



*La vitesse de rotation,
un signal original,
des outils originaux.*

5GMD - MESCM
Séance 5 : Introduction & T.F.

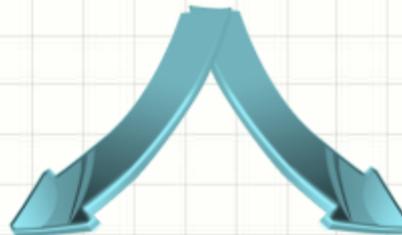
Adeline Bourdon - Didier Rémond

Février 2015

Fil conducteur

Reproduire, de manière guidée, nos démarches et réflexions dans le domaine de la détections de défauts dans les machines tournantes.

Quels apports ?



Connaissances

- Détections de défauts
- Fréquences caractéristiques
- Signal vitesse de rotation
- Principe de mesure
- Outils spécifiques

Compétences

- Démarches
- Analyse problématique
- Construction de modèles « adaptés »

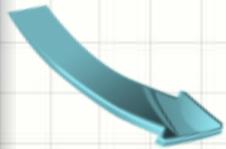
Evaluation

Rédaction d'un « cahier d'expériences » personnel réalisé majoritairement pendant les cours

- Constatations
- Réflexions
- Modélisation
- Simulations
- Analyses
- Conclusions
- Perspectives ...



Codes Matlab

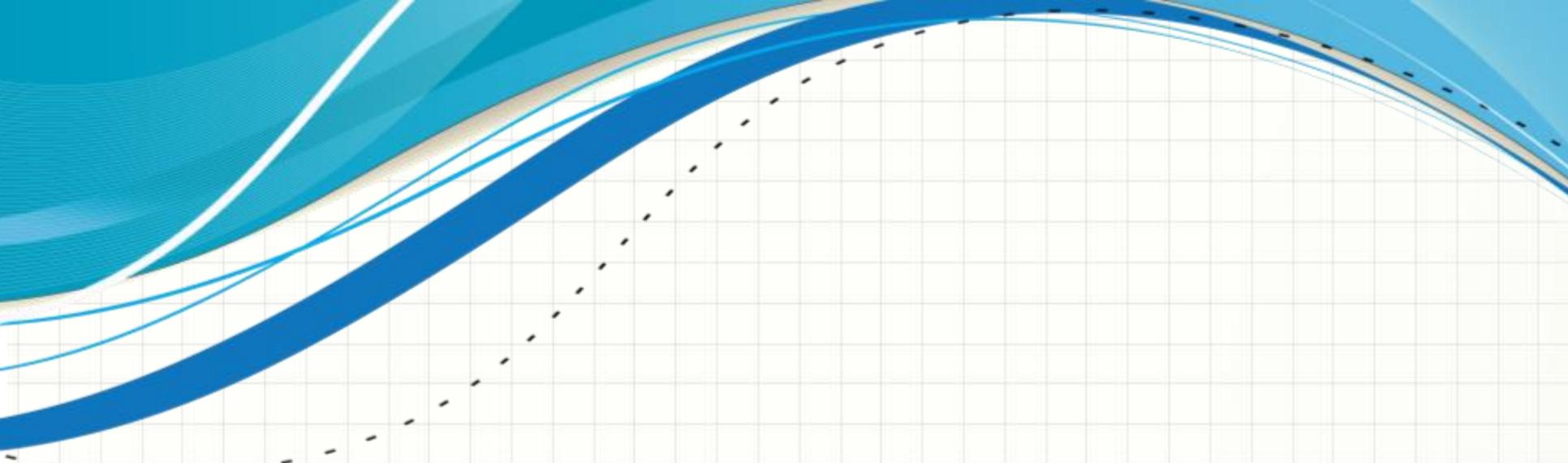


Cahier expériences + codes = Eléments d'évaluation

A rendre sous moodle (zip avec codes + rapport) avant le vendredi 3 avril

Au menu :

- Les bases de la détections de défaut,
- Les Transformées de Fourier un outil incontournable,
- Mise en œuvre sous Matlab,
- Approches traditionnelles des TF pour la détection de défaut,
- Problématiques des régimes non stationnaires
- Transformées de Fourier en angle,
- La vitesse de rotation un signal original pour le suivi de comportement
 - Historique,
 - Principe de mesure
 - Comparaison fréquentielle signal « vrai » / signal mesuré
 - Application à des signaux réels
- Les problématiques du suivi de comportement au travers de la VVI
- Modélisation des effets d'un défaut de roulement sur la vitesse
- Couplages éventuels vitesses / accélérations
- Application des approches angulaires aux machines asynchrones
- Nos problématiques actuelles et nos premiers éléments de réponse



Introduction
Les bases de la
détections de défauts

Nos originalités

- Régimes de fonctionnement non stationnaires
 - Partenariats avec Maia Eolis exploitant de Parcs Eoliens (2 thèses depuis 2009)
 - Développement d'outils de traitement du signal spécifiques
 - Approche « angulaire »
- Signal « vitesse de rotation »
 - Caractéristique des systèmes tournants
 - Développement de techniques de mesure originales (2 brevets)

Le Béa Ba de la détection défaut



Présence d'un défaut
sur un élément mobile

Génération d'une perturbation qui se répète avec la rotation du système.
Les effets de cette perturbation sont détectables sur des signaux mesurables.

Accélérations

Vitesse de rotation

Electrique

...

Obtenir des informations sur le défaut

Fréquences caractéristiques

Les fréquences caractéristiques ou fréquences de défaut μ sont associées à la cinématique et aux éléments technologiques du mécanisme.

Elles traduisent les relations cinématiques entre les vitesses et les rotations de deux éléments du système.

Elles sont donc définies de manière relative à la référence choisie.

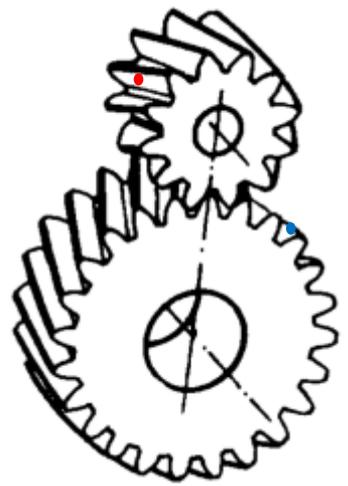
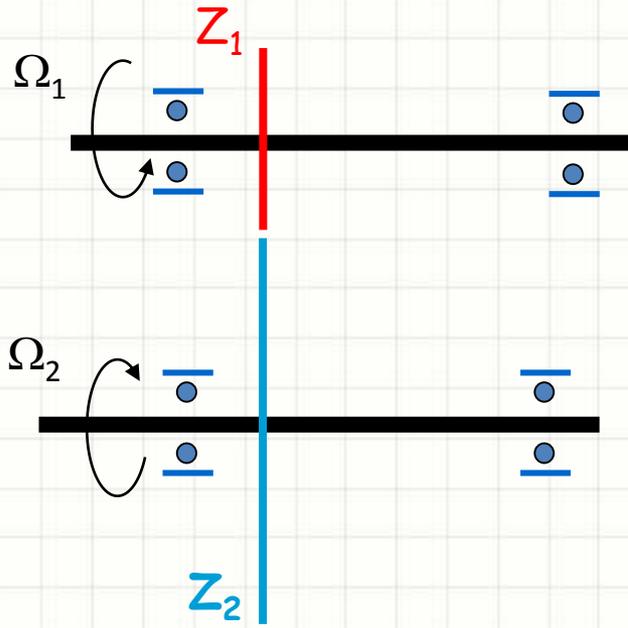
Elles sont homogènes à un nombre d'évènements par tour de l'élément de référence.

$$\forall t \quad \omega_1(t) = \mu \cdot \omega_2(t) \quad \Rightarrow \quad \theta_1(t) = \mu \theta_2(t) + \theta_1^0$$

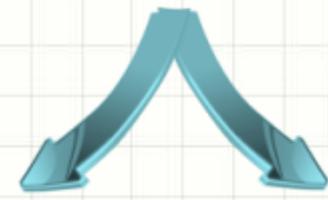
Attention à ne pas les confondre avec les fréquences propres de la structure.

Engrenages

$$\Omega_2 = -Z_1 / Z_2 \cdot \Omega_1 = -r \cdot \Omega_1$$



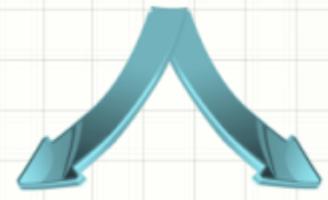
● Défaut sur une dent du pignon 1



Apparition :
1 fois par tour
d'arbre 1

Apparition :
1/r fois par
tour d'arbre 2

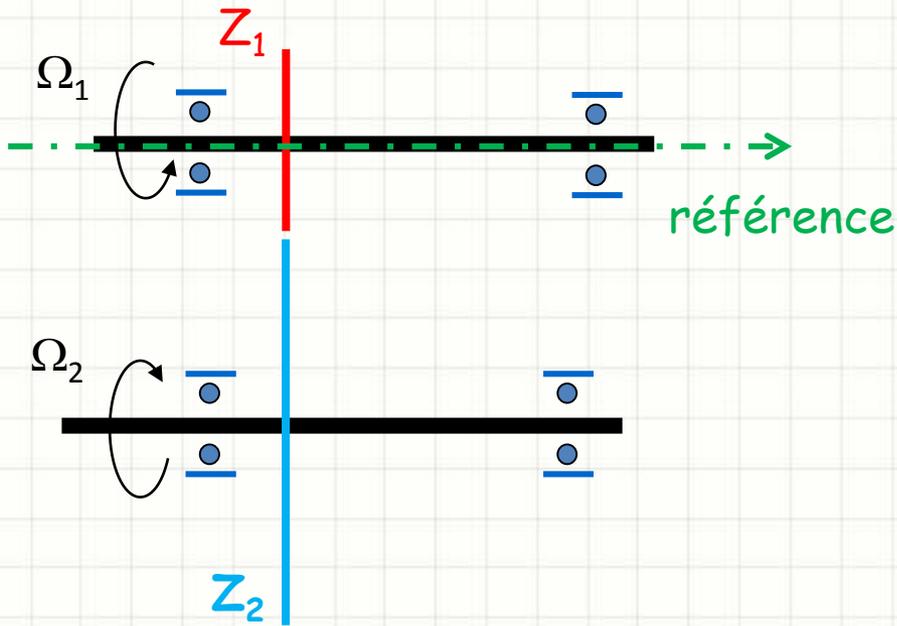
● Défaut sur une dent du pignon 2



Apparition :
r fois par tour
d'arbre 1

Apparition :
1 fois par tour
d'arbre 2

Engrenages $\Omega_2 = -Z_1 / Z_2 \cdot \Omega_1 = -r \cdot \Omega_1$



- Défaut sur une dent du pignon 1



Fréquence caractéristique

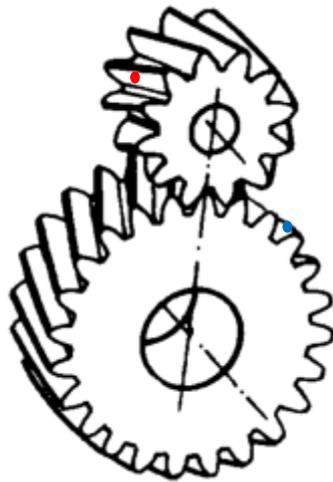
$$\mu_{11} = 1 \text{ ev/tr}$$

- Défaut sur une dent du pignon 2

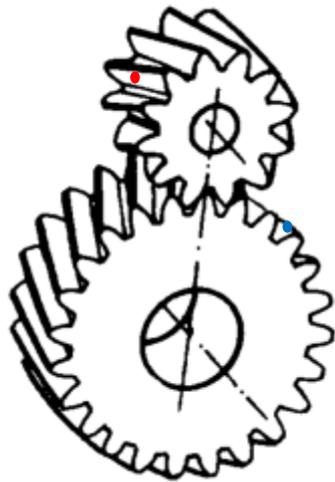
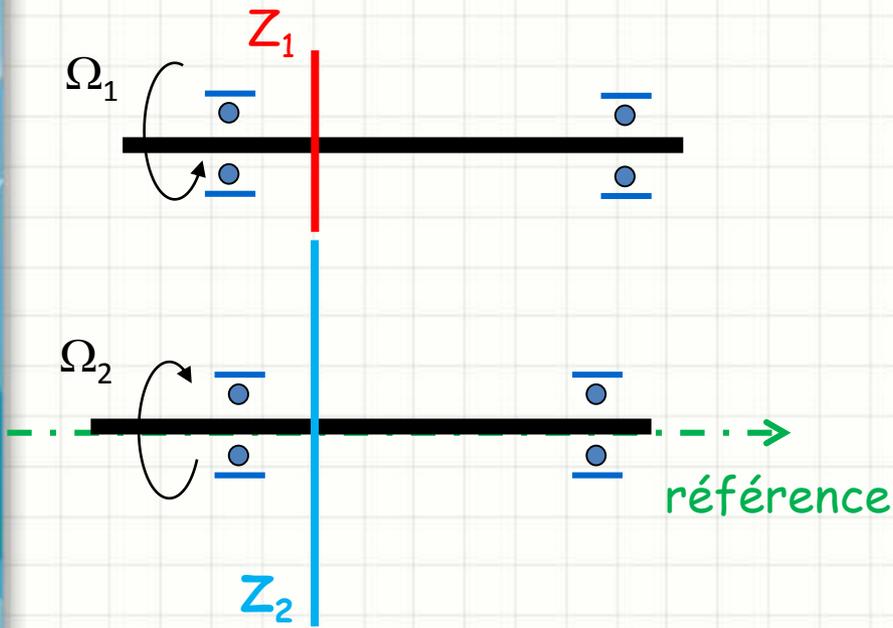


Fréquence caractéristique

$$\mu_{12} = r \text{ ev/tr}$$



Engrenages $\Omega_2 = -Z_1 / Z_2 \cdot \Omega_1 = -r \cdot \Omega_1$



- Défaut sur une dent du pignon 1



Fréquence caractéristique
 $\mu_{21} = 1/r$ ev/tr

- Défaut sur une dent du pignon 2

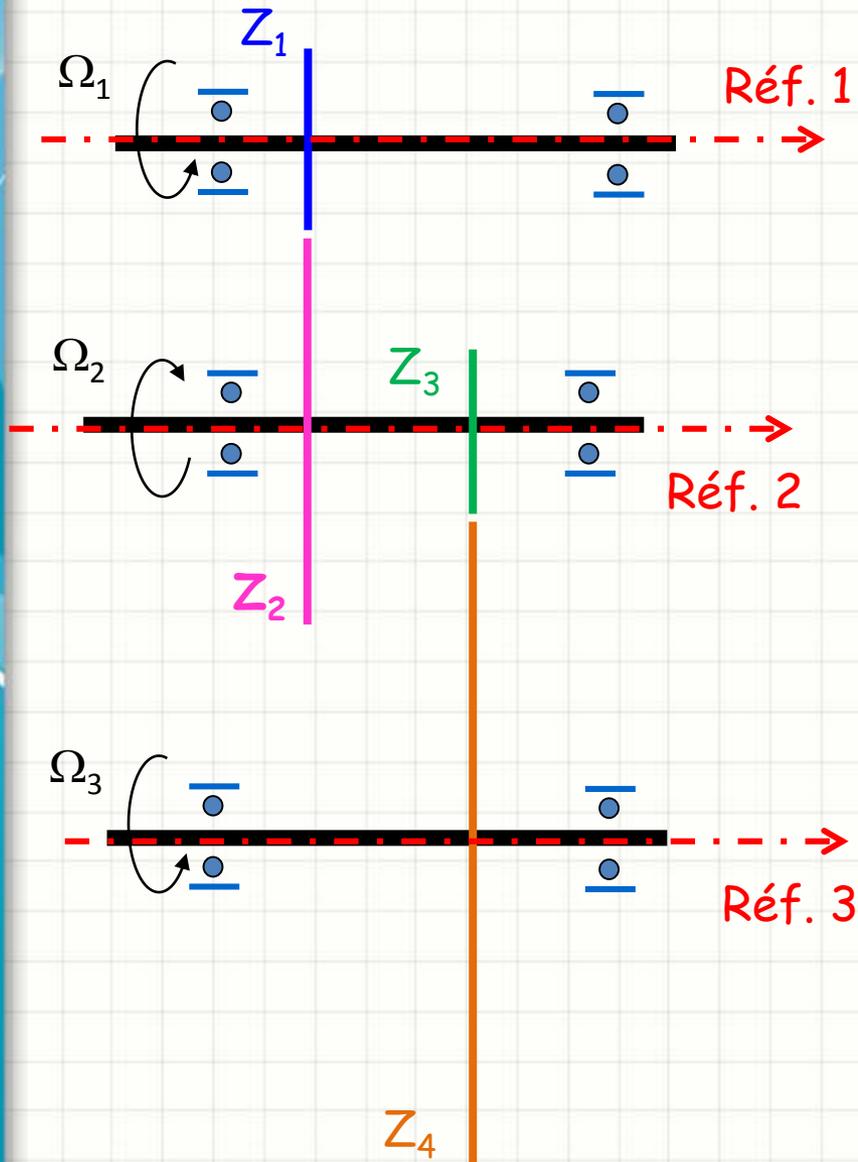


Fréquence caractéristique
 $\mu_{22} = 1$ ev/tr

Engrenages

On considère un défaut sur une dent du pignon 4.

Déterminer en fonction de la référence choisie la fréquence caractéristique de ce défaut



Ref 1 : $\mu_{14} =$ _____

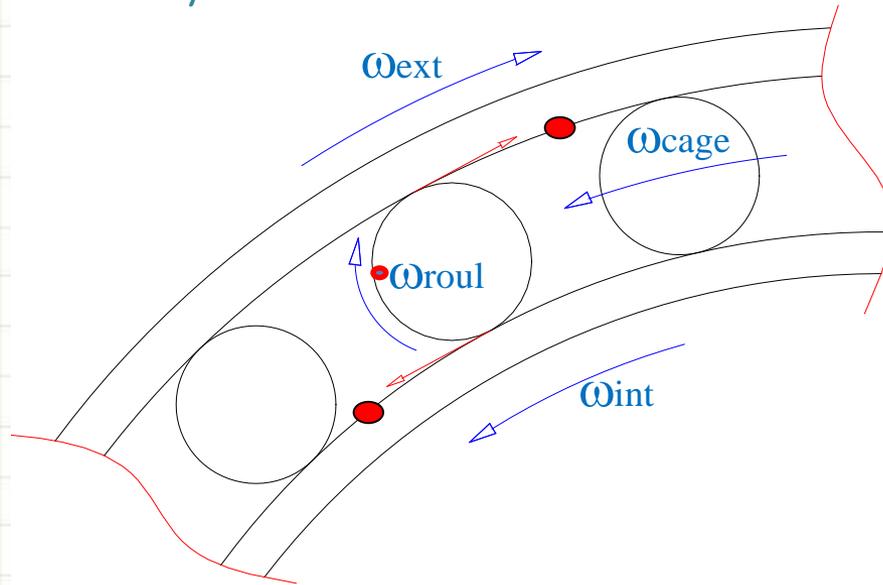
Ref 2 : $\mu_{24} =$ _____

Ref 3 : $\mu_{34} =$ _____

AN : Z1 = 11 ; Z2=38 ;Z3= 19 ;Z4= 72

Roulements

Cinématique d'un roulement



Relations entre les différentes vitesses :

- Estimables si non glissement, et géométrie nominale,
- Dépendent de l'architecture du système
- Exprimées en fonction de la géométrie interne du roulement et des vitesses de ω_{int} et ω_{ext}
- Fournies par les roulementiers

Fréquences caractéristiques associées aux roulements

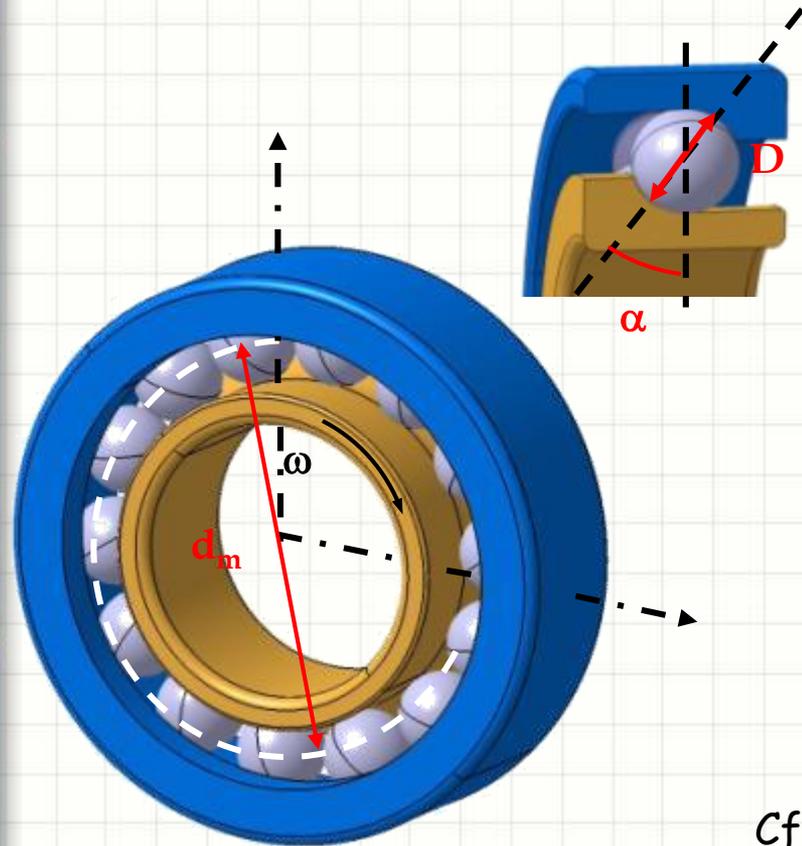
FTF : Fundamental Train Frequency

BSF : Ball Spin Frequency

BPFO : Ball Passing Frequency Outer race → Défaut bague extérieure

BPFI : Ball Passing Frequency Inner race → Défaut bague intérieure

Roulements à Z billes



Bague extérieure fixe

Fréquences caractéristiques / rotation bague intérieure

$$FTF = \frac{1}{2} \cdot (1 - \gamma)$$

$$\gamma = \frac{D \cdot \cos \alpha}{d_m}$$

$$BSF = \frac{d_m}{2D} \cdot (1 - \gamma^2)$$

$$BPFO = \frac{Z}{2} \cdot (1 - \gamma) = Z \cdot FTF$$

$$BPFI = \frac{Z}{2} \cdot (1 + \gamma)$$

Cf cours CMAO1 pour le détail des calculs

Variabilité

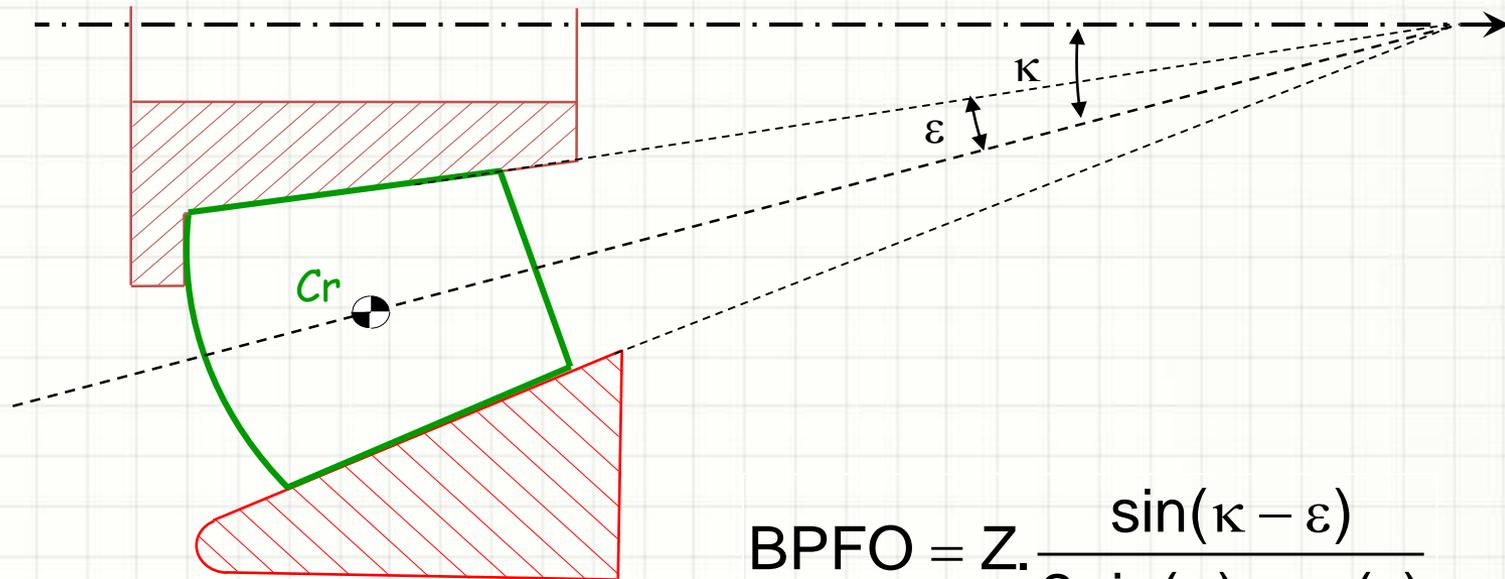


- d'un roulement à l'autre,
- condition de fonctionnement (α)
- glissement

Roulements à rouleaux coniques

Hypothèses

- le contact est supposé linéique sur toute la génératrice,
- les axes des bagues, de la cage sont confondus,
- Il n'y a pas de jeu dans le roulement

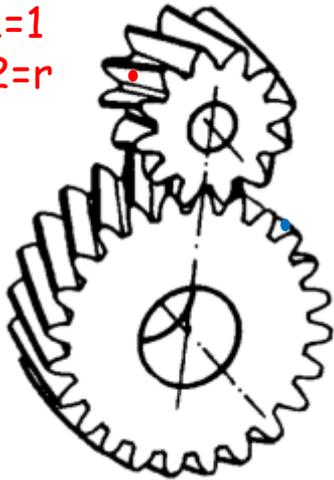


$$BPFO = Z \cdot \frac{\sin(\kappa - \varepsilon)}{2 \sin(\kappa) \cdot \cos(\varepsilon)}$$

Fréquences Naturelles ($f_z = f_v/s$)

Fréquences Caractéristiques (f_v/tr)

$$\mu_{11}=1$$
$$\mu_{12}=r$$



$$\mu_{21}=1/r$$
$$\mu_{22}=1$$

Si le mécanisme fonctionne à **vitesse constante**

$$\begin{aligned}\rightarrow w_1(t) &= cste = w_0 \text{ rad/s} \\ &= 2.\pi.f_0 \text{ rad/s} \\ &= 2.\pi.f_1 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow w_2(t) &= cste = r.w_0 \text{ rad/s} \\ &= 2.\pi.r.f_0 \text{ rad/s} \\ &= 2.\pi.f_2 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Un défaut sur une dent du pignon 1, provoquera une excitation :

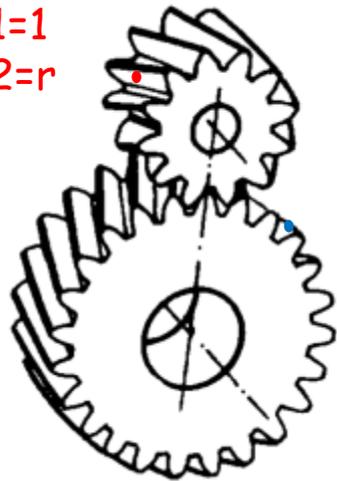
- 1 fois par tour de l'arbre 1,
- 1 fois toutes les $(1/f_0)$ seconde
- de fréquence

$$f_{d1} = f_0 = \mu_{11}.f_1 = \mu_{21}.f_2 \text{ Hz}$$

Un défaut sur une dent du pignon 2, provoquera une excitation :

- 1 fois par tour de l'arbre 2,
- 1 fois toutes les $(1/(r \cdot f_o))$ seconde
- de fréquence

$$f_{d2} = r f_o = \mu_{12} \cdot f_1 = \mu_{22} \cdot f_2 \text{ Hz}$$

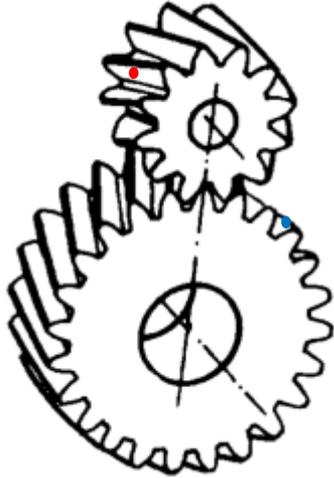


$$\begin{aligned} \mu_{11} &= 1 \\ \mu_{12} &= r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{21} &= 1/r \\ \mu_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Dans le cas de régimes stationnaires, la fréquence d'apparition d'un défaut

- peut s'exprimer en Hertz,
- ne dépend plus de la référence en rotation choisie,
- dépend de la fréquence de rotation du système,
- pourra être détectée par l'analyse des spectres en fréquences



Si le mécanisme fonctionne à **vitesse variable**

$$\rightarrow w_1(t) \neq \text{cste}$$

$$\rightarrow w_2(t) = r w_1(t) \neq \text{cste}$$

Le temps entre 2 manifestations du défaut n'est plus constant, on ne peut donc plus parler de période. Ce temps ne peut pas être estimé facilement.

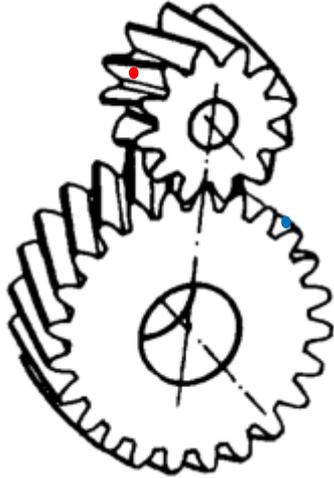
On considère un défaut sur 1 dent du pignon 1.

La dent avec défaut à l'instant $t=0$ est à la position $\theta_1=0$ en contact avec une dent du pignon 2

La vitesse de rotation de la roue 1 est $w_1(t) = w_0 + 2\gamma t$

Déterminer les instants d'apparition du défaut

Calculs des instants d'apparition du défaut dans le cas d'une montée linéaire en vitesse

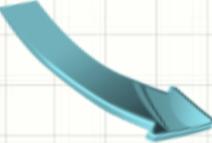


Si le mécanisme fonctionne à **vitesse variable**

$$\rightarrow w_1(t) \neq \text{cste}$$

$$\rightarrow w_2(t) = r w_1(t) \neq \text{cste}$$

Le temps entre 2 manifestations du défaut n'est plus constant, on ne peut donc plus parler de période. Ce temps ne peut pas être estimé facilement.



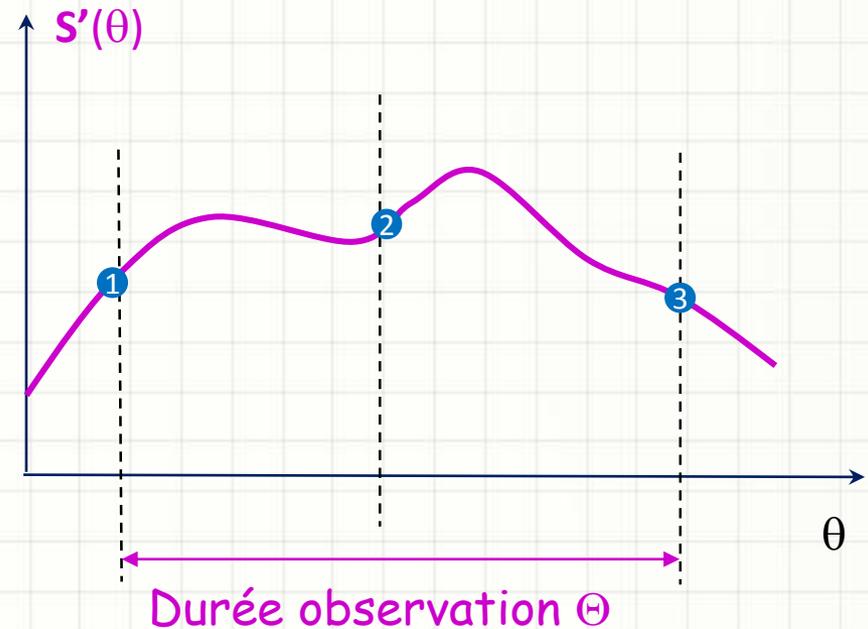
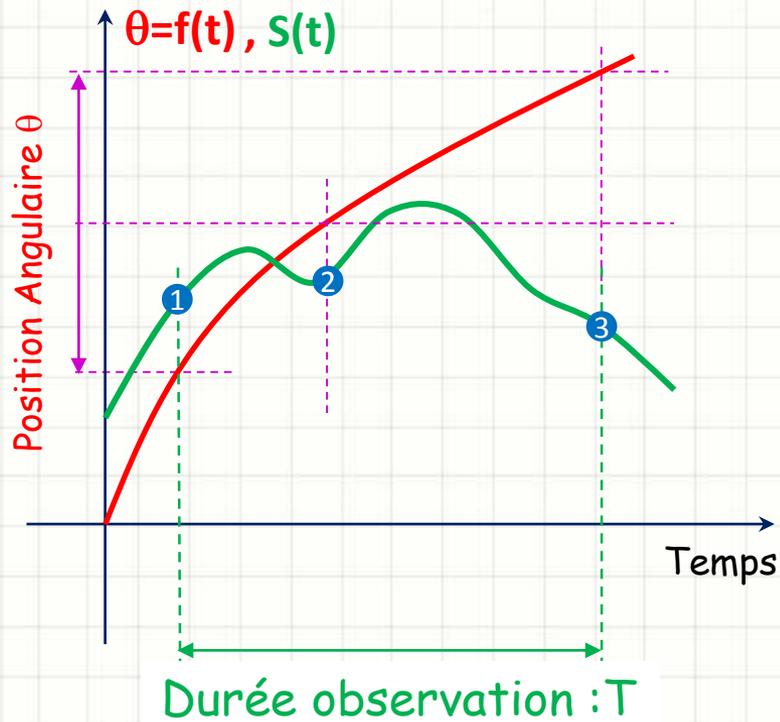
Dans le cas de régimes non stationnaires la présence de défaut n'est plus directement détectable dans le spectre en fréquences naturelles ni dans la représentation temporelle du signal :

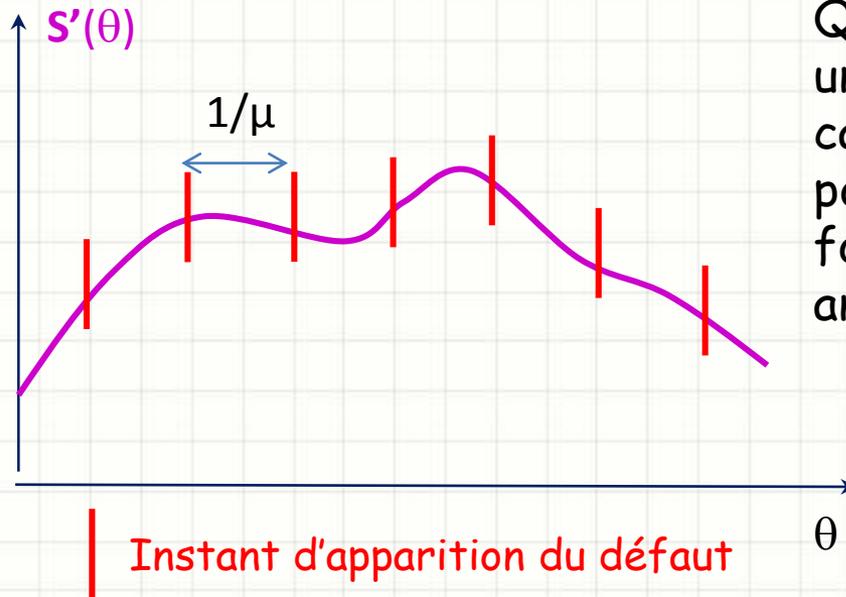
→ Outils spécifiques de traitement du signal

→ Approche angulaire

Approche angulaire

- Système en rotation (sans oscillation; ω de signe constant)
- Choix d'une rotation de « référence » = position angulaire θ
- Relation position angulaire - temps connue, monotone

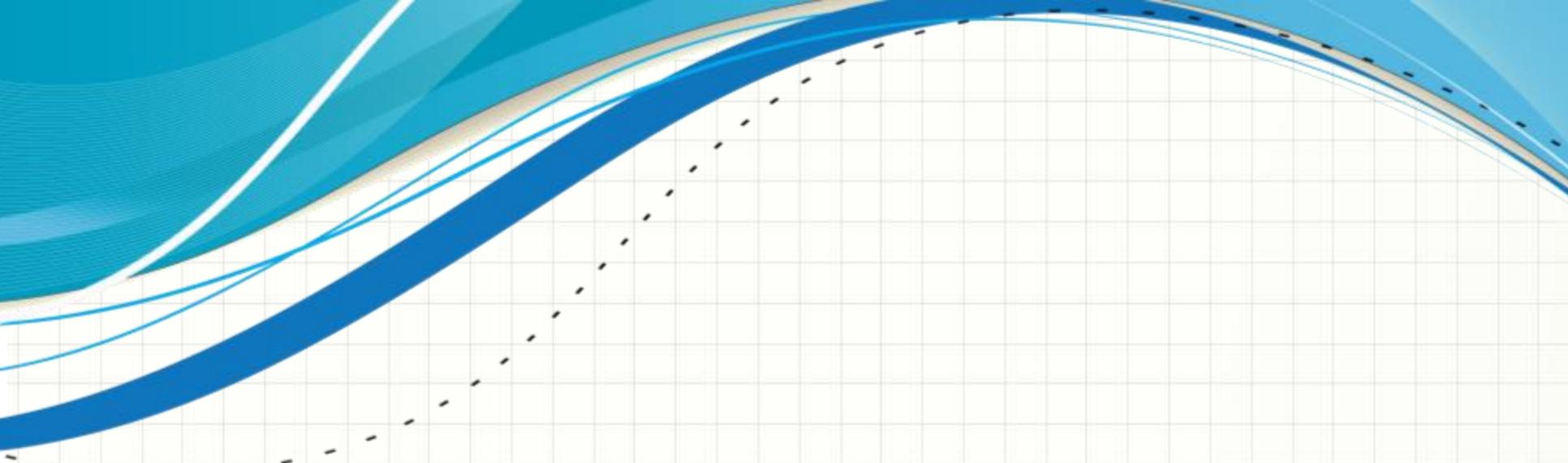




Quelle que soit la vitesse de rotation, un défaut avec une fréquence caractéristique μ , relativement à la position de référence θ , apparaîtra μ fois par tour soit avec une période angulaire de $1/\mu$.

Dans l'espace « angulaire » où le signal s'exprime en fonction de la position angulaire de référence θ , les positions angulaires d'apparition d'un défaut sont équidistantes.

Par analogie avec ce qui est fait dans l'espace en temps classique, il est donc possible de définir une période angulaire et une fréquence angulaire. Il est également possible de définir un spectre en fréquences angulaires



Transformées de Fourier un outil incontournable

- les signaux,
- les Transformées de Fourier,
- l'échantillonnage et ses conséquences,
- les Transformées de Fourier Discrètes

Le qu'il faut savoir

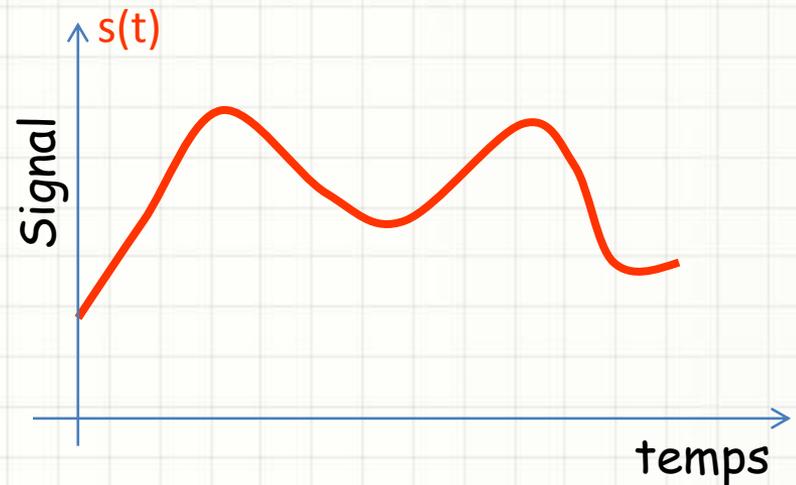
Plus d'info ?

http://moodle.insa-lyon.fr/file.php/351/M2E_1314/pptcours1.pdf (cours M2E)

<http://www.lptmc.jussieu.fr/user/barbi/ENSEIGNEMENT/LICENCE/MESPHYS/IntroAnalyseSpectrale.pdf>

Signal expérimental :

- grandeur physique,
- représentable par une fonction à valeur réelle,
- énergie bornée,
- amplitude bornée,
- continu dans le temps,
- causal,
- spectre borné.



Exemples

- Température,
- Pression,
- Position,
- Vitesse,
- Tension ...

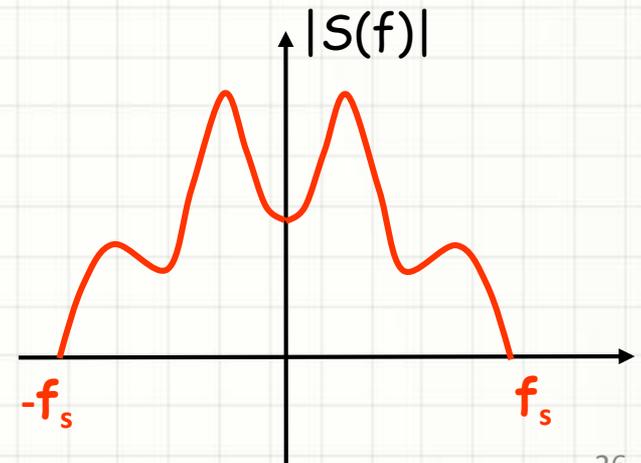
Transformées de Fourier

- Outils mathématiques permettant de passer de l'espace « physique » en temps à l'espace en fréquences
- Extension de la décomposition en séries de Fourier aux fonctions non périodiques (ou de période infinie).
- Généralisables aux fonctions périodiques par l'introduction de l'impulsion de Dirac $\delta(t)$.
- La Transformée de Fourier $S(f)$ d'un signal $s(t)$ est une fonction à valeurs complexes définie par :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi f t} \cdot dt$$

Pour les signaux expérimentaux :

- Existence de la T.F.
- Spectre borné
(nul au-delà d'une fréquence f_s)
- Spectre symétrique
(car fonction réelle)

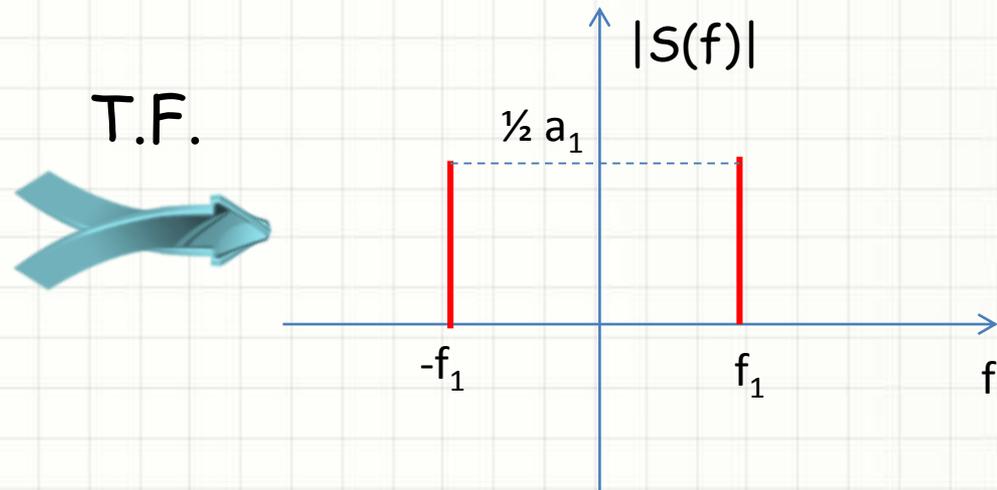
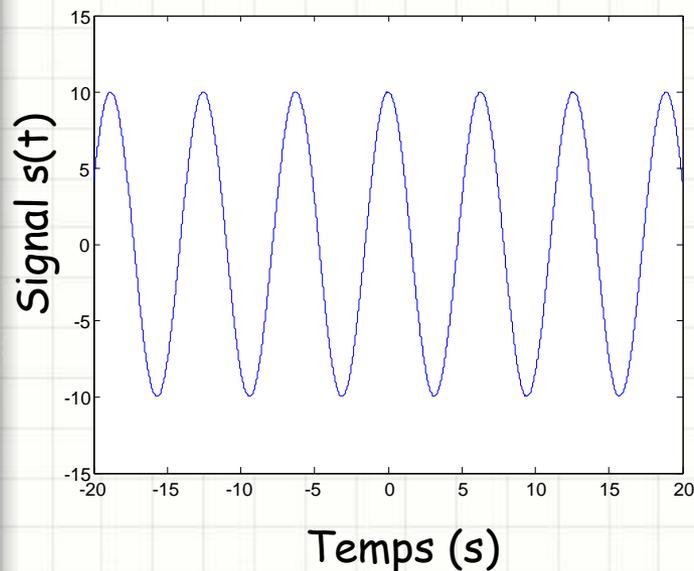


Utilisation en traitement du signal :

→ Identification, dans le signal mesuré, de phénomènes périodiques de fréquence f_i d'amplitude a_i

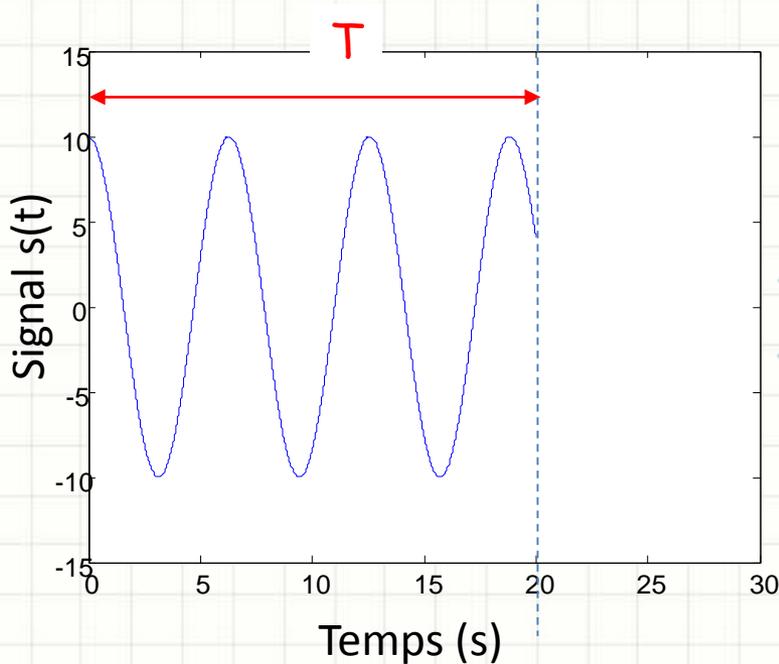
➤ Théorie

Signal de durée infinie : $s(t) = a_1 \cdot \cos(2\pi f_1 \cdot t)$

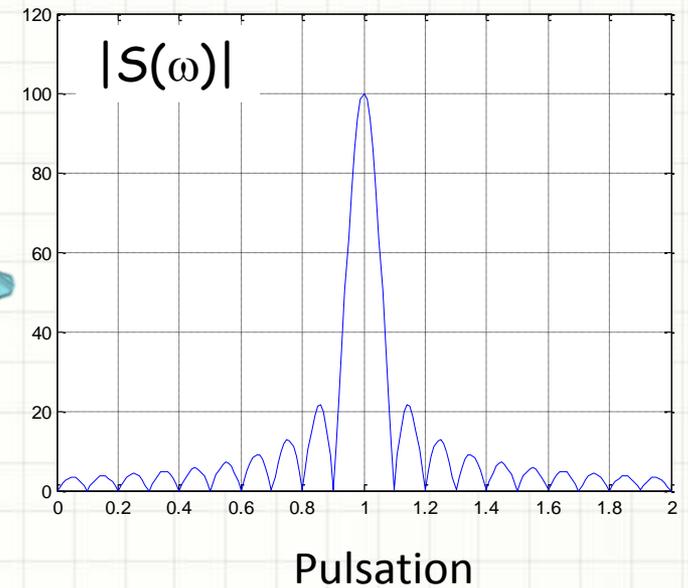


Les fréquences f_i des phénomènes harmoniques apparaissent sous la forme de pics de Dirac aux fréquences f_i et $-f_i$ avec une amplitude de $\frac{1}{2} a_i$

➤ Réalité Signal de durée finie T



T.F.
➔



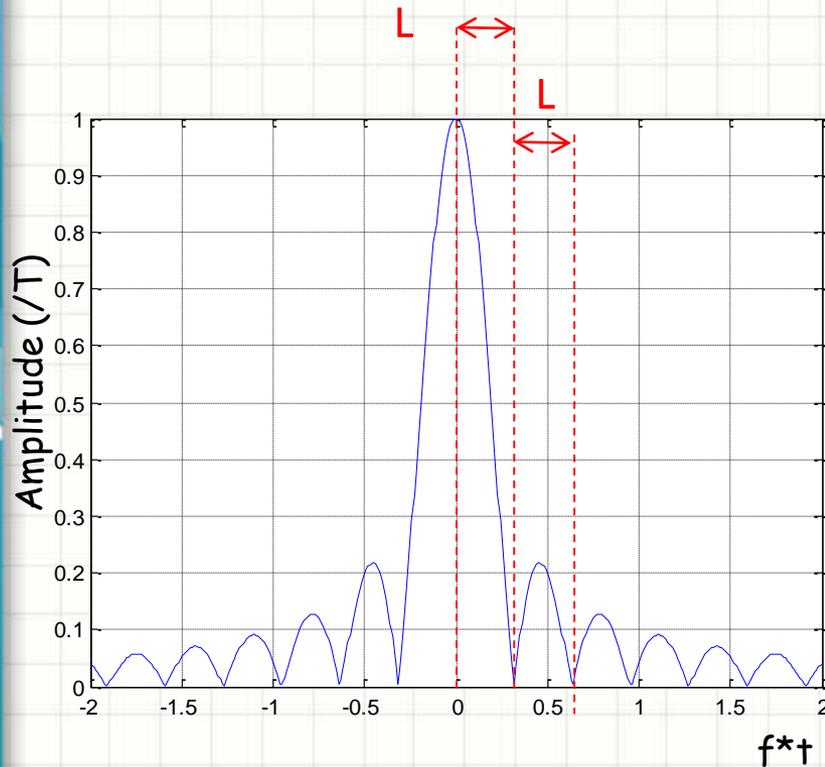
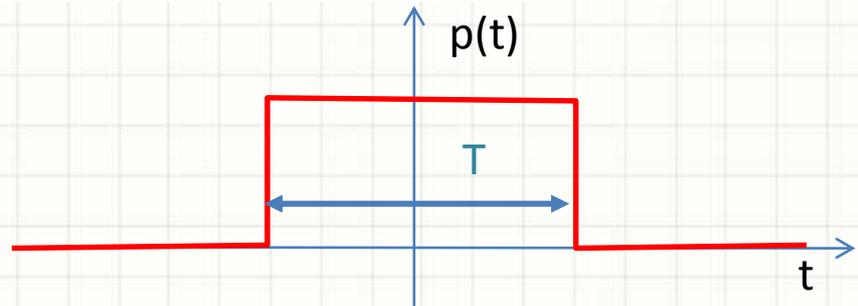
Chaque pic de Dirac δ_i du spectre théorique est remplacé par la fonction « continue » r_i

$$r_i(t) = \frac{1}{2} \cdot a_i \cdot T \cdot \text{sinc}\left(2\pi \cdot (f - f_i) \cdot \frac{T}{2}\right)$$

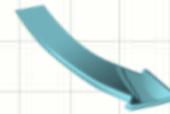
Avec $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ la fonction sinus cardinal

Rappels sur la fonction $\Pi_T(f) = T \cdot \text{sinc}(2 \cdot \pi f \cdot \frac{T}{2}) = T \cdot \text{sinc}(\pi f T)$

Il s'agit de la Transformée de Fourier de la fonction porte d'amplitude 1 et de largeur T



$L = 1/T$: $\frac{1}{2}$ largeur du lobe principal
largeur des lobes secondaires



Plus le temps de mesure T est grand plus les lobes sont étroits et rapprochés.

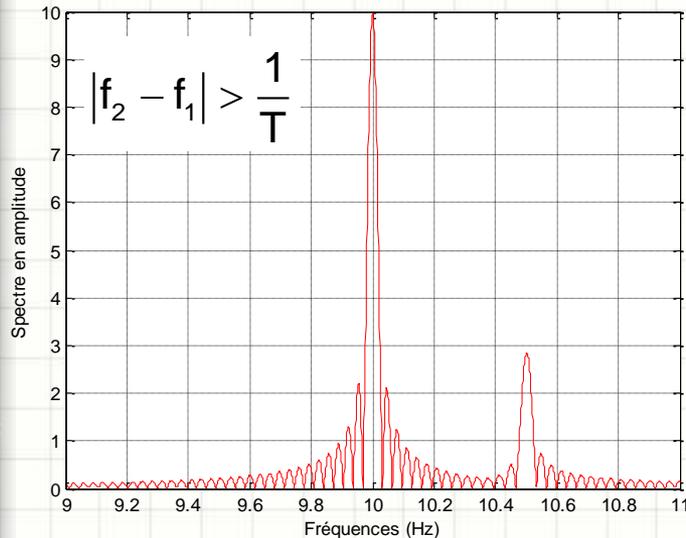


Les extrema de la fonction ne sont pas obtenus lorsque le sinus vaut 1 !

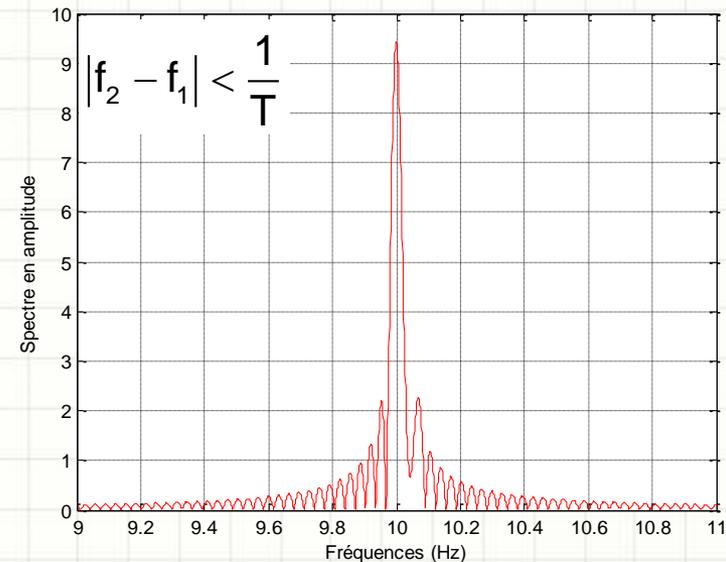
Conséquences sur la précision fréquentielle :

Soit un signal $s(t)$ observé pendant un temps $T=10s$ et contenant deux composantes harmoniques f_1 et f_2 et d'amplitude respective 2 et 0.6

$$S(f) = \frac{1}{2}.a_1.T.\text{sinc}(\pi.(f - f_1).T) + \frac{1}{2}.a_2.T.\text{sinc}(\pi.(f - f_2).T)$$



Les deux composantes apparaissent clairement mais les amplitudes peuvent être modifiées par la superposition des sinus cardinaux

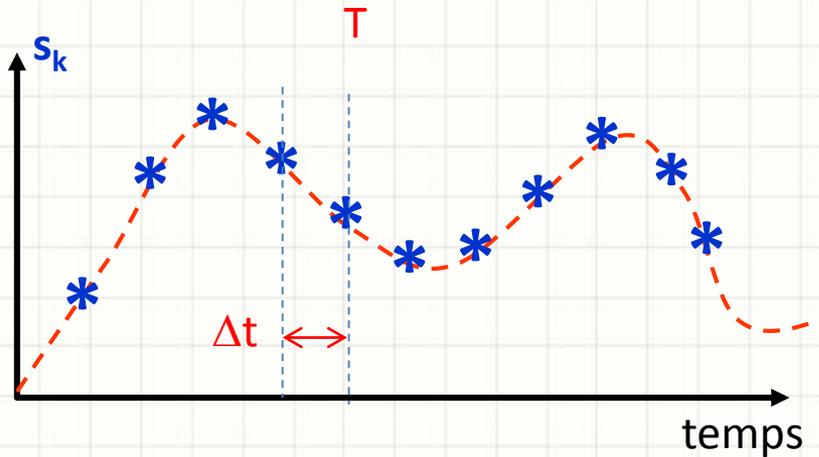


Il devient difficile de distinguer les 2 composantes

A Retenir :

la précision fréquentielle dépend directement de la durée temporelle du signal

Echantillonnage

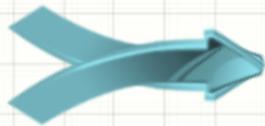


Le signal est connu/mesuré/calculé en un nombre de points N limité

$$s_k = s(t_k) = s(k \cdot \Delta t)$$

Δt est la période d'échantillonnage

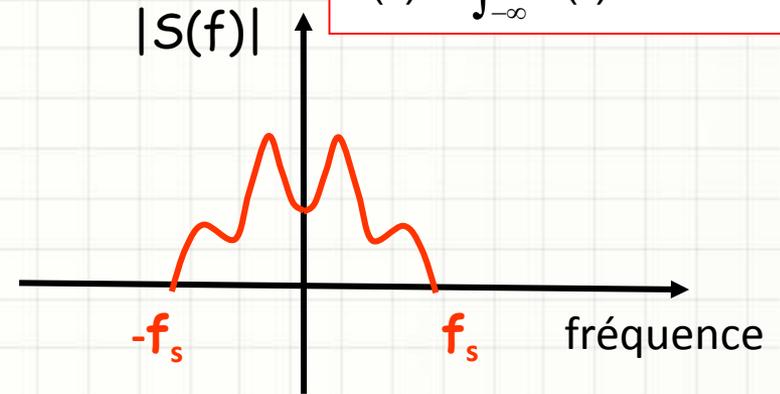
$f_e = 1/\Delta t$ est la fréquence d'échantillonnage



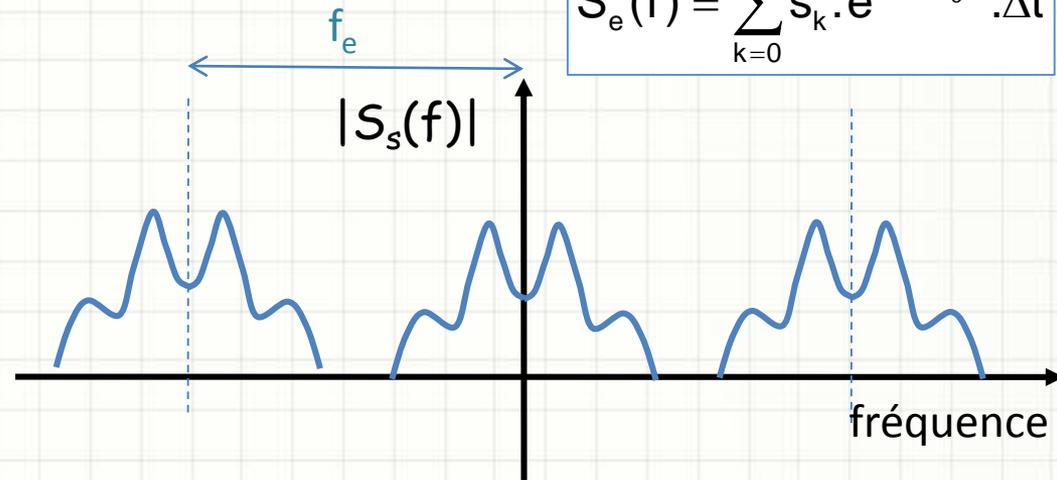
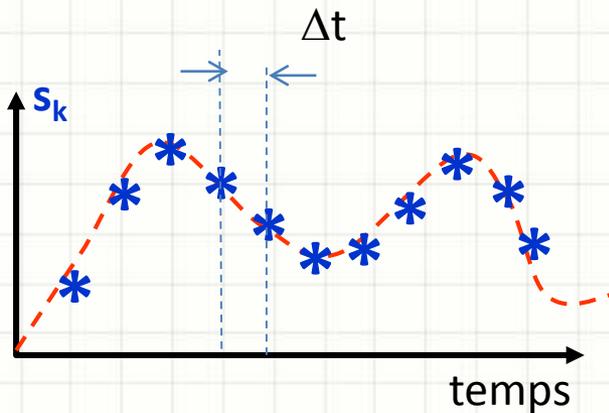
- Techniques d'acquisition
- Limiter le nombre de valeurs à mémoriser
- Traiter numériquement les données

Transformées Fourier

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi f t} \cdot dt$$



$$S_e(f) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-j \cdot 2\pi \frac{f}{f_e} k} \cdot \Delta t$$



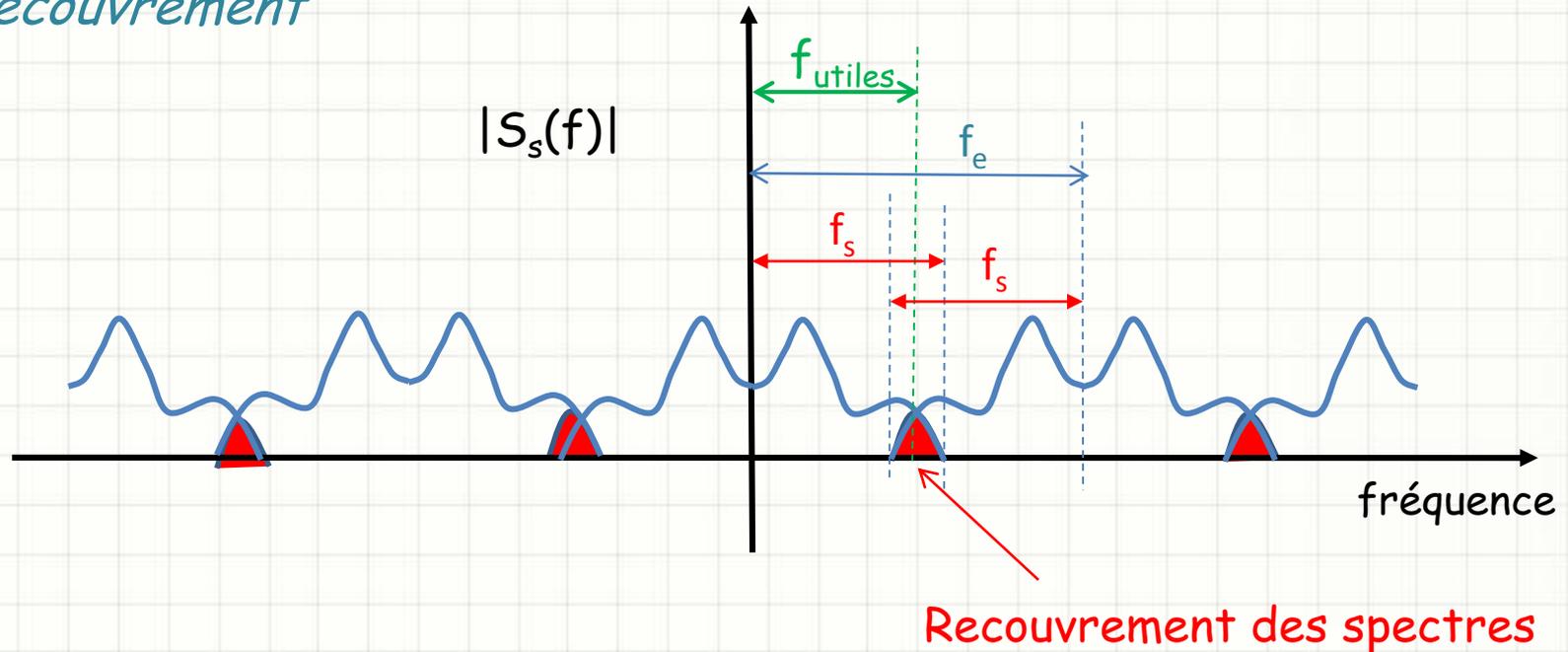
Le spectre d'une fonction échantillonnée est continu et périodique de période f_e la fréquence d'échantillonnage.

Le motif de ce spectre est le spectre de la fonction continue

Conséquences

Pour un signal réel échantillonné avec une fréquence f_e , seules les fréquences comprises entre 0 et $\frac{1}{2} f_e$ sont potentiellement porteuses d'information.

Recouvrement



Si la fréquence d'échantillonnage f_e est trop petite, les spectres périodisés se recouvrent.

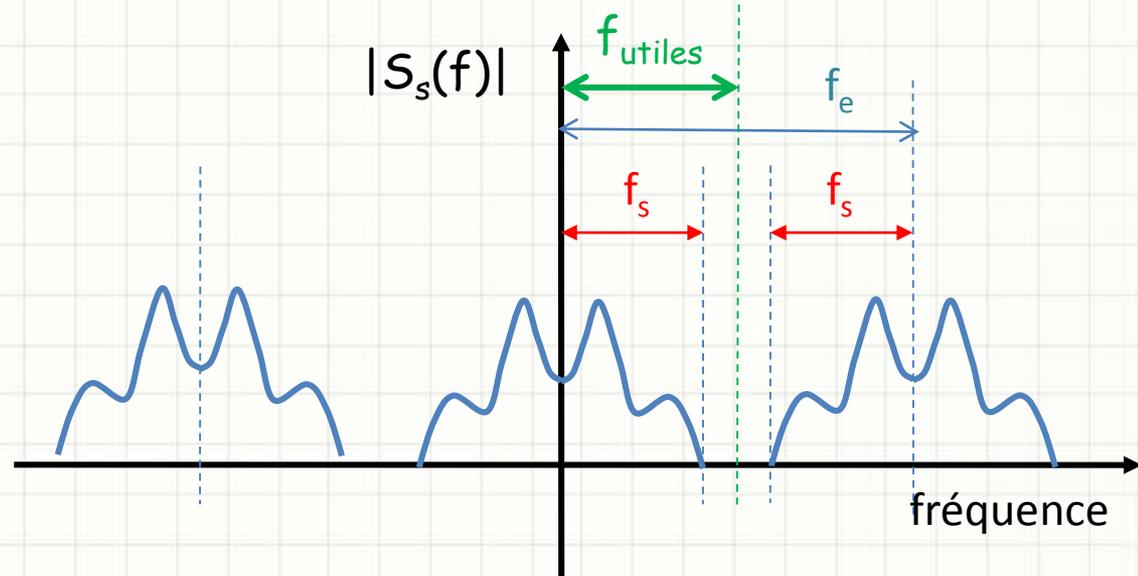
Dans la zone de recouvrement, le contenu fréquentiel n'est pas représentatif

Théorème de Shannon et corolaire

Théorème

Pour que les spectres périodisés ne se recouvrent pas on doit avoir :

$$f_e > 2.f_s$$



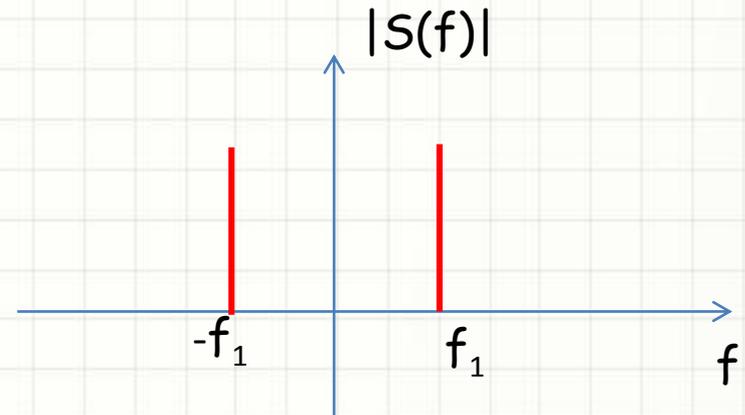
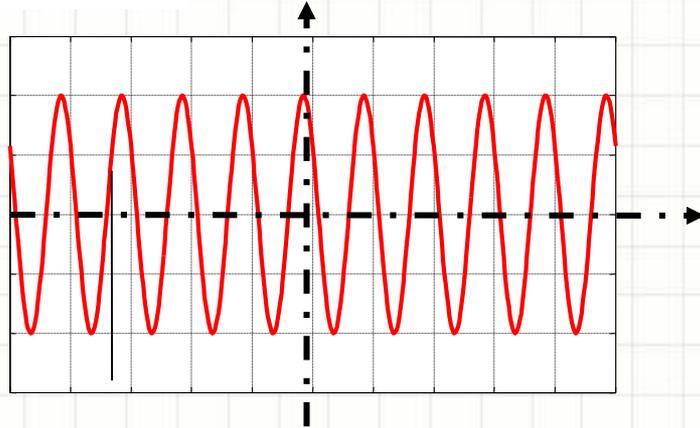
Corolaire :

Pour pouvoir identifier correctement une composante harmonique dans un signal échantillonné, il doit y avoir au moins 2 points d'échantillonnage par période.

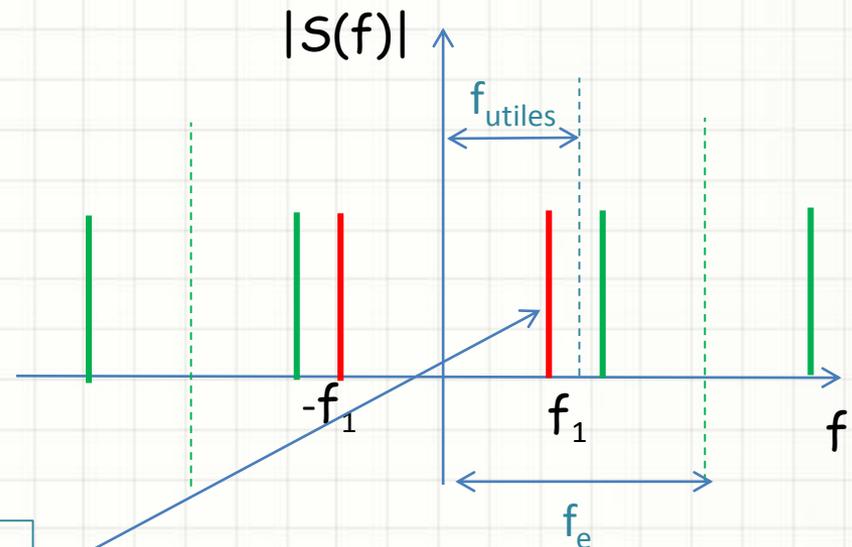
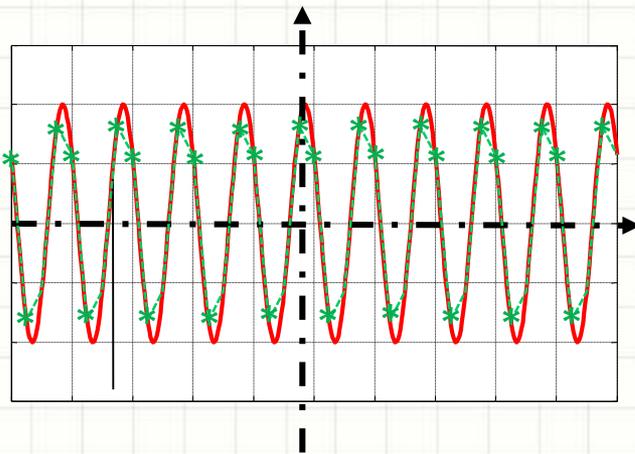
Problématique : f_s n'est pas forcément connu a priori ...

Illustration : $s(t) = \cos(2.\pi f_1.t)$

Continue

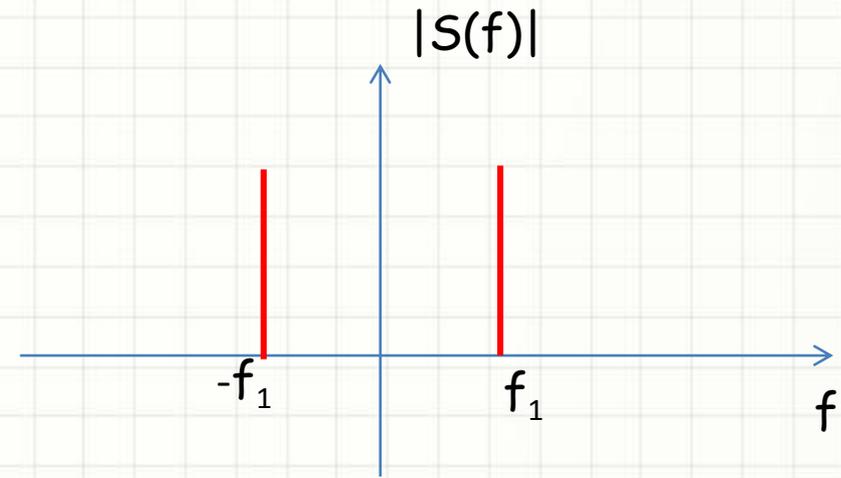
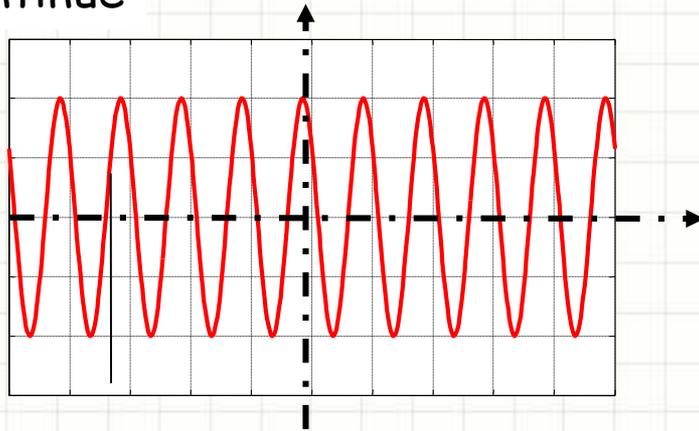


Echantillonné $f_e > 2.f_1$

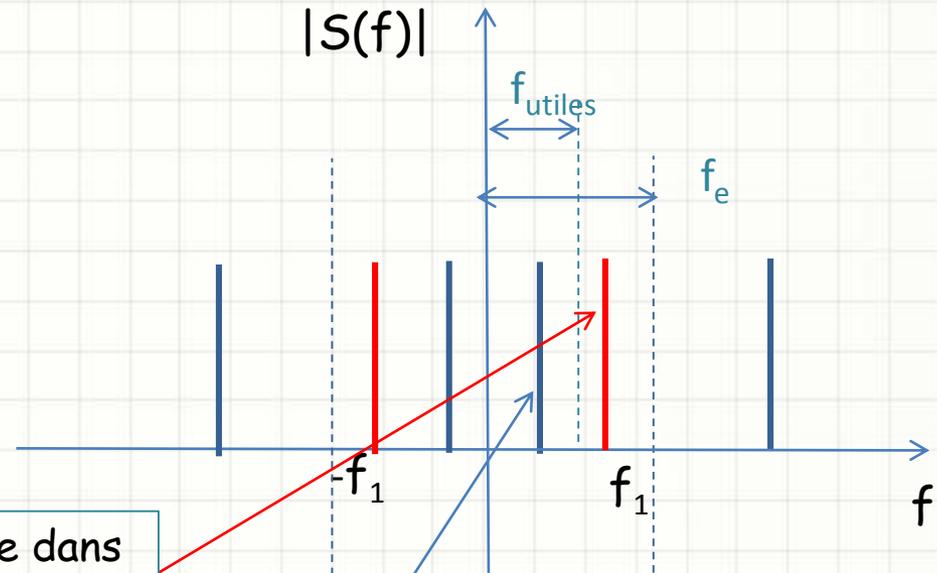
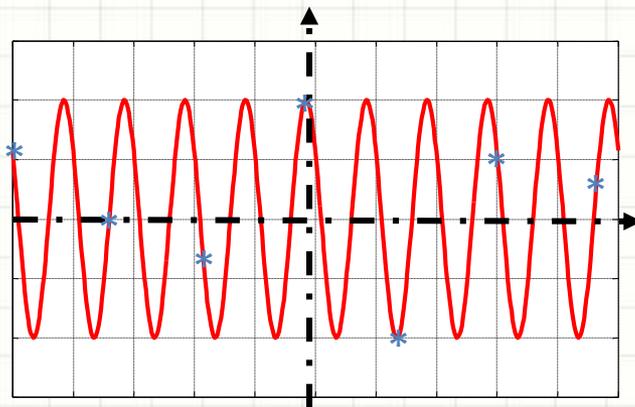


La fréquence f_1 est identifiable dans la zone des fréquences utiles

Continue



Echantillonné $f_e < 2 f_1$



La fréquence f_1 n'est pas identifiable dans la zone des fréquences utiles.

Apparition d'une fréquence fantôme à $f_e - f_1$

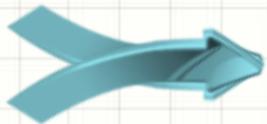
Transformées de Fourier Discrètes

Bilan

- $s(t)$ mesuré pendant T \longrightarrow • $S(f)$ connue avec une précision de $1/T$
- $s(t)$ échantillonné à la fréquence f_e \longrightarrow • $S(f)$ estimable pour $f < f_e$

Transformée de Fourier discrète

- $S(f)$ ne peut que très très rarement être calculée analytiquement
- $S(f)$ déterminer numériquement donc en un nombre de points limités



Calcul de $S(f)$ en un nombre M de points entre 0 et f_e avec un pas de $\Delta f = 1/T$

Remarque :
$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{f_e}{M-1} = \frac{1}{M-1} \cdot \frac{N-1}{T} \Rightarrow M = N$$

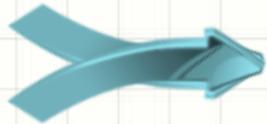
On ne peut pas avoir plus d'information en fréquence qu'en temps

Soit $f_m = m \cdot \Delta f$

$$S_e(f_m) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-j \cdot 2\pi \frac{m \Delta f}{f_e} k} \cdot \Delta t$$

Or $\frac{m \cdot \Delta f}{f_e} k = \frac{m \cdot \frac{1}{T}}{\frac{1}{T}} k = \frac{m}{N} k$

$$S_e(f_m) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-j \cdot 2\pi \frac{m}{N} k} \cdot \Delta t$$



$$S_D(f_m) = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \cdot e^{-j \cdot 2\pi \frac{m}{N} k}$$

Transformée de Fourier Discrète



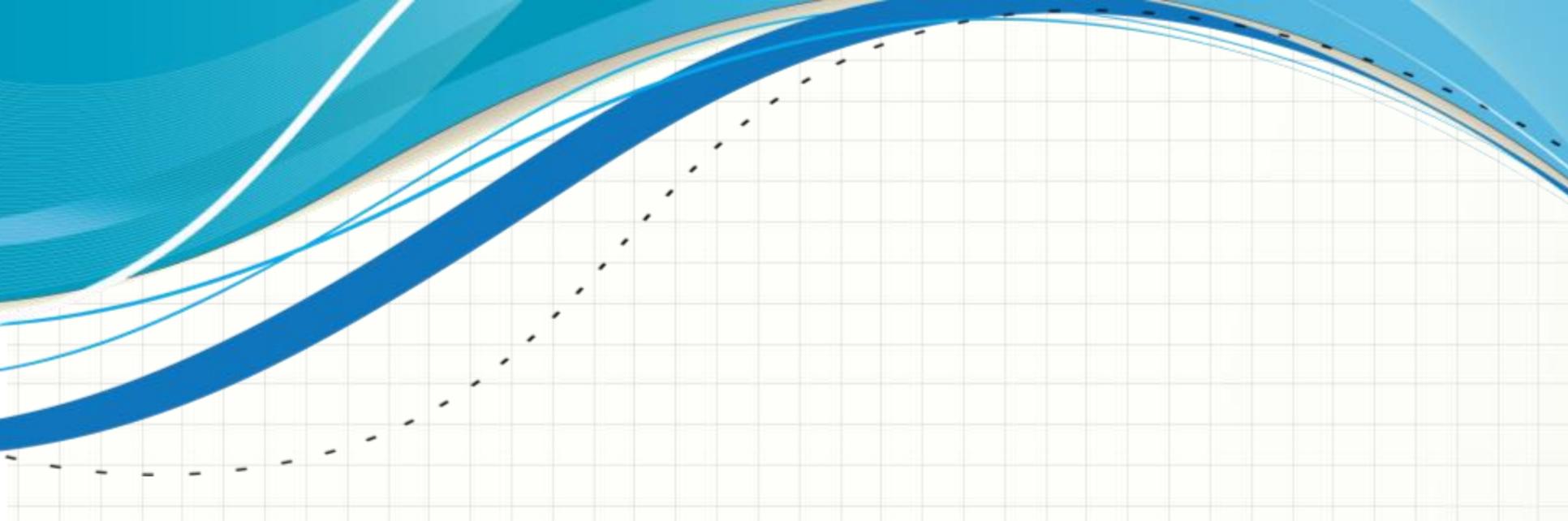
$$S_e(f_m) = S_D(f_m) \cdot \Delta t$$

Algorithme

Algorithme spécifique FFT : Fast Fourier Transform

Complexité en $N \cdot \log(N)$ au lieu de N^2

Très performant quand N est une puissance de 2 : $N = 2^n$

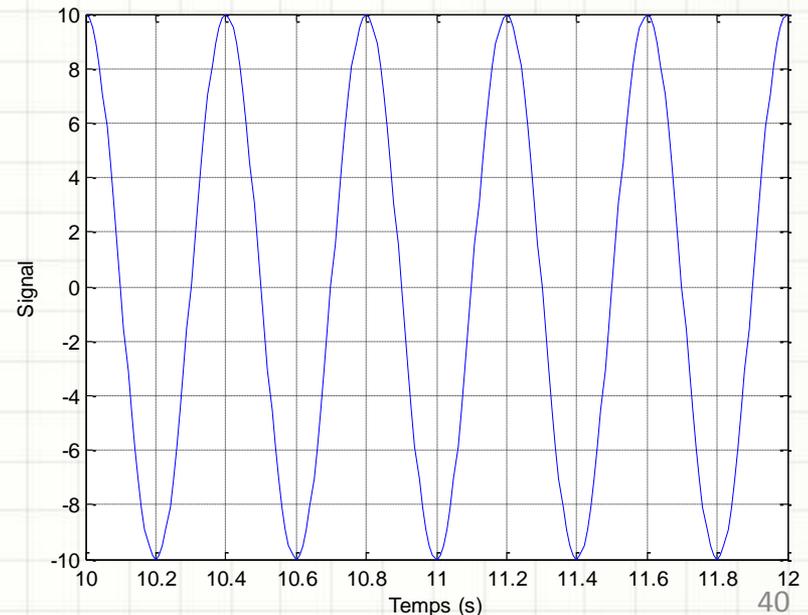


Mise en œuvre sous Matlab

Fonction FFT

```
%  
% Exemple utilisation de la fonction FFT  
%  
% Cours MESCM - Mars 2014  
% A. Bourdon  
%  
clc  
%  
% ---- Definition du signal s(t)=a.cos(2*pi*fs*t)  
fs=2.5;  
a=10;  
%  
% ---- Simulation de la mesure  
n=12;  
N=2^n; % Nb de point de mesure  
fe=100; % frequence d'échantillonnage  
%  
dt=1/fe;  
T=(N-1)*dt; % Durée de l'acquisition  
%  
Te=[0:N-1]*dt; % temps d'acquisition  
%
```

```
% ---- Signal mesure  
s=a*cos(2*pi*fs*Te);  
%  
figure  
plot(Te,s);  
grid on  
xlabel('Temps (s)');  
ylabel('Signal');  
set(gca,'xlim',[10 12])
```



```
%% ---- Calcul de la FFT
```

```
S=fft(s)/N;
```

```
%
```

```
dfe=1/T; % pas d'échantillonnage
```

```
Fe=[0:N-1]*dfe;
```

```
%
```

```
figure
```

```
plot(Fe(1:N/2),2*abs(S(1:N/2)))
```

```
grid on
```

```
xlabel('Frequence (Hz)');
```

```
ylabel('Amplitude ');
```

```
title('Amplitude spectre en fréquences')
```

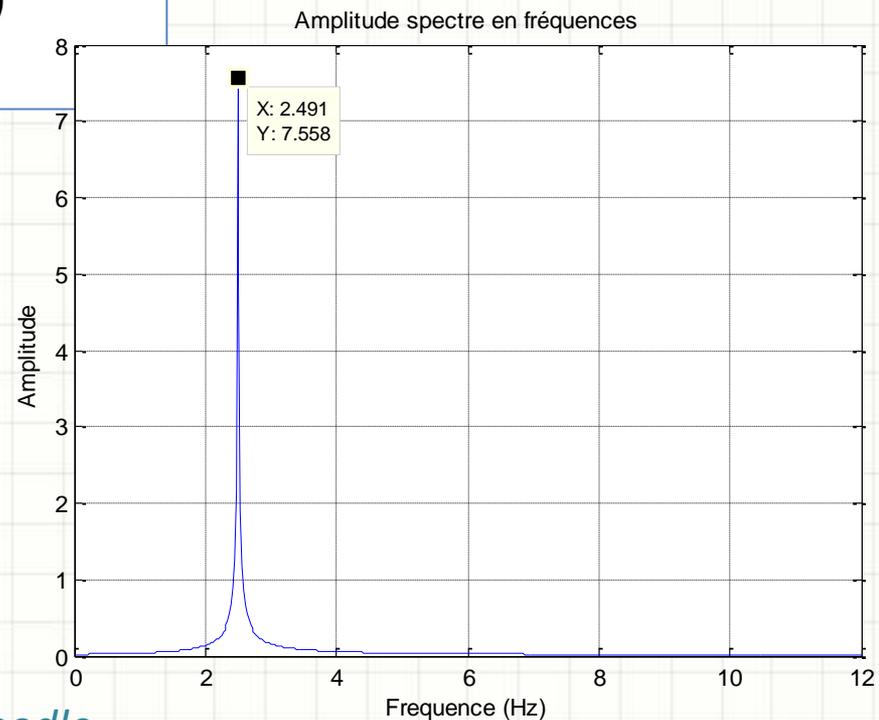
```
set(gca,'xlim',[0 12])
```

$$\frac{dt}{T} = \frac{dt}{N}$$

La fonction **fft** calcule le spectre pour les fréquences positives.

La fonction **fftshift** permet d'avoir le spectre centré en 0.

On multiplie par 2 et on ne représente que la moitié du spectre



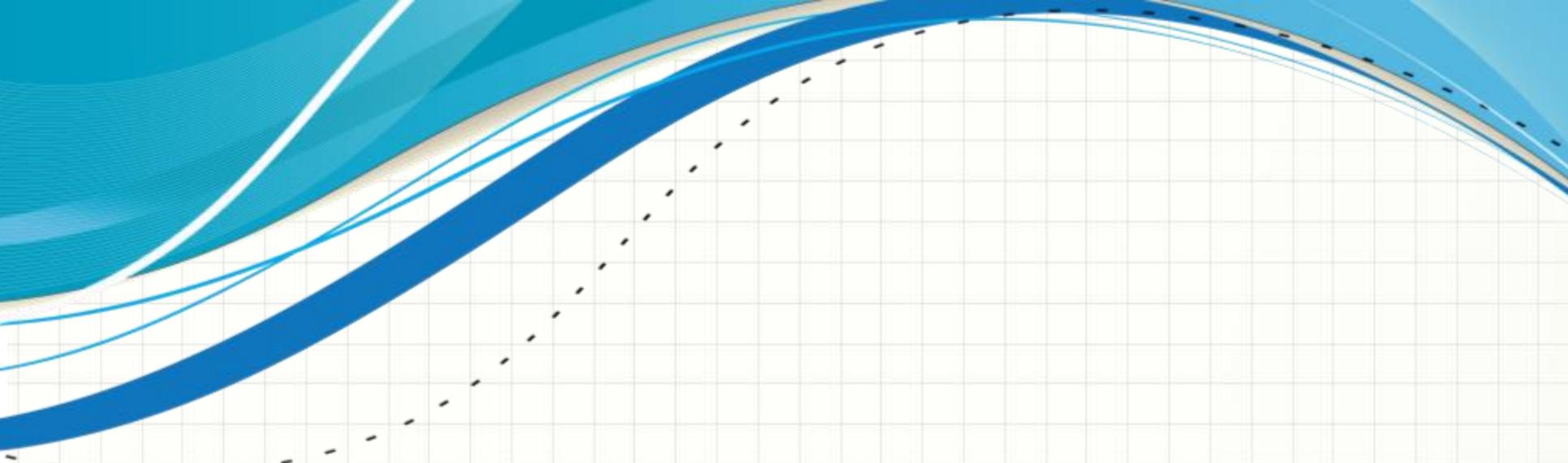
Pour s'échauffer

A partir de l'exemple précédent :



- tracer sa FFT en amplitude, partie réelle, partie imaginaire
- visualiser les effets de périodisation
- mettre en évidence l'influence de df et n sur les résultats
- régler les caractéristiques de la « mesure » pour que f_s soit exactement une fréquence calculée
- en ajoutant une seconde composante harmonique, mettre en évidence le repliement

- et mettez en évidence tous les autres phénomènes que vous jugez intéressants

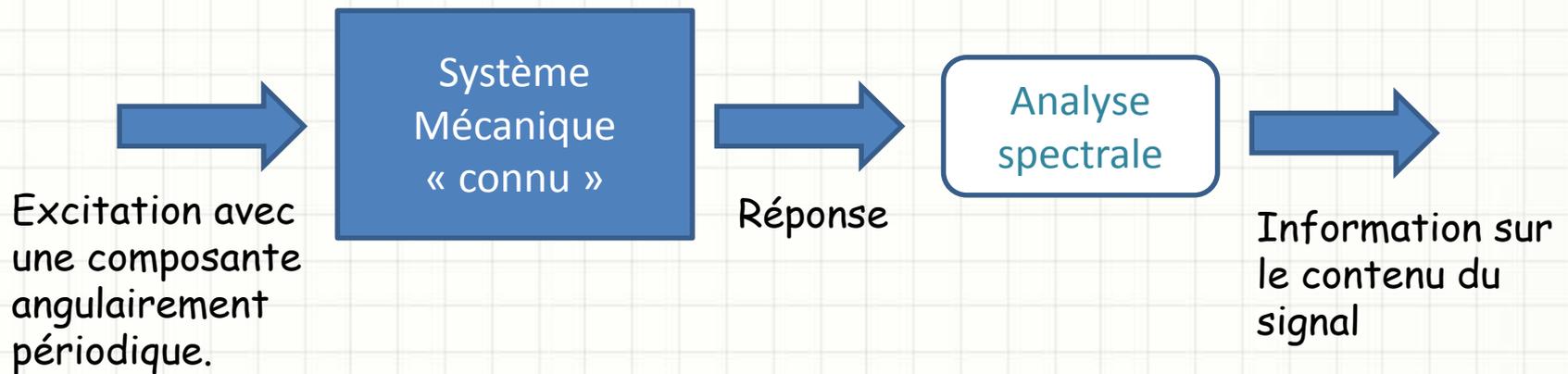


Transformées de Fourier et détection de défaut

- Echantillonnage en temps et vitesse constante
- Echantillonnage en temps et vitesse variable

Principes

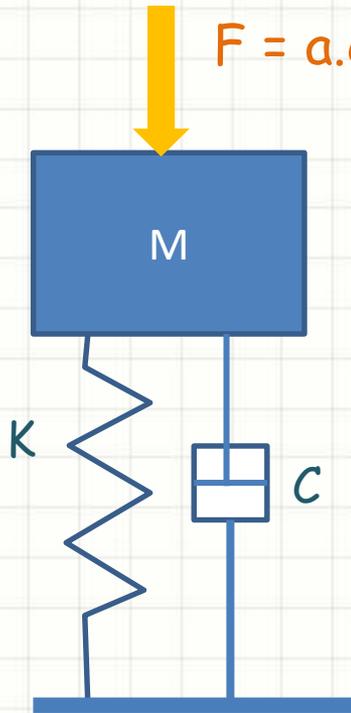
Générer un signal dont on connaît les composantes et l'analyser à l'aide de TF



Remarque :

Avant d'utiliser de nouveaux outils il est toujours nécessaire de les tester et de les valider sur des exemples maîtrisés d'où l'utilité des modèles numériques.

Systeme considéré : un grand classique



$$F = a.\cos(\mu.\theta)$$

Signal à analyser : accélération γ de la masse

μ : fréquence angulaire de l'excitation relatif à l'élément tournant à la vitesse

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Exemples :

- vibrations du bâti d'un système avec des pales en rotation (éolienne, hélicoptère ...)
- Vibrations du carter en présence de défaut de roulement ...

Remarque :

dans la réalité l'excitation angulairement périodique aura des composantes aux différentes harmoniques de μ . On y viendra plus tard.

Construction du modèle Matlab

$$M.\ddot{x} + C.\dot{x} + K.x = F$$



Mise sous forme de modèle d'état

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \longrightarrow \{\dot{Q}\} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{C}{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} .F \longrightarrow \boxed{\{\dot{Q}\} = [A].\{Q\} + \{B\}.F}$$

Etape 1 : Réglage des paramètres `mon_modele.m*`



Choisissez vos paramètres K , M et C

Construisez la matrice $[A]$ et le vecteur $\{B\}$

Régler l'amortissement C pour que l'amortissement modal soit voisin de 3%.

Déterminer la fréquence propre f_0 de votre système

* Les variables K , M , C , A , B , f_0 seront placées en variables globales

Rappels :

- $[\text{Vec Lamb}] = \text{eig}(A)$ permet d'obtenir les vecteurs et valeurs propres de la matrice $[A]$
- Les pulsations propres du système non amorti K, M sont les modules des valeurs propres de $[A]$
- L'amortissement modal associé à la pulsation w_i se calcule par
$$\alpha_i = -\text{reel}(\lambda_i) / |\lambda_i|$$

Mémo des valeurs choisies :

M =

K =

C =

α =

f_0 =

Etape 2 : Simulation et visualisation du signal $\gamma(t)$

On doit résoudre $\{\dot{Q}\} = [A].\{Q\} + \{B\}.a.\cos(\mu.\theta)$ avec $\frac{d\theta}{dt} = \omega(t)$ connue

On va modifier le système différentiel à résoudre :

On pose $\{R\} = \begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \theta \end{Bmatrix} \rightarrow \{\dot{R}\} = \begin{bmatrix} [A] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \{R\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M}.a.\cos(\mu.R(3)) \\ \omega(t) \end{Bmatrix}$

On définit la fonction matlab associée : [sys_diff.m](#)

```
function dR=sys_diff(t,R)
%
global A B
global mu a
%
F=a*cos(mu*R(3)); % effort exciteur
%
dR(1:2,1)=A*R(1:2,1)+F*B;
dR(3)=omega(t);
```

L'ordre des variables d'entrées est imposé par matlab (Cf. cours B2I)

θ

La fonction omega définit la loi en vitesse choisie

On définit le script Matlab permettant la résolution : `resol.m`

```
global A B M K C
global a mu
%
clc
%
% ---- Definition du modele
mon_modele
%
% ---- Definition des caracteristiques
%   de l'effort
a=***;
mu=***;
%
% ---- Initialisation résolution
R0=zeros(3,1); % Conditions initiales
T=***; % durée de calcul (s)
%
% ---- Resolution
[T R]=ode45(@sys_diff,[0 T],R0);
%
```

```
% ---- Calcul de l'acceleration
%   gamma=1/M*(-C*x'-K*x+F(theta)
gamma=1/M*(-C*R(:,2)-
K*R(:,1)+a*cos(mu*R(:,3)));
%
figure
plot(T,gamma)
grid on
xlabel('Temps en seconde')
ylabel('Accélération m/s/s')
```



Les fonctions de résolution sous Matlab se font à pas de temps variable, il faudra donc ré-échantillonner le signal avant de calculer sa FFT

*** : valeur à définir

Etape 3 : ré-échantillonnage et calcul de spectre

spectre.m

```
global A B M K C
global a mu
%
% --- Definition de la zone de calcul FFT
(suppression transitoire)
tmin=***; % fin du transitoire
ind=find(T>tmin);
%
Tu=T(ind);
Tu=Tu-Tu(1);
gammaU=gamma(ind);
%
% --- Caractéristiques échantillonnage
Tmax=max(Tu); % duree mesure
n=1***;
N=2^n; % nb point de mesure
dt=Tmax/(N-1); % periode d'echantillonnage
%
Te=[0:N-1]*dt; % temps d'échantillonnage
%
```

```
% --- Reechantillonnage du signal gamma
% au temps Te
gammaE=interp1(Tu,gammaU,Te);
%
% ---- Calcul et visualisation FFT
Gamma=fft(gammaE)/N;
%
dfe=1/Tmax; % pas d'échantillonnage
Fe=[0:N-1]*dfe;
%
figure
plot(Fe(1:N/2),2*abs(Gamma(1:N/2)))
grid on
xlabel('Frequence (Hz)');
ylabel('Amplitude ');
title('Amplitude spectre en fréquences')
```

*** : valeur à définir

Régime permanent

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 = \text{cste}$$

```
function w=omega(t);  
%  
% ---- Vitesse constante  
w=***;
```



Pour différentes valeurs de ω_0 :

- Déterminez l'accélération γ de la masse de manière échantillonnée
- Calculez et tracez son spectre en fréquences
- Analysez et commentez vos résultats

Régime non permanent

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + dw * t$$

function $w = \omega(t)$;
%
% ---- Vitesse constante
 $w = \omega_0 + dw * t$;



Pour différentes valeurs de ω_0 et de dw :

- Déterminez l'accélération γ de la masse de manière échantillonnée
- Calculez et tracez son spectre en fréquence
- Analysez et commentez vos résultats
- Testez d'autres régimes de fonctionnement