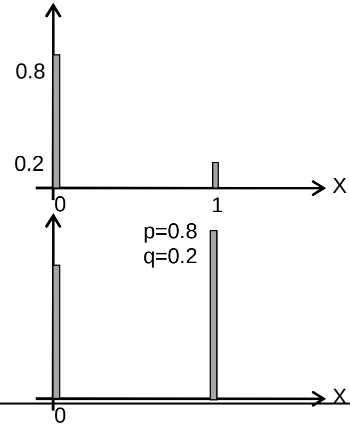
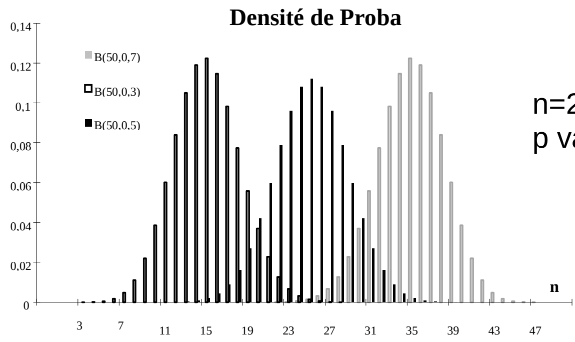
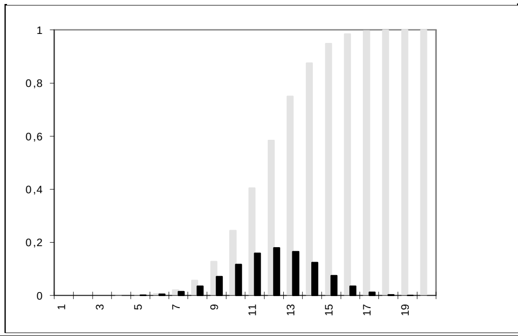
$$K_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2$$

$$g_1 = K_3 \big/ (K_2)^{3/2} \quad ; \quad g_2 = K_4 \big/ (K_2)^2$$

g_1 *et* g_2 **Sont les coefficients de Fisher ils caractérisent l'asymétrie et l'aplatissement**

</td>
</tr>
</table>

Lois et Variable Aléatoire de Type discret

Noms de la loi	Fonctions caractéristiques	Représentations graphiques
Euler Expérimental d'Euler (E, Ω, A_E), X définie par $X(A) = 1,\ X(\overline{A}) = 0$ et $p = \Pr(A)$ $1 - p = q = \Pr(\overline{A})$	$\phi_X(t) = pe^{it} + q = 1 + p(e^{it} - 1)$ $\psi_X(t) = \ln(1 + p(e^{it} - 1))$ $\psi_X(t) = \ln\left(1 + p\left[it + \frac{(it)^2}{2} + \frac{(it)^3}{3!} + \ldots\right]\right)$ $K_1 = E\{X\} = p$ $K_2 = V\{X\} = pq$ $K_3 = \mu_3 = pq(q - p)$ $K_4 = pq(1 - 6pq)$	
Binomiale B(n,p) (E, Ω, A_E) Expérimental d'Euler, <u>n expériences indépendantes</u> (non hexaustif) conduit à n réalisations de A ou $\overline{A}$.	$\phi_X(t) = (pe^{it} + q)^n = (1 + p(e^{it} - 1))^n$ $\psi_X(t) = n * \ln(1 + p(e^{it} - 1))$ $\psi_X(t) = n * \ln\left(1 + p\left[it + \frac{(it)^2}{2} + \frac{(it)^3}{3!} + \ldots\right]\right)$ $K_1 = E\{X\} = np$ $K_2 = V\{X\} = npq$ $K_3 = \mu_3 = npq(q - p)$ $K_4 = npq(1 - 6pq)$ $p_k = \Pr(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	 n=20 p variable  n 20 p 0,6 K1 12 K2 4,8 K3 -1 K4 -2,1

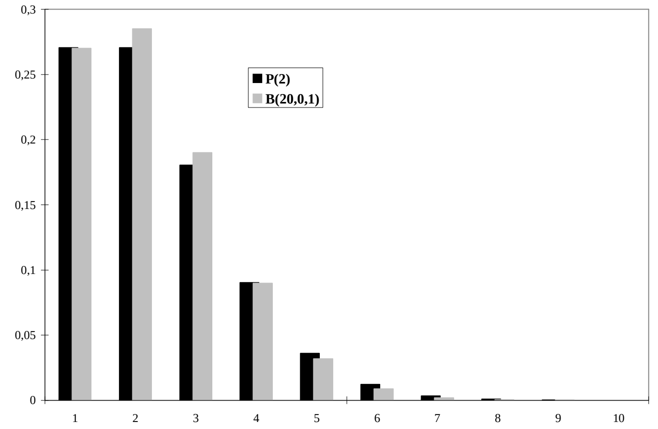
<table>
<tr>
<td>Poisson P(λ)

Cas limite de la loi B(n,p) lorsque : $n \to \infty,\ p \to 0$. Loi des événements rares car grand nombre d'épreuves indépendantes avec une probabilités de réalisations p très faible

$\lambda = np$ nombre fini</td>
<td>$\phi_X(t) = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$

$\psi_X(t) = \lambda \sum_1^{\infty} \frac{(it)^{\alpha}}{\alpha !}$

$K_{\alpha} = \lambda$

$f(k) = p = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k !}$
Stabilité devant l'addition stricte, si $Y = \sum X_{\alpha}$ de loi $P(\lambda_{\alpha})$ alors Y est de loi $P(\lambda)$ avec $\lambda = \sum \lambda_{\alpha}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Géométrique G(p)

soit $(\Omega,\ A_E,\ \Pr)$ avec $p = \Pr(E)$, X est définie par le nombre d'expériences nécessaires à la réalisation de E. Loi de G(p) est la probabilité que l'événement se produise pour la première fois à la kième épreuve, avce sur les k-1 précédentes réalisation de $\overline{E}$

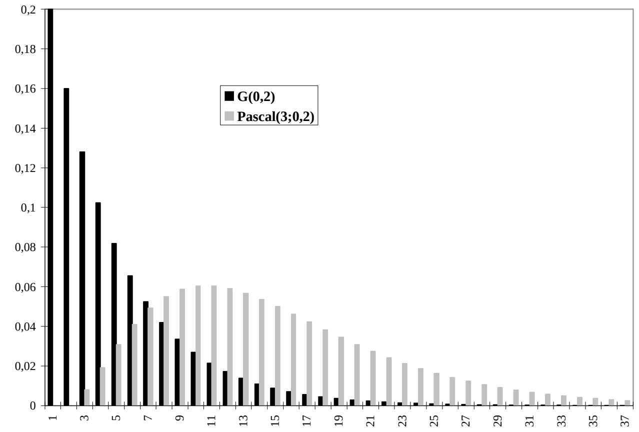
Pascal Pa(r,p)
même expérimental que précédemment, mais v.a. X "nombres d'épreuves nécessaires à la réalisation de r événements".</td>
<td>$\Pr(X = k) = p * q^{k-1}$

$\phi_X = pe^{it} \frac{1}{1 - pe^{it}}$

$E\{X\} = 1 / p$

$V\{X\} = \frac{q}{p^2}$

$\Pr(X = k) = C_{k-1}^{r-1} * p^{r-1} * q^{k-r}$
$E\{X\} = r / p$

$V\{X\} = \frac{rq}{p^2}$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Loi Normale N(m,σ), N(0,1) Obtention depuis la loi Binômiale B(n,p)

A partir de la loi binomiale, on passe à la limite pour $n \to \infty$ et p tend ni vers 0 ni vers 1. Soit X v.a. de loi B(n,p) alors E(X)=np et V(X)= npq. Soit Z v.a centrée et réduite telle que :

$$\boxed{z = \frac{x - E(X)}{\sqrt{V(X)}} = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}}$$

X est discrète quand est il de Z?

$$\Delta x = x_2 - x_1 = k(entier)$$

$$\Delta z = z_2 - z_1 = \frac{x_2 - m}{\sigma} - \frac{x_1 - m}{\sigma} = \frac{k}{\sqrt{npq}}$$

$\Delta z \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ***z est donc continue***

Calcul de la fonction densité de probabilité de N(0,1) depuis Φx(t)

$$\phi_X(t) = (pe^{it} + q)^n = (1 + p(e^{it} - 1))^n$$

$$Z = \alpha . X + \beta \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{npq}} \qquad \beta = \frac{-np}{\sqrt{npq}} = -\alpha np$$

on a alors

$\phi_Z(t) = e^{it\beta}\phi_X(\alpha t)$ puis après un développement long (cf. Poly) on obtient l'expression de la 2ème f.c. de Z :

$$\psi_Z(t) = \frac{-t^2}{2} \qquad \rightarrow \qquad \phi_Z(t) = e^{-t^2/2} = e^{-i^2 t^2/2}$$

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}}$$

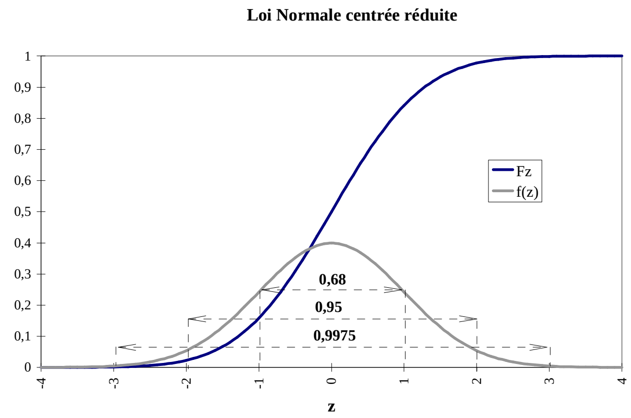
Généralisation de la loi N(m,σ) à partir de N(0,1)

$Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$ v.a. de loi N(0,1) $X = \sigma Z + m$

$$\phi_X(t) = e^{itm}.\phi_Z(\sigma t) = e^{itm} e^{\frac{-1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}}$$

Pour le calcul de f(xo) on se ramène toujours à la variable normale centrée réduite (cf. Table) puis on repasse à X par le changement de variable

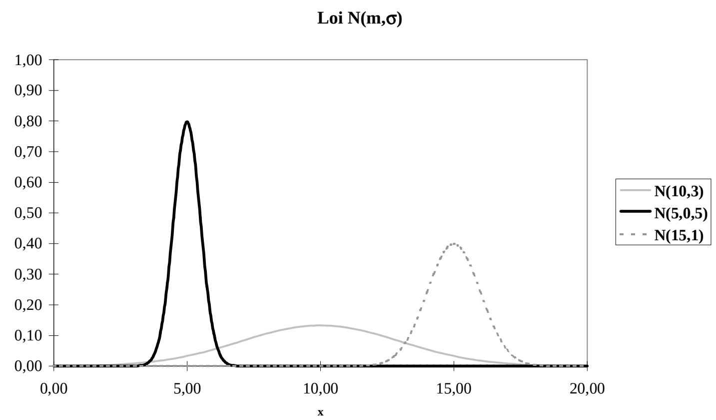


Propriétés

<u>Stabilité devant la combinaison linéaire</u>, soit

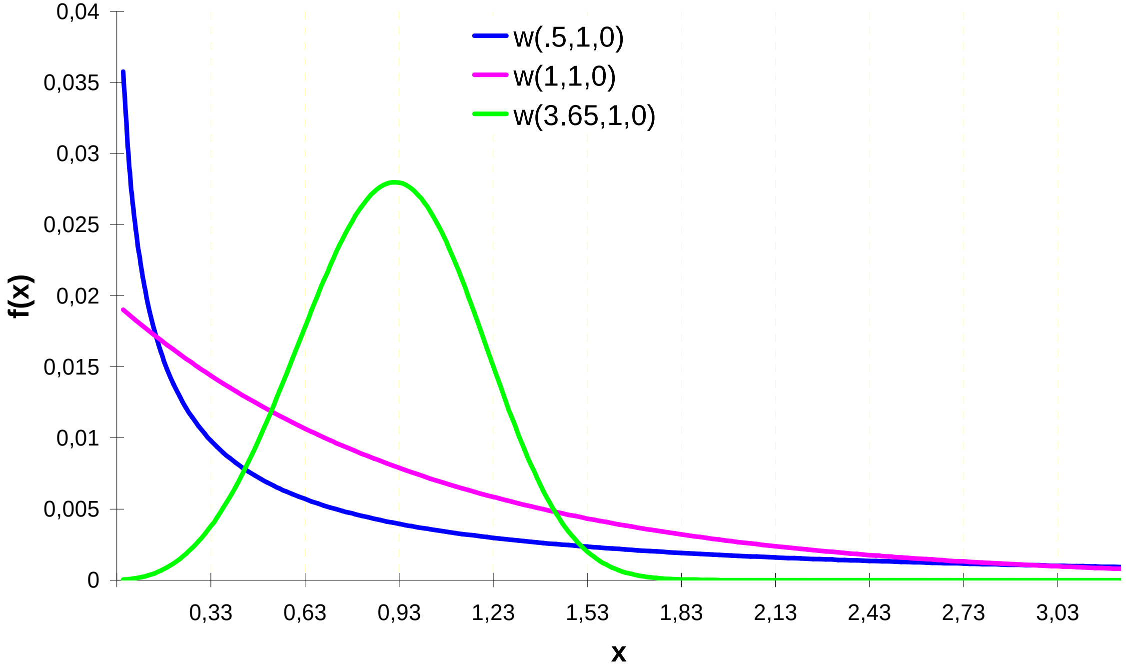
$Z = \sum X_\alpha$ la somme de n v.a. indépendantes de loi $N(m_\alpha, \sigma_\alpha)$ alors Z suit une loi *N(m,σ)* avec

$$\begin{cases} m = \sum \lambda_\alpha m_\alpha \\ \sigma = \sqrt{\sum \lambda_\alpha^2 \sigma_\alpha^2} \end{cases}$$



Loi Log Normale LN(m,σ,d) ***Définition*** *X* v.a. définie sur $[d;\infty[$ suit une loi Log Normale *LN(m,σ,d)* si *Y=ln(X-d)* suit une loi Normale *N(m,σ)* Si *Z* suit une loi *N(0,1)* alors $\begin{cases} Y = ln(X-d) = \sigma Z + m \\ X = d + e^{m+\sigma Z} \end{cases}$	**Fonction densité de Probabilité de LN(m,σ,d):** $f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ est la d.p de Z $m + \sigma Z = ln(X-d) \quad \rightarrow Z = \frac{ln(X-d)-m}{\sigma}$ $dz = dx/\sigma(x-d)$ $\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}(x-d)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(x-d)-m}{\sigma}\right)^2}} \forall x > d$ **Fonction de répartition Fx** $F_Z(z) = \int_{\infty}^{z} f_z(u)du$ est la f.r de la v.a. Z $F_X(x) = Pr(X < x)$ $= \int_d^x f_X(t)dt = \int_d^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln(t-d)-m}{\sigma}\right)^2} \frac{dt}{t-d}$ $F_X(x) = F_Z\left(\frac{ln(x-d)-m}{\sigma}\right)$ **Moyenne écart type** $E(X) = d + e^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \qquad E((X-d)^2) = e^{2(m+\sigma^2)}$ $V(X) = \left(1 - e^{-\sigma^2}\right)e^{2\left(m+\sigma^2\right)}$	

Modèle de Weibull



$$X_{V.A.} \in [\delta ; \infty)$$

$$L(X) = W(\beta ; \eta ; \delta)$$

$$f_X(x) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x-\delta}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\delta}{\eta}\right)^{\beta}}$$

$$F_X(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x-\delta}{\eta}\right)^{\beta}}$$

$$E(X) = M.T.B.F. \quad = \delta + \eta \cdot \gamma_1 \qquad ; \qquad \sigma(X) = \eta * \left[\gamma_2 - \gamma_1^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$g_1 = \frac{\gamma_3 - 3\,\gamma_2 + 2\,\gamma_1^3}{\left(\gamma_2 - \gamma_1^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad ; \qquad g_2 = \frac{\gamma_4 - 4\,\gamma_3\,\gamma_1 + 3\,\gamma_2^3 + 12\,\gamma_2\,\gamma_1^2 - 6\,\gamma_1^4}{\left(\gamma_2 - \gamma_1^2\right)^2} \qquad ; \qquad \gamma_i = \gamma\left(1 + \frac{i}{\beta}\right)$$

Annexe II : Table des Rangs

RANGS A 50 (Médians)

i \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n / i
	Taille de l'échantillon										
1	0.500	0.293	0.206	0.159	0.129	0.109	0.094	0.083	0.074	0.067	1
2		0.707	0.500	0.386	0.314	0.265	0.229	0.201	0.180	0.162	2
3			0.794	0.612	0.500	0.421	0.364	0.321	0.286	0.259	3
4				0.841	0.686	0.579	0.500	0.440	0.393	0.355	4
5					0.871	0.735	0.636	0.560	0.500	0.452	5
6						0.891	0.771	0.679	0.607	0.548	6
7							0.909	0.799	0.714	0.645	7
8								0.917	0.820	0.741	8
9									0.926	0.838	9
10										0.933	10

i \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	n / i
	Taille de l'échantillon										
1	0.061	0.056	0.052	0.048	0.045	0.042	0.040	0.038	0.036	0.034	1
2	0.148	0.136	0.126	0.117	0.109	0.103	0.097	0.092	0.087	0.083	2
3	0.236	0.217	0.200	0.187	0.174	0.164	0.154	0.146	0.138	0.132	3
4	0.324	0.298	0.275	0.256	0.239	0.225	0.212	0.200	0.190	0.181	4
5	0.412	0.379	0.350	0.326	0.305	0.286	0.269	0.255	0.242	0.230	5
6	0.500	0.460	0.425	0.395	0.370	0.347	0.327	0.309	0.293	0.279	6
7	0.588	0.541	0.500	0.465	0.435	0.408	0.385	0.364	0.345	0.328	7
8	0.676	0.622	0.575	0.535	0.500	0.469	0.442	0.418	0.397	0.377	8
9	0.764	0.702	0.650	0.605	0.565	0.531	0.500	0.473	0.448	0.426	9
10	0.852	0.783	0.725	0.674	0.630	0.592	0.558	0.527	0.500	0.475	10
11	0.939	0.864	0.800	0.744	0.696	0.653	0.615	0.562	0.552	0.525	11
12		0.944	0.874	0.814	0.761	0.714	0.673	0.636	0.603	0.574	12
13			0.948	0.883	0.826	0.775	0.731	0.691	0.655	0.623	13
14				0.952	0.891	0.836	0.788	0.745	0.707	0.672	14
15					0.955	0.897	0.846	0.800	0.759	0.721	15
16						0.958	0.903	0.854	0.810	0.770	16
17							0.960	0.909	0.862	0.819	17
18								0.962	0.913	0.869	18
19									0.964	0.918	19
20										0.966	20

RANGS A 10 ET 90

i \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n / i
	Taille de l'échantillon										
1	0.100	0.051	0.035	0.026	0.021	0.017	0.015	0.013	0.012	0.011	1
2		0.316	0.196	0.143	0.112	0.093	0.079	0.069	0.061	0.055	2
3			0.464	0.321	0.247	0.201	0.170	0.147	0.130	0.116	3
4				0.562	0.416	0.333	0.279	0.240	0.210	0.188	4
5					0.631	0.490	0.404	0.345	0.301	0.267	5
6						0.681	0.547	0.462	0.401	0.354	6
7							0.720	0.594	0.510	0.448	7
8								0.750	0.632	0.550	8
9									0.774	0.663	9
10										0.794	10

i \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	n / i
	Taille de l'échantillon										
1	0.010	0.009	0.008	0.008	0.007	0.007	0.006	0.006	0.005	0.005	1
2	0.050	0.045	0.042	0.039	0.036	0.034	0.032	0.030	0.028	0.026	2
3	0.105	0.096	0.088	0.082	0.076	0.071	0.067	0.063	0.060	0.056	3
4	0.169	0.154	0.142	0.131	0.122	0.114	0.106	0.101	0.095	0.090	4
5	0.241	0.219	0.201	0.185	0.172	0.166	0.151	0.142	0.134	0.127	5
6	0.318	0.288	0.264	0.243	0.226	0.210	0.197	0.186	0.175	0.166	6
7	0.401	0.362	0.331	0.305	0.282	0.263	0.246	0.231	0.218	0.207	7
8	0.489	0.441	0.402	0.369	0.342	0.318	0.297	0.279	0.263	0.249	8
9	0.585	0.525	0.477	0.437	0.404	0.375	0.350	0.329	0.310	0.293	9
10	0.690	0.615	0.556	0.508	0.468	0.435	0.406	0.380	0.358	0.338	10
11	0.811	0.713	0.640	0.583	0.536	0.497	0.463	0.433	0.408	0.385	11
12		0.825	0.732	0.663	0.607	0.561	0.522	0.482	0.459	0.433	12
13			0.838	0.749	0.683	0.629	0.584	0.545	0.511	0.482	13
14				0.848	0.764	0.700	0.648	0.604	0.566	0.533	14
15					0.858	0.778	0.716	0.666	0.623	0.585	15
16						0.866	0.790	0.731	0.681	0.639	16
17							0.873	0.801	0.744	0.696	17
18								0.880	0.810	0.755	18
19									0.886	0.819	19
20										0.891	20

RANGS A 5 ET 95

i \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n \ i
	Taille de l'échantillon										
1	0.050	0.025	0.017	0.013	0.010	0.009	0.007	0.006	0.006	0.005	1
2		0.224	0.135	0.098	0.076	0.063	0.053	0.046	0.041	0.037	2
3			0.368	0.249	0.189	0.153	0.129	0.111	0.098	0.087	3
4				0.473	0.343	0.271	0.225	0.193	0.169	0.150	4
5					0.549	0.418	0.341	0.289	0.251	0.222	5
6						0.607	0.479	0.400	0.345	0.304	6
7							0.652	0.529	0.450	0.394	7
8								0.688	0.571	0.493	8
9									0.717	0.606	9
10										0.741	10

i \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	n \ i
	Taille de l'échantillon										
1	0.005	0.004	0.004	0.004	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	1
2	0.033	0.031	0.028	0.026	0.024	0.023	0.021	0.021	0.019	0.018	2
3	0.079	0.072	0.066	0.061	0.057	0.053	0.050	0.047	0.045	0.040	3
4	0.135	0.123	0.113	0.104	0.097	0.090	0.085	0.080	0.075	0.071	4
5	0.200	0.181	0.166	0.153	0.142	0.132	0.124	0.116	0.110	0.104	5
6	0.271	0.245	0.224	0.206	0.191	0.178	0.166	0.156	0.148	0.140	6
7	0.350	0.315	0.287	0.264	0.244	0.227	0.212	0.199	0.188	0.177	7
8	0.436	0.391	0.355	0.325	0.300	0.279	0.260	0.244	0.230	0.217	8
9	0.530	0.473	0.427	0.390	0.360	0.333	0.311	0.291	0.274	0.259	9
10	0.636	0.562	0.505	0.460	0.423	0.391	0.364	0.341	0.320	0.302	10
11	0.762	0.661	0.590	0.534	0.489	0.452	0.420	0.392	0.368	0.347	11
12		0.779	0.684	0.615	0.560	0.516	0.478	0.446	0.418	0.394	12
13			0.794	0.703	0.637	0.583	0.540	0.502	0.470	0.442	13
14				0.807	0.721	0.656	0.604	0.561	0.524	0.492	14
15					0.819	0.736	0.674	0.623	0.581	0.544	15
16						0.829	0.750	0.690	0.641	0.599	16
17							0.839	0.762	0.704	0.656	17
18								0.847	0.774	0.717	18
19									0.854	0.784	19
20										0.861	20

RANGS A 20 ET 80

i \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n \ i
	Taille de l'échantillon										
1	0.200	0.106	0.072	0.054	0.044	0.037	0.031	0.028	0.025	0.022	1
2		0.447	0.287	0.212	0.169	0.140	0.120	0.104	0.093	0.083	2
3			0.585	0.418	0.327	0.269	0.228	0.199	0.176	0.158	3
4				0.669	0.510	0.415	0.350	0.303	0.268	0.239	4
5					0.725	0.578	0.483	0.416	0.366	0.327	5
6						0.765	0.629	0.538	0.471	0.419	6
7							0.795	0.670	0.532	0.516	7
8								0.818	0.702	0.619	8
9									0.836	0.729	9
10										0.851	10

i \ n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	n \ i
	Taille de l'échantillon										
1	0.020	0.018	0.017	0.016	0.015	0.014	0.013	0.012	0.012	0.011	1
2	0.076	0.069	0.064	0.059	0.055	0.052	0.049	0.046	0.044	0.041	2
3	0.143	0.131	0.120	0.112	0.104	0.098	0.092	0.087	0.082	0.078	3
4	0.217	0.198	0.182	0.169	0.157	0.147	0.138	0.130	0.123	0.117	4
5	0.295	0.269	0.248	0.229	0.213	0.199	0.187	0.177	0.167	0.158	5
6	0.378	0.344	0.316	0.292	0.272	0.254	0.238	0.225	0.212	0.201	6
7	0.464	0.422	0.337	0.357	0.332	0.310	0.291	0.274	0.259	0.245	7
8	0.555	0.503	0.461	0.425	0.394	0.368	0.345	0.325	0.307	0.291	8
9	0.650	0.588	0.537	0.495	0.486	0.427	0.400	0.377	0.356	0.337	9
10	0.751	0.676	0.616	0.566	0.524	0.488	0.457	0.430	0.406	0.384	10
11	0.864	0.770	0.699	0.641	0.592	0.551	0.515	0.484	0.457	0.432	11
12		0.875	0.787	0.719	0.663	0.616	0.575	0.540	0.509	0.481	12
13			0.884	0.801	0.736	0.682	0.636	0.596	0.562	0.531	13
14				0.891	0.813	0.751	0.699	0.655	0.616	0.582	14
15					0.898	0.824	0.765	0.715	0.672	0.634	15
16						0.904	0.834	0.777	0.729	0.687	16
17							0.910	0.843	0.788	0.741	17
18								0.915	0.851	0.798	18
19									0.919	0.858	19
20										0.923	20

Annexes III : Fonction Gamma

$$\gamma(p) = \int_{0}^{-\infty} e^{-x}.x^{p-1}.dx$$

$$\gamma(a,p) = \int_{0}^{-\infty} e^{-ax}.x^{p-1}.dx$$

$$\gamma(a,p) = \gamma(p)/a^{p}$$

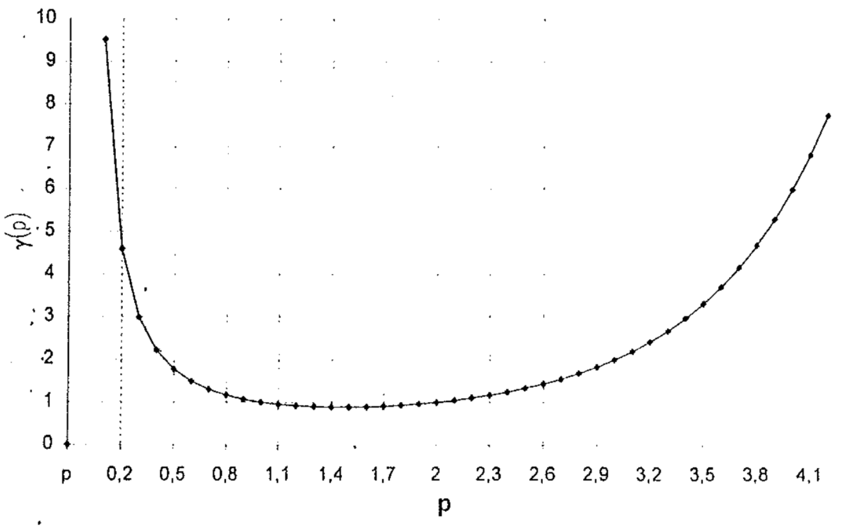
Si p entier

$$\gamma(p+1) = p!$$

$$\gamma(p+1) = p.\gamma(p)$$

$$\gamma\left(1/2\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\gamma(p-1) = \gamma(p)/p-1$$



FONCTION GAMMA

p	γ(p)	p	γ(p)	p	γ(p)
1	1	1,35	0,891	1,7	0,909
1,01	0,994	1,36	0,890	1,71	0,911
1,02	0,989	1,37	0,889	1,72	0,913
1,03	0,984	1,38	0,889	1,73	0,915
1,04	0,978	1,39	0,888	1,74	0,917
1,05	0,974	1,4	0,887	1,75	0,919
1,06	0,969	1,41	0,887	1,76	0,921
1,07	0,964	1,42	0,886	1,77	0,924
1,08	0,960	1,43	0,886	1,78	0,926
1,09	0,955	1,44	0,886	1,79	0,929
1,1	0,951	1,45	0,886	1,8	0,931
1,11	0,947	1,46	0,886	1,81	0,934
1,12	0,944	1,47	0,886	1,82	0,937
1,13	0,940	1,48	0,886	1,83	0,940
1,14	0,936	1,49	0,886	1,84	0,943
1,15	0,933	1,5	0,886	1,85	0,946
1,16	0,930	1,51	0,887	1,86	0,949
1,17	0,927	1,52	0,887	1,87	0,952
1,18	0,924	1,53	0,888	1,88	0,955
1,19	0,921	1,54	0,888	1,89	0,958
1,2	0,918	1,55	0,889	1,9	0,962
1,21	0,916	1,56	0,890	1,91	0,965
1,22	0,913	1,57	0,890	1,92	0,969
1,23	0,911	1,58	0,891	1,93	0,972
1,24	0,909	1,59	0,892	1,94	0,976
1,25	0,906	1,6	0,894	1,95	0,980
1,26	0,904	1,61	0,895	1,96	0,984
1,27	0,903	1,62	0,896	1,97	0,988
1,28	0,901	1,63	0,897	1,98	0,992
1,29	0,899	1,64	0,899	1,99	0,996
1,3	0,897	1,65	0,900	2	1,000
1,31	0,896	1,66	0,902		
1,32	0,895	1,67	0,903		
1,33	0,893	1,68	0,905		
1,34	0,892	1,69	0,907		

Annexes IV : Tables Kolmogorov

TABLE DE KOLMOGOROV

n	0,80	0,90	0,95
1	0,900	0,950	0,975
2	0,684	0,776	0,842
3	0,565	0,636	0,708
4	0,493	0,565	0,624
5	0,447	0,509	0,563
6	0,410	0,468	0,519
7	0,381	0,436	0,483
8	0,358	0,410	0,454
9	0,339	0,387	0,430
10	0,323	0,369	0,409
11	0,308	0,352	0,391
12	0,296	0,338	0,375
13	0,285	0,325	0,361
14	0,275	0,314	0,349
15	0,266	0,304	0,338
16	0,258	0,295	0,327
17	0,250	0,286	0,318
18	0,244	0,279	0,309
19	0,237	0,271	0,301
20	0,232	0,265	0,294
21	0,226	0,259	0,287
22	0,221	0253	0,281
23	0,216	0,247	0,275
24	0,212	0,242	0,269
25	0,208	0238	0,264
26	0,204	0,233	0,259
27	0,200	0,229	0,254
28	0,197	0,225	0,250
29	0,193	0,221	0,246
30	0,190	0,218	0,242
30 < n	$1,070/\sqrt{n}$	$1,220/\sqrt{n}$	$1,360/\sqrt{n}$

TABLE DE LILLIEFORS

0,80	0,90	0,95	n
0,300	0,352	0,381	4
0,285	0,315	0,337	5
0,265	0,294	0,319	6
0,247	0,276	0,300	7
0,233	0,261	0,285	8
0,223	0,249	0,271	9
0,215	0,239	0,258	10
0,206	0,230	0,249	11
0,199	0,223	0,242	12
0,190	0,214	0,234	13
0,183	0,207	0,227	14
0,177	0,201	0,220	15
0,173	0,195	0,213	16
0,169	0,189	0,206	17
0,166	0,184	0,200	18
0,163	0,179	0,195	19
0,160	0,174	0,190	20
0,156	0,171	0,185	21
0,152	0,167	0,182	22
0,148	0,164	0,179	23
0,145	0,161	0,176	24
0,142	0,158	0,173	25
0,139	0,154	0,170	26
0,137	0,151	0,167	27
0,135	0,148	0,165	28
0,133	0,146	0,163	29
0,131	0,144	0,161	30
$0,736/\sqrt{n}$	$0,805/\sqrt{n}$	$0,886/\sqrt{n}$	30 < n