

# Au delà du compas

## *La géométrie des courbes*

par Franco Conti et Enrico Giusti

### 1. Aux origines de la géométrie

Les premières lignes qui se présentent à l'imagination de l'homme sont la droite et le cercle. Avec ces lignes prend naissance la *géométrie*; ce mot qui signifie littéralement *mesure de la Terre*, indique clairement dans quel but ces lignes ont été définies et étudiées. Les premiers géomètres de l'Antiquité sont les arpenteurs de l'Égypte ancienne; les Grecs les appelaient *arpèdonaptes*, c'est-à-dire noueurs de cordes. En tirant des cordes, les géomètres égyptiens pouvaient tracer sur le terrain des droites et des cercles; il reste une trace de cette méthode dans plusieurs langues modernes, avec l'expression "tirer une droite". L'usage des cordes pour des opérations sur le terrain a subsisté pendant plusieurs siècles, et on le retrouve dans le travail des arpenteurs jusqu'à une époque relativement récente.

### 2. La géométrie devient système.

La géométrie d'Euclide commence avec la formalisation des opérations des arpenteurs : tracer une droite, décrire un cercle. Le lieu de la géométrie se déplace du terrain à la table sur laquelle le mathématicien trace ses diagrammes, puis de la table au papier et au livre. Les instruments des constructions changent aussi: ce qu'on obtenait à grand échelle en tendant des cordes est dessiné à petite échelle avec la règle et le compas; les lignes, réglées par un système complexe de définitions et d'axiomes, deviennent des objets abstraits. La réduction d'échelle qui s'ensuit, éloigne le géomètre du terrain et lui permet de maîtriser dans leur complexité des problèmes qui, par leur extension, échappaient au regard de l'arpenteur.

### 3. Tracer des droites et des cercles.

Aux origines de la géométrie, les droites et les cercles étaient tracés au moyen de cordes tendues. Pour obtenir un segment de droite, on suit une corde tendue entre deux supports; pour tracer un arc de cercle, on fixe une des extrémités de la corde et on fait tourner autour d'elle l'autre extrémité. Avec une même corde les résultats sont très différents: il est facile de tracer ainsi un bon cercle, mais il n'en va pas de même pour une droite. On se heurte aux mêmes difficultés en utilisant d'autres instruments. Pour obtenir des cercles presque parfaits, un compas très simple suffira. Au contraire, la droite qu'on obtient à l'aide d'une règle dépend de la précision de celle-ci; on tombe dans un cercle vicieux: pour tracer une droite, il en faut déjà une, la règle. Cette disparité se fait sentir dans le dessin technique, où la difficulté de tracer une droite correcte affecte la précision du dessin. D'où la nécessité de limiter le plus possible, voire même d'éliminer totalement, l'usage de la règle, au profit du compas.

### 4. Courbes et machines.

Pour tracer des droites et des cercles sur une feuille de papier, la règle et le compas sont les instruments les plus simples, mais ce ne sont pas les seuls. En effet, on peut construire d'autres instruments pour tracer des droites ou courbes plus compliquées.

L'intérêt de ces instruments ne vient pas tant à leur applications au dessin qu'à leur capacité à faire se déplacer un point selon la courbe prévue, sans que le profil de celle-ci soit matériellement présent.

## 5. Les sections coniques.

Lorsqu'on éclaire une paroi avec une torche électrique, la forme de la surface éclairée varie avec l'inclinaison de la torche. Si la torche est perpendiculaire à la paroi, on obtient un disque. Quand on commence à incliner la torche, le disque se transforme en une ellipse toujours plus allongée jusqu'au moment où l'une des génératrices du cône de lumière est parallèle à la paroi. A ce moment, l'ellipse devient une parabole. Il suffit de tourner encore un peu la torche: voici une hyperbole.

Ces trois courbes s'appellent sections coniques, en effet elles apparaissent comme des sections d'un cône (le cône de lumière) avec un plan (de la paroi).

## 6. Les foyers

Dans l'ellipse, il y a deux points, appelés *foyers*, qui présentent des propriétés très intéressantes. La première de ces propriétés est que la somme des distances d'un point quelconque d'une ellipse à ses foyers est constante. Cette propriété permet de tracer une ellipse de manière approximative, mais satisfaisante, par exemple lorsqu'on veut dessiner des parterres fleuris de forme elliptique, cette méthode s'appelle la "*méthode du jardinier*". Dans une hyperbole, c'est la différence de la distance aux foyers qui reste constante. Dans le cas du cercle, les deux foyers se confondent au centre de celui-ci. Au fur et à mesure que l'ellipse s'allonge, les deux foyers s'éloignent.

Dans le cas de la parabole il n'y a qu'un seul foyer : l'autre s'est déplacé pour ainsi dire à l'infini.

## 7. Réflexion sur une section conique

Une deuxième propriété des foyers de l'ellipse consiste dans le fait qu'un rayon émis par un foyer et qui se réfléchit sur la paroi interne passe par l'autre foyer. D'autre part, lorsqu'un rayon, dirigé de l'extérieur vers un des foyers, est réfléchi par la paroi externe de l'ellipse, il semble provenir de l'autre foyer. De même, si un rayon émis à l'un des foyers, se réfléchit sur la partie interne d'une hyperbole, il semble provenir de l'autre foyer. Dans le cas de la parabole, on peut dire qu'un des foyers s'est éloigné vers l'infini. Les rayons qui en proviennent sont donc parallèles à l'axe; ils se réfléchissent sur la paroi parabolique en se concentrant sur son unique foyer.

## 8. Les sections coniques dans la révolution scientifique

Au cours du XVII<sup>ème</sup> siècle une série de problèmes qui avaient préoccupé les savants depuis l'antiquité trouvent une solution. Galilée ouvre la route à la cinématique moderne, en démontrant que la trajectoire d'un projectile est une parabole. Kepler découvre que les orbites des planètes ne sont pas circulaires mais elliptiques, et il énonce les lois qui portent son nom. Cinquante ans plus tard, Newton démontrera ces lois grâce à la théorie de la gravitation universelle. Ces lois s'appliquent aussi aux comètes, jusqu'alors considérées comme de mauvais présages. Le retour de la comète de Halley, en 1758, confirme définitivement cette nouvelle conception de l'univers.

## 9. Courbes et équations

Dans l'étude de courbes plus générales que les sections coniques, un pas décisif est franchi avec l'introduction des *coordonnées cartésiennes*. Tout point du plan peut être repéré grâce à ses coordonnées  $x$  et  $y$ , qui représentent ses distances à deux droites perpendiculaires, les *axes cartésiens*.

Si l'on fait varier librement les coordonnées  $x$  et  $y$ , le point correspondant décrit tout le plan. Mais si ses coordonnées sont liées par une équation, le point ne peut plus aller où bon lui semble, et il est obligé de

suivre une courbe. Ainsi, par exemple, l'équation  $y = 1 + x$  décrit une droite,  $x^2 + y^2 = 1$  est l'équation d'un cercle,  $y = x^2$  est l'équation d'une parabole.

En général, une équation  $F(x, y) = 0$  définit une courbe, dont on peut trouver les points en fixant la valeur d'une des deux coordonnées, par exemple  $y$ , et en résolvant l'équation avec une seule variable, dans ce cas  $x$ . A l'inverse, on peut résoudre les équations en recourant à l'intersection de deux courbes.

Par exemple, l'équation  $x^3 + 2x^2 = 1$  peut être résolue en coupant la parabole  $y = x^2$  avec l'hyperbole  $xy + 2y = 1$ .

## 10. Courbes transcendantes

Parmi les droites qui passent par un point d'une courbe, il y en a une qui suit l'allure de la courbe mieux que les autres; cette droite est la meilleure approximation de la courbe autour de ce point et elle s'appelle la *tangente* à la courbe au point donné.

Le calcul différentiel, inventé par Leibniz et Newton, a permis de déterminer la tangente à une courbe. Inversement, en partant de la relation entre les coordonnées de chacun des points de la courbe et la pente de sa tangente, on peut remonter à l'équation de la courbe en résolvant une équation différentielle.

Les équations différentielles interviennent dans la formulation d'un grand nombre de problèmes scientifiques, particulièrement en géométrie et en physique. La solution de équations différentielles fait apparaître un nouvel ensemble de courbes : les *courbes transcendantes*.

## 11. Enveloppes

Les miroirs et les lentilles concentrent rarement, dans des circonstances exceptionnelles les rayons de lumière en un seul point. Cela ne signifie pas que les rayons réfléchis par un miroir se distribuent uniformément; au contraire ils se concentrent le plus souvent le long d'une courbe, dite *caustique*, et qui est leur *enveloppe*.

L'enveloppe la plus simple est l'enveloppe constituée par les tangentes à une courbe; il arrive cependant qu'on se trouve en présence d'une enveloppe de paraboles, de cercles, ou même d'une enveloppe de courbes plus complexes.

## 12. Courbes de diamètre constant

Un cercle qui roule sur une droite reste toujours dans la bande de plan comprise entre la droite et la parallèle à celle-ci située à une distance égale au diamètre du cercle. En se déplaçant, le cercle reste toujours en contact avec les deux droites: le cercle décrit une figure d'épaisseur constante.

A première vue, il semble étrange qu'il y ait d'autres courbes dotées de la même propriété; or on peut en dessiner autant qu'on en veut.

## 13. La courbure

Toutes les courbes sont courbes, mais certaines le sont plus que d'autres. Par exemple, un petit cercle est plus courbe qu'un grand cercle; le rayon, ou mieux l'inverse du rayon peut être pris comme la mesure de la courbure d'un cercle.

Le cercle est la seule courbe plane avec une courbure constante; dans les autres courbes, la courbure change de point en point.

Pour mesurer la courbure d'une courbe en un point, on cherche parmi tous les cercles qui passent par ce point, celui qui est la meilleure approximation de la courbe: le *cercle osculateur*. Les centres des cercles osculateurs sont situés sur une courbe qui s'appelle la *développée* de la première courbe. La développée d'une courbe est l'enveloppe de droites normales à la courbe donnée.

Réciproquement, la première courbe est la *développante* de la deuxième. La développante peut être obtenue en collant un fil le long de la développée, et en le détachant, tout en gardant bien tendue la partie détachée. L'extrémité du fil décrira ainsi la développante.

#### 14. Le chemin le plus court

Pour traverser une place, on la coupe directement en ligne droite, quand on peut, car on sait que le chemin le plus court entre deux points est une droite.

Mais pour aller de Rome à New York, la ligne droite ne convient plus, car dans ce cas la courbure de la terre se fait sentir et il est impossible de suivre une ligne droite. Quelle est donc la ligne la plus intéressante pour se déplacer d'un point à un autre sur une surface?

Celle qui, parmi toutes les courbes qui relient les deux points tout en restant à la surface a la longueur la plus courte. Une telle courbe s'appelle *géodésique*.

S'il s'agit une surface convexe, une sphère par exemple, la géodésique entre deux points peut être trouvée une fois encore en tirant un fil.

#### 15. Longueur et dimension

La notion intuitive de dimension nous dit qu'un corps a trois dimensions, qu'une surface en a deux et qu'une courbe n'en a qu'une. Et il en va bien ainsi: une courbe qui peut être *rectifiée*, c'est-à-dire transformée en une droite sans que sa longueur s'en trouve modifiée, est, comme la droite, à une dimension.

Peut-on vraiment toujours "rectifier" une courbe? Tout dépend de ce qu'on entend par courbe. En prenant ce terme dans son acception la plus large, on peut avoir des surprises, comme la célèbre *courbe de Péano*, découverte (ou inventée) par le mathématicien piémontais G.Péano (1858-1932); cette courbe recouvre un carré.

#### 16. Quelle est la longueur d'une côte?

Cela dépend, par exemple, de la méthode adoptée pour la mesurer. Si on travaille sur une carte géographique, avec un module de 5 kilomètres à l'échelle de celle-ci, on obtient une première valeur; si on prend une carte géographique plus grande, avec un module d'un kilomètre ou de 500 mètres, on obtient une valeur plus grande, et probablement plus précise, pour la longueur de la côte.

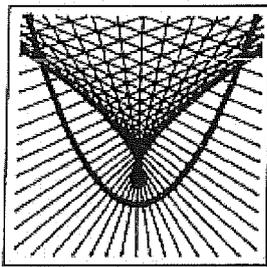
Si on va directement sur le terrain avec un module de 10 mètres, ou d'un mètre, la mesure sera encore plus précise.

Mais que dire si, à mesure qu'on raccourcit le module, la longueur devient toujours plus grande, dépassant toute limite? Peut-on penser que la longueur est infinie?

C'est en effet ce qui semble se passer dans de nombreux cas. Naturellement, on ne peut *démontrer* que la longueur est effectivement infinie; comme on ne peut utiliser de modules trop petits, dans la pratique, on peut seulement dire qu'une côte se comporte "comme si" elle avait longueur infinie. On peut toutefois construire des figures dont le bord a une longueur infinie et une dimension supérieure à un: ce sont *les fractales*.

## AU DELÀ DU COMPAS

La géométrie des courbes



## La géométrie du compas

Le résultat fondamental de la *Géométrie du compas* peut être énoncé très simplement: toutes les constructions réalisables avec la règle et le compas peuvent se faire en utilisant le compas seul.

Cette phrase demande à être précisée, car elle ne doit pas être prise au pied de la lettre: en effet, avec la règle on peut tracer une droite, ce qu'on ne peut pas faire avec le seul compas. Par conséquent, il faut faire une réserve: avec le seul compas, on peut faire tout ce qu'on peut faire avec la règle, excepté tracer des droites.

Que peut-on faire avec la règle et le compas? En premier lieu, on peut tracer des droites et des cercles; plus précisément, on peut tracer la droite passant par deux points, et on peut dessiner un cercle de rayon donné, et dont le centre se trouve en un point donné. N'ayant pas le droit d'utiliser la règle, on renonce à la première de ces opérations, tandis qu'on réalise la deuxième à l'aide du compas.

En effet, les droites et les cercles ne constituent pas une fin en eux-mêmes; dans de nombreux cas, ils servent à construire d'autres points, en utilisant les intersections d'une droite avec un cercle, de deux droites ou de deux cercles.

Lorsqu'on exclut l'utilisation de la règle, la dernière construction n'en est pas affectée, alors que les deux autres doivent suivre une procédure différente. Dans le cas de l'intersection d'une droite avec un cercle, ce dernier seul est effectivement présent, alors que la droite n'est pas tracée, mais déterminée par deux de ses points. On est donc face au problème suivant: soit un cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  et deux points  $A$  et  $B$ . On demande de construire à l'aide du compas (et du compas seulement) les points d'intersection du cercle et de la droite qui passe par  $A$  et  $B$ .

De la même manière, l'intersection de deux droites devient le problème suivant: soit quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ . On demande de trouver à l'aide du compas (et du compas seulement) le point où la droite  $AB$  coupe la droite  $CD$ .

Ces deux opérations condensent toute la théorie; en effet toute construction, même la plus complexe, n'est qu'une suite d'opérations élémentaires, qui se réduisent aux deux intersections précédentes. Une fois qu'on aura démontré que les deux intersections précédentes peuvent être réalisées avec l'aide exclusive du compas, il s'ensuivra que toutes les autres le peuvent également.

Evidemment, les constructions qui n'utilisent que le compas sont plus longues de celles qui utilisent aussi la règle. Pour donner un exemple, on montre ci-dessous comment on peut trouver les intersections d'un cercle et d'une droite avec l'aide exclusive du compas. Une autre construction plus complexe peut être suivie sur l'ordinateur.

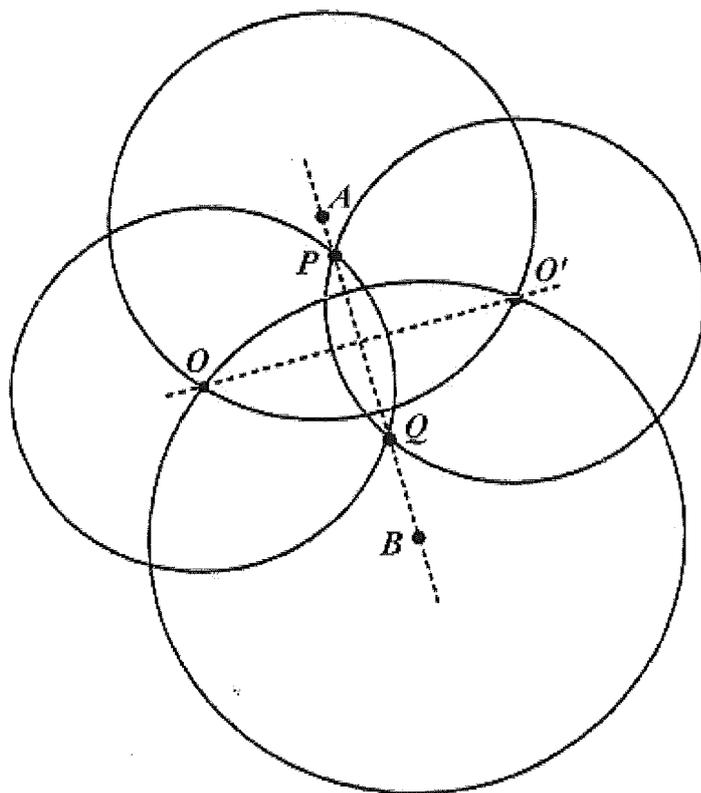
## Méthode pour trouver les intersections d'un cercle et d'une droite à l'aide du seul compas.

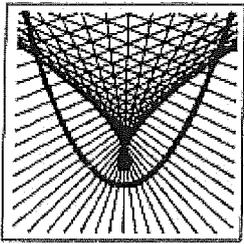
On veut trouver l'intersection du cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  avec la droite  $AB$ .

1. Avec le compas, on trace deux cercles qui ont respectivement  $A$  pour centre et  $AO$  pour rayon,  $B$  pour centre et  $BO$  pour rayon. Ces deux cercles se coupent bien sûr au point  $O$  mais aussi en  $O'$ , qui est symétrique de  $O$  par rapport à la droite  $AB$ . Notons que les droites  $AB$  et  $OO'$  n'appartiennent pas à la construction (on ne peut pas utiliser la règle), mais ont été tracées ici (en pointillé) afin de rendre l'explication plus claire.

2. En prenant  $O'$  pour centre, on trace un deuxième cercle de rayon  $r$ , qui coupe le premier aux points  $P$  et  $Q$ . Ces deux points sont les points recherchés, à savoir l'intersection du cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  avec la droite  $AB$ .

En effet, la droite  $AB$  est la médiatrice du segment  $OO'$ , puisque  $AO = AO'$  et que  $BO = BO'$ . Egalement  $PQ$  est la médiatrice du segment  $OO'$ . Il en suit que  $P$  et  $Q$  sont situés sur la droite  $AB$ , et ils sont bien les points d'intersection recherchés.





## Le mécanisme de Peaucellier

Un des problèmes qui a longtemps occupé les ingénieurs de la fin du XVIII<sup>ème</sup> et du début du XIX<sup>ème</sup> siècles était celui de trouver un système capable de régler l'axe du piston de la machine à vapeur selon un mouvement rectiligne alterné.

Sans ce mécanisme, en effet, la bielle AB, qui joint l'axe du piston et la roue qui convertit le mouvement, pousserait cet axe hors de la verticale, endommageant très vite la boucle S du cylindre. (figure 1)

Pour beaucoup d'autres machines également, il faut qu'un point donné se déplace en ligne droite avec le minimum de frottement; ce qui justifie l'intérêt porté au problème de tracer une droite au moyen d'un système d'axes articulés.

En 1784, Watt l'inventeur de la machine à vapeur, mit au point une solution, toutefois encore approximative. Elle consiste en une combinaison de trois axes reliés par des charnières, deux desquels AD et BC sont de même longueur, et un AB est beaucoup plus court. (figure 2)

Si C et D sont des points fixes (à des hauteurs distinctes), l'axe AB décrit en son point moyen P un mouvement rectiligne vertical sur un trajet assez considérable. En vérité, le mouvement complet du système articulé fait décrire au point P une courbe en forme de huit.

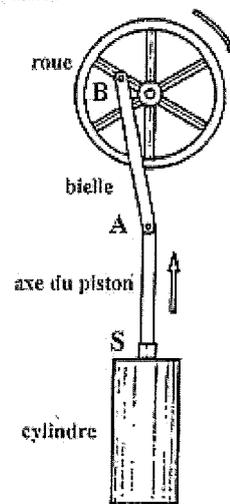


fig. 1

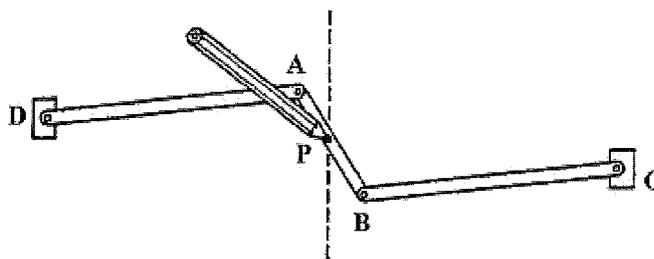


fig.2

Même si la solution de l'illustre ingénieur répondait suffisamment aux nécessités techniques de l'époque (encore qu'elle soit encore adoptée de nos jours), nombreux furent ceux qui cherchèrent en vain de trouver une solution exacte au problème. Celle-ci fut trouvée en 1864 par A. Peaucellier.

Le mécanisme inventé par Peaucellier est constitué de sept axes reliés par des charnières. Quatre d'entre eux forment un losange; deux plus longs sont attachés à deux extrémités opposées du losange, et également entre eux en un point fixe O; le septième axe contraint le point P à se mouvoir sur une conférence passant par O. Quand P se déplace sur la conférence, le point Q décrit une droite. (figure 3)  
 Il est évident que les points P, O, Q sont toujours alignés quelle que soit la position de P sur la conférence qui passe par O.

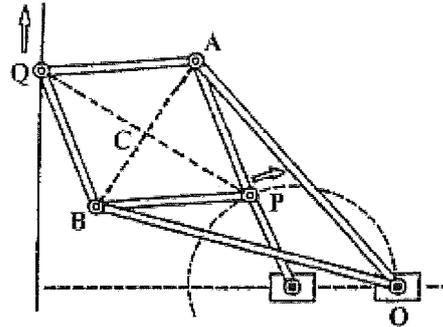


fig. 3

Démontrons maintenant la relation  $OP \cdot OQ = OA^2 - AP^2 = \text{constante}$   
 Appelons C le point de rencontre des diagonales PQ et AB du losange APBQ.  
 Les deux diagonales se divisent réciproquement en deux. En outre l'angle ACP est droit.  
 Puisque O, P, Q sont alignés, on a:

$$OP = OC - PC \quad OQ = OC + CQ = OC + PC$$

Ainsi:

$$OP \cdot OQ = OC^2 - PC^2$$

Mais en vertu du théorème de Pythagore on a:

$$OC^2 = OA^2 - AC^2 \quad PC^2 = AP^2 - AC^2$$

Donc:

$$OP \cdot OQ = OA^2 - AP^2 = \text{constante } K$$

Après ces prémisses, démontrons que quand P décrit la conférence passant par O, le point Q décrit une droite.

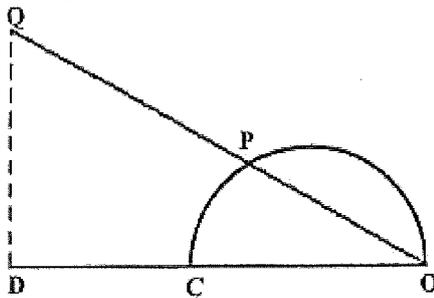


fig. 4

Soit C le point de la conférence diamétralement opposé à O, et soit P un point générique de la conférence différent de C et de O.

Appelons Q et D les positions que prennent une extrémité du losange (du mécanisme), quand l'extrémité opposée coïncide respectivement avec P et C. (figure 4)

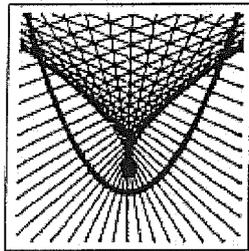
En raison de ce qui a été observé auparavant, on peut écrire:

$$OC \cdot OD = K \quad OP \cdot OQ = K$$

Considérons les triangles OPC et ODQ: ils sont semblables et donc, puisque l'angle OPC est droit, l'angle PDQ l'est aussi. Puisque le point P a été arbitrairement choisi sur une conférence passant par O, ce qui vient d'être dit est vrai pour n'importe quel point du cercle. Ainsi, quand P change de position sur la conférence, le point Q se déplace le long d'une droite.

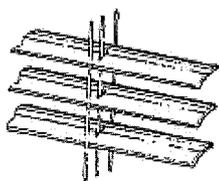
## AU DELÀ DU COMPAS

La géométrie des courbes

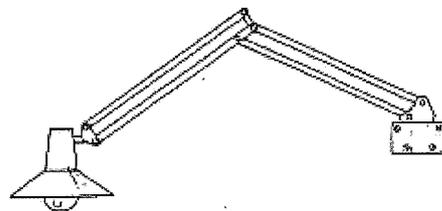


## Le quadrilatère articulé

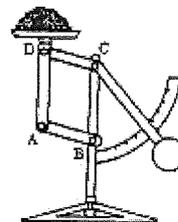
Parmi les nombreux mécanismes de tiges articulées qui apportent des solutions d'un intérêt à la fois pratique et théorique, le *quadrilatère articulé* en est un des plus simples. Son application est à la base d'un grand nombre d'instruments que nous rencontrons quotidiennement, comme, par exemple, certaines balances, les stores vénitiens, les pantograzphes, les essuie-glaces des autobus et des automobiles.



store vénitien



lampe de bureau



balance

fig. 1

Si l'on considère le quadrilatère ABCD dont le côté AB est fixe ; il est clair que la position de l'un des trois autres côtés détermine la position de ceux qui restent. Autrement dit, il s'agit d'un mécanisme avec un seul degré de liberté. En général le genre de mouvement d'un tel mécanisme dépend du rapport entre la longueur des différents segments, qui selon les cas peut donner lieu à des fonctionnements très différents.

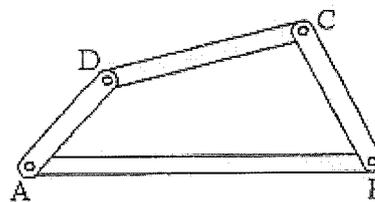


fig. 2

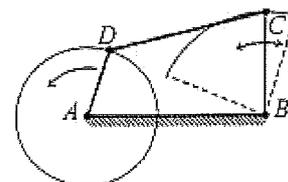
C'est d'ailleurs ce qu'il y a de fascinant, d'intéressant et d'utile dans le quadrilatère articulé.

Contrairement à ce que l'on pourrait penser au premier abord, il n'est pas facile de prévoir le mouvement d'un mécanisme aussi simple, c'est pourquoi il peut être utile de réaliser un modèle très simple avec des pièces en carton ou autre.

En général, les types de quadrilatères plus faciles à rencontrer dans notre vie quotidienne sont ceux que l'on nomme les *quadrilatères de Grashof*, c'est-à-dire ceux qui vérifient la relation suivante: *la somme des longueurs de la branche la plus courte et de la branche la plus longue du quadrilatère est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres branches.*

Selon le type de mouvement qu'ils engendrent, ces quadrilatères peuvent être classés dans trois typologies différentes:

1. Si la branche AD est la plus courte, et qu'on la fait tourner dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, alors la branche BC commencera également à tourner dans ce sens; à un certain moment, cependant, son mouvement inversera sa direction, bien que AD continue à tourner dans le même sens. Ainsi, si l'on fait tourner la branche AD, CB oscillera.



2. Si, au contraire, c'est la branche CD qui est la plus courte, AD ne pourra pas accomplir une rotation complète, et alors les deux branches, AD et CB, oscilleront.

3. Enfin, si AB est la branche la plus courte, quand AD tourne, CB fait de même.

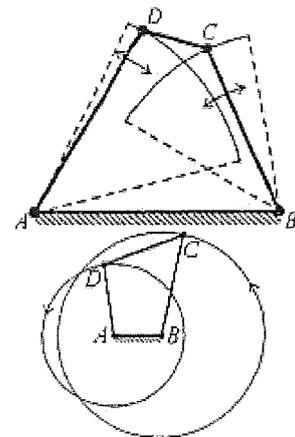
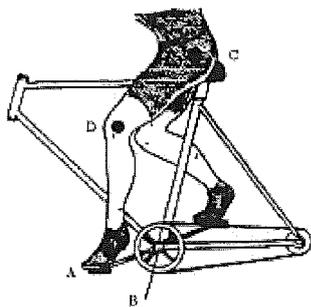
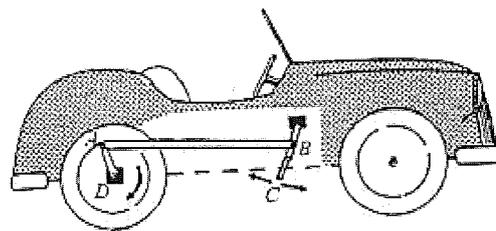


fig. 3

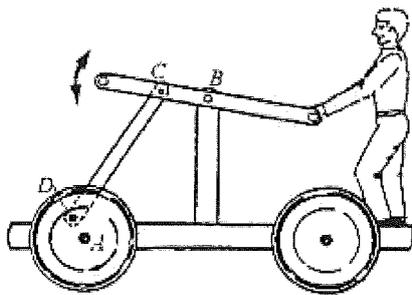
Très souvent le quadrilatère est utilisé pour transformer un mouvement alterné en un mouvement circulaire; la jambe d'un cycliste et la pédale de la bicyclette en sont un exemple très simple, tout comme la pédale des vieilles machines à coudre, la voiture à pédales pour enfant, la draisiennne que l'on ne voit plus désormais que dans les vieux films.



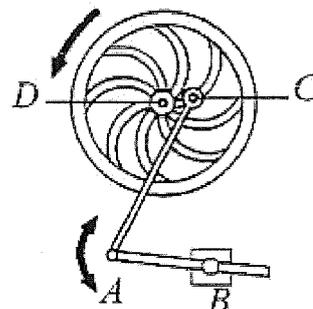
cycliste



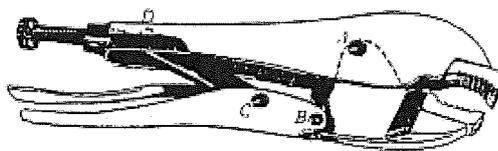
voiture à pédales



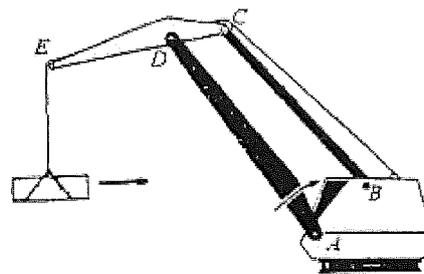
draisiennne



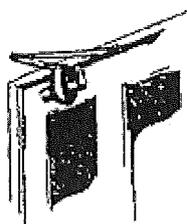
pédale de machine à coudre



pince



grue



*groom*

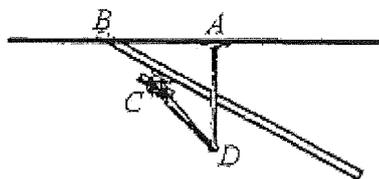


fig. 4

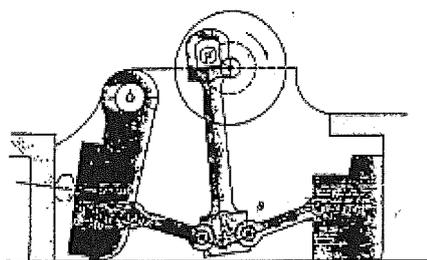
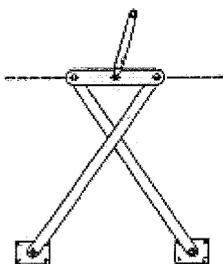


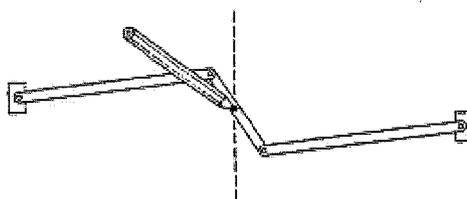
fig. 5 - concasseur

Ce mécanisme a aussi d'autres usages: il est souvent employé comme démultiplicateur de force pour les mouvements engendrés par un arbre tournant à vitesse constante, quand la force doit être appliquée seulement sur un certain trajet avec des petits déplacements comme il arrive avec les concasseurs ou avec certains coupe-papiers.

Enfin on retrouve aussi le quadrilatère articulé dans nombre de mécanismes avec des bras articulés comme dans celui de Watt ou de Tchebycheff.



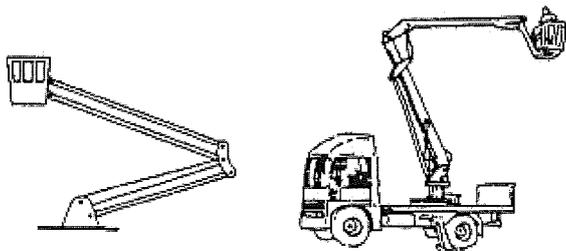
Mécanisme de Tchebycheff



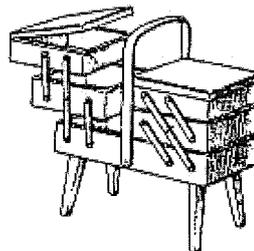
Mécanisme de Watt

fig. 6

Quand, en revanche, les branches opposées du quadrilatère sont de longueur égale, le système devient un *parallélogramme articulé*, les couples des branches restant toujours parallèles entre eux. Quand il est fondamental que certaines parties gardent une position préétablie, le parallélogramme articulé permet une solution adéquate, comme c'est le cas pour les grues dont on se sert pour inspecter l'éclairage public, où il est nécessaire de toujours assurer à la cabine la position horizontale quelle que soit sa hauteur du sol. On remarquera, en outre, que, dans certains cas, on utilise deux parallélogrammes couplés, de manière à obtenir des mouvements en deux directions (on a alors deux degrés de liberté), tout en garantissant le parallélisme du mouvement.



élévateurs



boîte à ouvrage

fig. 7

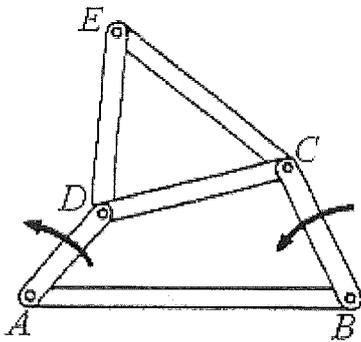
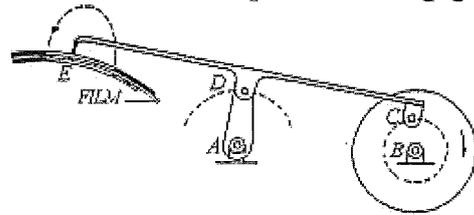


fig. 8

Si dans la figure 8 on considère un plan solide avec la branche CD, et si on maintient AB fixe en faisant tourner la branche la plus courte, les points de ce plan décrivent des courbes très différentes entre elles, selon la position du point. Pour repérer le point traçant du plan dépendant de la branche CD, il suffit d'ajouter au mécanisme deux autres branches CE et DE formant un triangle avec CD.

La figure 10 en bas de page donne une idée de ce phénomène: certaines de ces courbes ont une forme en huit allongé, certaines autres sont ovoïdales, d'autres encore ont une allure presque rectiligne.

Cette dernière possibilité est utilisée, par exemple, dans le mécanisme d'entraînement de la pellicule de film dans les projecteurs et les caméras. Quand C accomplit une révolution complète autour de l'axe B, la pointe E parcourt une trajectoire (en pointillés dans la figure 9) causant l'avancement rapide de la pellicule sur le trajet quasi rectiligne, pour ensuite, après s'être dégagé, venir se repositionner dans l'autre partie du trajet. La très grande variété de courbes que l'on arrive à tracer avec un mécanisme aussi simple que celui du quadrilatère articulé est d'une extrême importance, car le fait de pouvoir déterminer un certain mécanisme pour décrire en un point donné d'une machine une certaine trajectoire (au moins approximative à celle recherchée exactement), sans que celle-ci soit physiquement présente, constitue un des fondements du progrès.



mécanisme d'avancement pour pellicule  
fig. 9

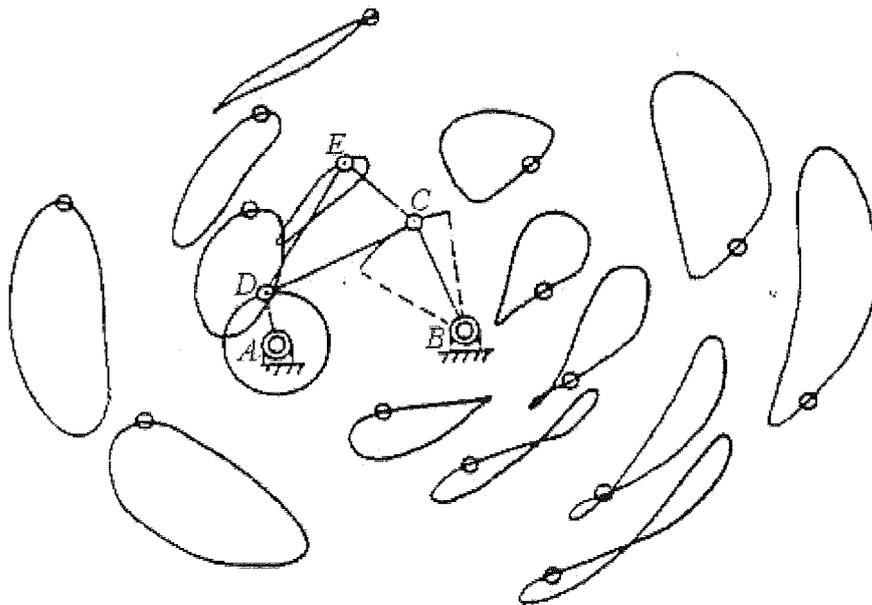
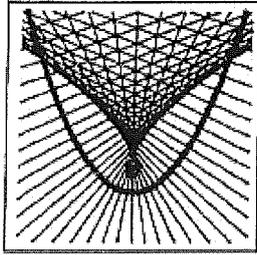


fig.10



## Constructeur universel d'équation

“Constructeur universel d'équation”, tel est le nom donné par l'*Encyclopédie* de Diderot, publiée à Paris en 1751, à un appareil génial. Le modèle exposé ici, reconstruit sur la base du dessin original, permet de tracer le graphe de n'importe quel polynôme du troisième degré et, en particulier, de trouver les solutions (réelles) de n'importe quelle équation algébrique avec coefficients réels de degré non supérieur à 3. On remarquera qu'avec le même principe constructeur il est théoriquement possible de construire, pour chaque  $n$  naturel, un appareil qui dessine le graphe d'un polynôme quelconque de degré  $n$ .

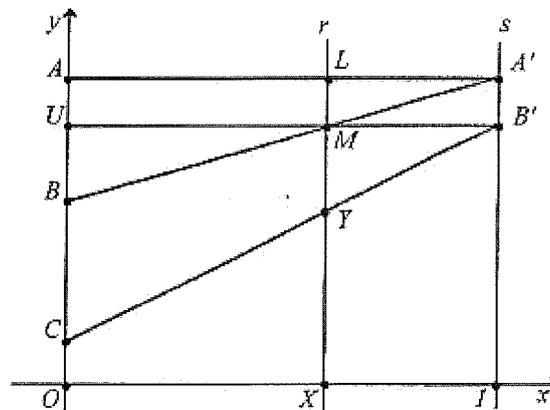
D'un point de vue mathématique, le fonctionnement de la machine est simple, car elle met à profit la similitude des triangles rectangles. On choisira un exemple simple, celui d'un polynôme de second degré. Supposons donc qu'on souhaite tracer le graphe du polynôme  $p(x) = ax^2 + bx + c$ , où  $x$  a des valeurs comprises, par exemple, entre 0 et 1; pour plus de clarté, les coefficients  $a, b, c$  seront considérés comme positifs.

Si on se réfère à la figure ci-contre, où  $x$  est un nombre compris entre 0 et 1, nous notons  $X$ , et  $I$  les points de l'axe des  $x$  avec abscisse  $x, 1$ , puis nous traçons les perpendiculaires  $r, s$  à l'axe  $x$  passant par ces points.

Notons ensuite  $A, B, C$  les points de l'axe  $y$  dont les ordonnées sont respectivement  $a + b + c, b + c, c$ .

Traçons enfin dans l'ordre:

- (i) le segment  $AA'$ , parallèle à l'axe  $x$ , qui coupe  $r$  en  $L$ ;
- (ii) le segment  $BA'$ , qui coupe  $r$  en  $M$ ;
- (iii) le segment  $UB'$ , parallèle en  $M$  à l'axe  $x$ ;
- (iv) le segment  $CB'$ , qui croise  $r$  en  $Y$



Nous affirmons que le point  $Y$  a pour coordonnées  $(x, ax^2 + bx + c)$ , c'est-à-dire qu'il appartient au graphe du polynôme  $p(x)$ . En modifiant le choix de  $x$  (dans la machine, on l'obtient en déplaçant la structure longitudinalement), le lieu des points  $Y$  construits de cette façon déterminera le graphe recherché.

En effet, quand on observe que

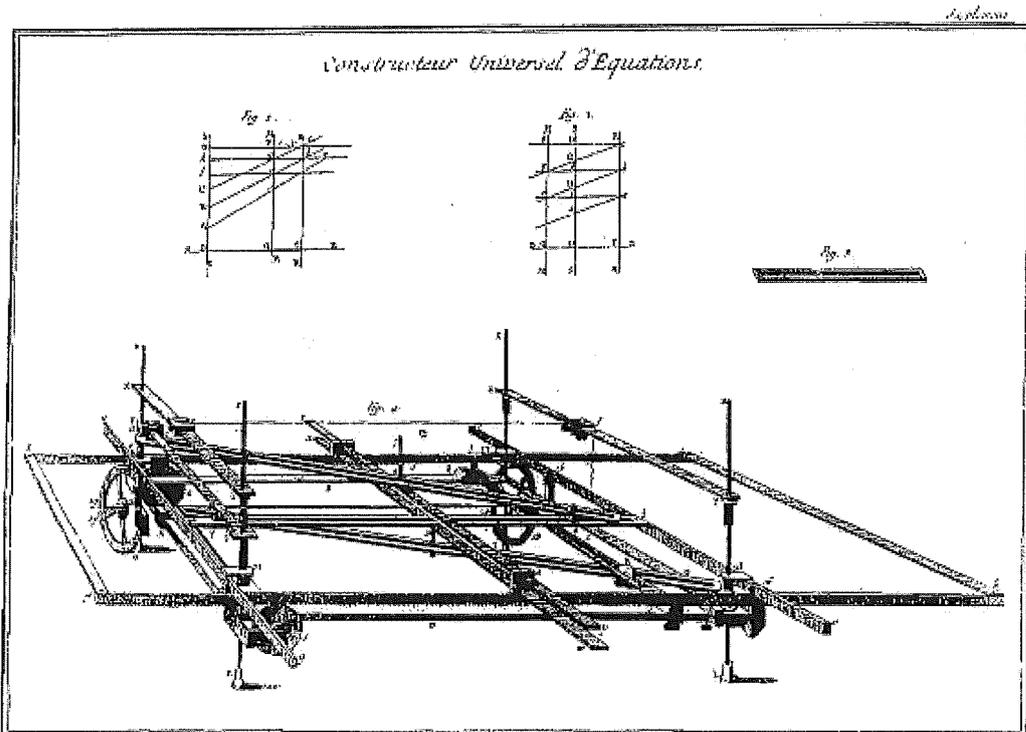
$$\overline{LA'} = \overline{MB'} = \overline{XI} = 1 - x, \quad \overline{AA'} = \overline{UB'} = \overline{OI} = 1,$$

on obtient: en vertu de la similitude des triangles  $MLA'$  et  $BAA'$ ,  $\overline{LM} = (1-x)\overline{AB} = (1-x)a$ , alors que en vertu de la similitude des triangles  $YMB'$  et  $CUB'$ ,

$$\begin{aligned} \overline{MY} &= (1-x)\overline{CU} = (1-x)(\overline{CA} - \overline{AU}) = \\ &= (1-x)(a + b - \overline{LM}) = \\ &= (1-x)(a + b - (1-x)a) = \\ &= (1-x)(ax + b) \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \overline{XY} &= \overline{XL} - \overline{LM} - \overline{MY} = \overline{OA} - (1-x)a - (1-x)(ax + b) = \\ &= (a + b + c) - (1-x)a - (1-x)(ax + b) = \\ &= ax^2 + bx + c \end{aligned}$$



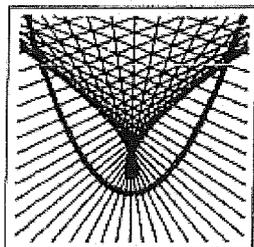
*Algebre.*

*Constructeur Universel d'Equations*

Tiré de l' *Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert, Parigi 1751

## AU DELÀ DU COMPAS

La géométrie des courbes



## Une propriété de l'ellipse

On se propose de démontrer que le lieu des points qui "regardent" une ellipse sous un angle droit est une circonférence.

Nous pouvons donner deux démonstrations de ce fait: une synthétique<sup>1</sup>, l'autre analytique.

Commençons par la première:

Considérons une ellipse ayant des semi-axes  $a$  et  $b$ , foyers  $E$  et  $F$ , centre  $O$  et une tangente  $t$  en un quelconque de ses points  $A$ . Considérons  $E_1$  et  $F_1$ , c'est-à-dire les symétriques de  $E$  et  $F$  respectivement à  $t$ , et indiquons avec  $\gamma$  la circonférence de diamètre  $E_1F_1$  et avec  $P$  et  $Q$  les intersections entre  $\gamma$  et  $t$ . On veut démontrer que:

(1) la droite  $s$ , perpendiculaire à  $t$  en  $P$  est tangente à l'ellipse

$$(2) OP = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Démontrons (1).

Si  $F_2$  est le symétrique de  $F$  respectivement à  $s$ , on a alors:

$$PF_2 = PF = PF_1$$

et donc les points  $F_1, P, F_2$  sont alignés.

Puisque  $F_1\hat{P}E = \pi/2$  (le triangle  $F_1PE$  est inscrit dans une semi-circonférence), dans le triangle  $F_1EF_2$  la médiane  $EP$  est aussi la hauteur, alors ce triangle est isocèle et  $EF_2 = EF_1 = EA + AF = 2a$ .

Si  $B$  est l'intersection entre  $s$  et  $EF_2$ , on a que

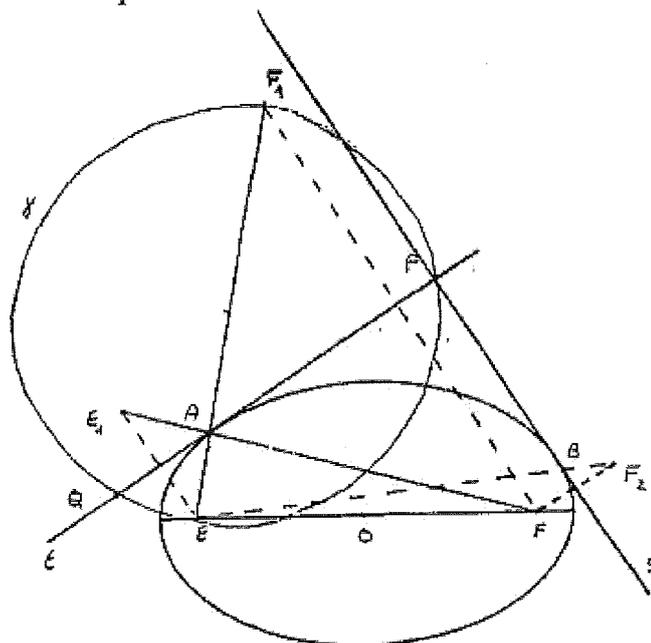
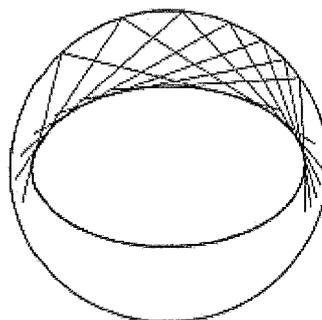
$$EB + BF = EB + BF_2 = EF_2 = 2a,$$

donc  $B$  est un point d'intersection entre  $s$  et l'ellipse.

Par ailleurs pour tout point  $C$  différent de  $B$  de la droite  $s$ , on a:

$$EC + CF = EC + CF_2 > EF_2 = 2a$$

Nous avons de la sorte démontré que  $s$  est tangent en  $B$  à l'ellipse.



<sup>1</sup> Pour cette démonstration, nous sommes redevables au Prof. Piergiorgio Giudici du Lycée scientifique "A. Volta" de Milan.

À présent démontrons (2).

Par symétrie respectivement à  $t$ , on peut écrire la relation suivante:

$$E_1 \hat{P}F = E \hat{P}F_1 = \pi/2$$

Donc:

$$EP^2 + PF^2 = E_1P^2 + PF_1^2 = E_1F_1^2 = 4a^2$$

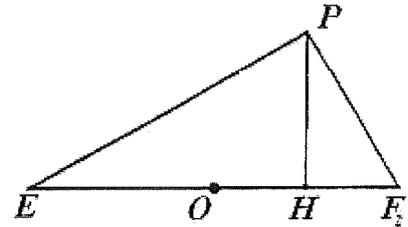
Si on appelle  $H$  le pied de la hauteur de  $P$  à  $EF$  on a:

$$EP^2 + PF^2 = PH^2 + (EO + OH)^2 + PH^2 + (OF - OH)^2$$

$$EO = OF = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$EP^2 + PF^2 = 2PH^2 + 2OH^2 + 2(a^2 - b^2) = 2OP^2 + 2(a^2 - b^2)$$

$$OP^2 = 2a^2 - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2.$$



Pour la démonstration analytique, indiquons avec  $(x_0, y_0)$  un point du lieu fixé, où  $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$  sont les équations paramétriques de l'ellipse.

Une droite générique passant par  $(x_0, y_0)$  a équation  $y - y_0 = m(x - x_0)$ , si on cherche les intersections avec l'ellipse on obtient  $b \sin t - y_0 = m(a \cos t - x_0)$  et si on indique avec  $r$  la tangente trigonométrique de l'angle  $t/2$  on obtient l'équation

$$b \frac{2r}{1+r^2} = ma \frac{1-r^2}{1+r^2} + y_0 - mx_0,$$

c'est-à-dire

$$(y_0 - mx_0 - ma)r^2 - 2br + (y_0 - mx_0 - ma) = 0.$$

En imposant la condition de tangence, on obtient:

$$\frac{\Delta}{4} = b^2 - (y_0 - mx_0)^2 + m^2 a^2 = 0$$

ce qui est une équation de deuxième degré en  $m$  dont le produit des racines doit être égal à  $-1$  (de manière à ce que les tangentes soient perpendiculaires). Si on réécrit l'équation de la manière suivante

$$m^2(a^2 - x_0^2) + 2mx_0y_0 + b^2 - y_0^2 = 0$$

on voit tout de suite que le produit des racines est

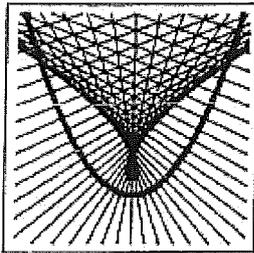
$$\frac{b^2 - y_0^2}{a^2 - x_0^2},$$

et donc il doit y avoir  $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$ , c'est-à-dire  $(x_0, y_0)$  se trouve sur la circonférence ayant le centre dans le centre de l'ellipse et le rayon  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

Vive versa, en effectuant en sens inverse les mêmes pas, on peut aisément voir que chaque point du cercle a des tangentes à l'ellipse qui sont entre elles perpendiculaires.

## AU DELÀ DU COMPAS

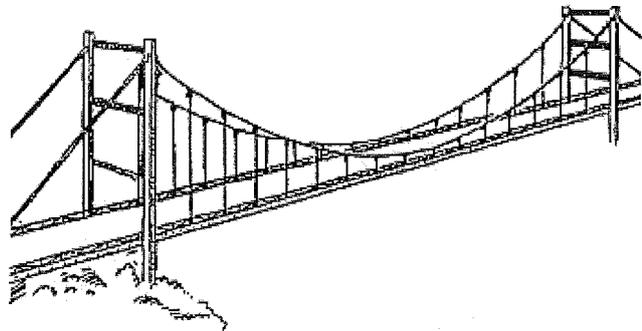
La géométrie des courbes



## Les ponts suspendus

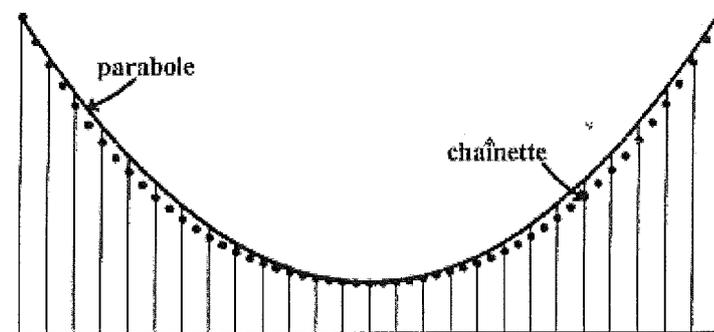
La construction de ponts pose des problèmes qui ont toujours intéressé les hommes depuis l'Antiquité. Dans certains cas, une technique avancée est indispensable, et souvent les solutions adoptées ne sont perfectionnées que plus tard. Parmi les ponts dont les tabliers sont les plus longues les plus impressionnants sont certainement les ponts suspendus, c'est-à-dire les ponts où l'ouvrage est suspendu grâce à des tirants en acier attachés à des câbles porteurs, disposés selon une certaine courbe et soutenus par des piliers.

Le Golden Gate sur la baie de San Francisco, est l'un des ponts les plus grands de ce type. Il a été construit dans les années trente et il a une libre portée de 1280 m. On a du mal à imaginer que les câbles d'acier du Golden Gate mesurent 93 cm de diamètre et ils sont formés de 27500 "filaments" de 6 mm de diamètre; ils pèsent à eux seuls environ 15000 tonnes et soutiennent l'ouvrage à 75 m au-dessus du niveau de la mer. Les tours, elles, sont hautes de 223 mètres.



Ces quelques données permettent de comprendre l'intérêt, qui n'est pas que mathématique, de calculer la courbure des câbles censés accueillir les tirants à des intervalles bien déterminés, avant même que l'on procède à la construction du pont.

La courbe obtenue en suspendant une corde à ses extrémités sans lui appliquer aucun poids se nomme *chaînette*. À première vue, la chaînette pourrait être vue comme la courbe le long de laquelle sont disposés les câbles de notre pont; en réalité, si l'on tient compte des forces qui agissent sur les câbles à cause du poids de l'ouvrage, on peut démontrer comme ceux-ci se disposent le long d'une courbe parabolique.



Pour faciliter notre raisonnement, schématisons notre objet et considérons la partie suspendue comme parfaitement horizontale et rigide. Nous formulons ensuite les hypothèses suivantes:

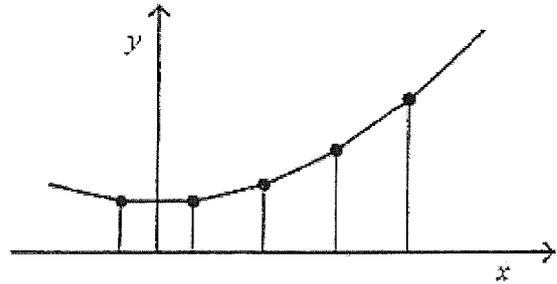
- les tirants sont en nombre pair et sont équidistants (on appellera  $a$  la distance entre deux tirants consécutifs),
- les câbles et les tirants sont parfaitement flexibles et inextensibles,
- le pont possède un axe de symétrie.

Chacun des câbles porteurs formera une ligne polygonale, dont les sommets sont les points où les tirants sont attachés au câble, et dont le segment central est disposé horizontalement, pour des raisons de symétrie.

Fixons alors un système de référence avec l'axe des  $x$  et celui des  $y$ , coïncidant respectivement avec le tablier du pont et avec l'axe de symétrie. De cette façon, il suffira de considérer les points d'abscisse positive.

Soit  $P_K \equiv (x_K, y_K)$   $K = 1, \dots, n$  un sommet quelconque de la ligne polygonale, et soit  $y_1 = b > 0$ ; on a:

$$x_K = \left(K - \frac{1}{2}\right)a \quad K = 1, \dots, n$$



Pour calculer  $y_K$ , il faut imposer au point  $P_K$  la condition d'équilibre statique et pour cela on considère les différentes forces qui agissent sur un sommet de la ligne polygonale, c'est-à-dire: la force  $\bar{p}$  dirigé le long de l'axe  $y$  dont l'intensité est constante pour chaque  $K$  puisque le poids total du tablier est également distribué sur chaque tirant, le long de l'axe  $x$

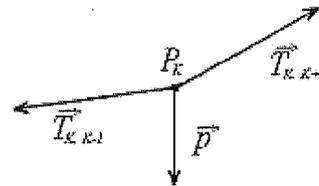
- la tension  $\bar{T}_{K, K-1}$  dirigée le long du segment  $P_K P_{K-1}$
- la tension  $\bar{T}_{K, K+1}$  dirigée le long du segment  $P_K P_{K+1}$

et les composantes des forces devront, pour chaque  $K = 1, \dots, n$ , satisfaire les conditions suivantes: le long de l'axe  $x$

$$1) \quad (\bar{T}_{K, K-1})_x = (\bar{T}_{K, K+1})_x$$

le long de l'axe  $y$

$$2) \quad (\bar{T}_{K, K-1})_y + \bar{p} = (\bar{T}_{K, K+1})_y$$



Exploitant le fait que, pour des raisons de symétrie,  $(\bar{T}_{1,0})_y = 0$ , et, après quelques calculs, nous obtenons de 1) et de 2):

$$|(\bar{T}_{K, K-1})_x| = |(\bar{T}_{1,0})_x| = T \quad , \quad |(\bar{T}_{K, K+1})_y| = K |\bar{p}| = Kp$$

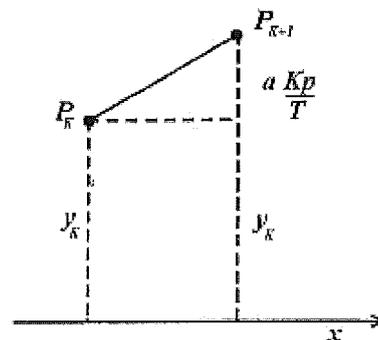
$$\text{Puisque } y_{K+1} = y_K + a \frac{Kp}{T} \quad K = 1, \dots, n$$

nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} y_{K+1} &= y_K + \frac{a K p}{T} = y_{K-1} + \frac{a(K-1)p}{T} + \frac{a K p}{T} = \\ &= \dots = y_1 + \frac{a p}{T} (1 + 2 + \dots + K) = b + \frac{a p}{T} \frac{K(K+1)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi les coordonnées du point  $P_K$  sont :

$$\left( \left(K - \frac{1}{2}\right)a, b + \frac{K(K-1) a p}{2 T} \right) \quad K = 1, \dots, n$$

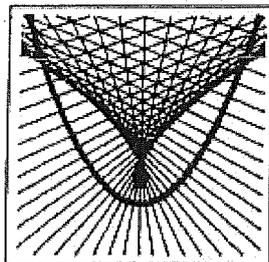


c'est-à-dire les extrémités de notre ligne polygonale appartiennent à la parabole exprimée par l'équation:

$$y = \frac{p}{2aT} x^2 + \left( b - \frac{a p}{8 T} \right)$$

## AU DELÀ DU COMPAS

La géométrie des courbes



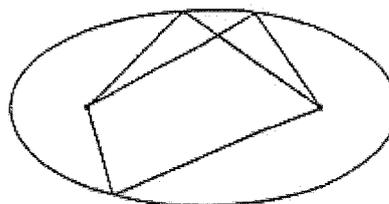
## Réflexion et échos

Un caillou lancé dans un étang produit un ensemble d'ondes concentriques qui se propagent dans toutes les directions. Quand elles atteignent la berge, spécialement lorsque celle-ci est de forme nette, comme dans un bassin artificiel, elles se réfléchissent. Les ondes réfléchies se superposent alors, et de manière assez chaotique. Parfois, il peut arriver que les ondes réfléchies se concentrent dans une zone réduite de la surface, créant ainsi un phénomène semblable à l'écho.

L'écho fait penser au son; en effet, le son se propage lui aussi sous forme d'ondes, qui dans ce cas sont tridimensionnelles : c'est l'air qui subit des vibrations; ces vibrations sont longitudinales (l'oscillation a lieu dans la direction de la propagation), à la différence des ondes mécaniques de la surface de l'étang, qui sont transversales (la direction de vibration est perpendiculaire à la direction de la propagation). Les ondes sonores se réfléchissent aussi lorsqu'elles rencontrent un obstacle; parfois, elles ont tendance à se concentrer autour d'une position particulière, et elles donnent lieu au phénomène de l'écho. On observe le même phénomène sur les ondes lumineuses qui se réfléchissent sur un miroir.

La formation d'un écho dépend évidemment de la position de la source du son et de la forme de la surface réfléchissante. Il y a des surfaces qui dispersent le son, d'autres qui le concentrent plus ou moins bien autour d'un point. Ce dernier phénomène est particulièrement remarquable si la surface réfléchissante est une *ellipse*.

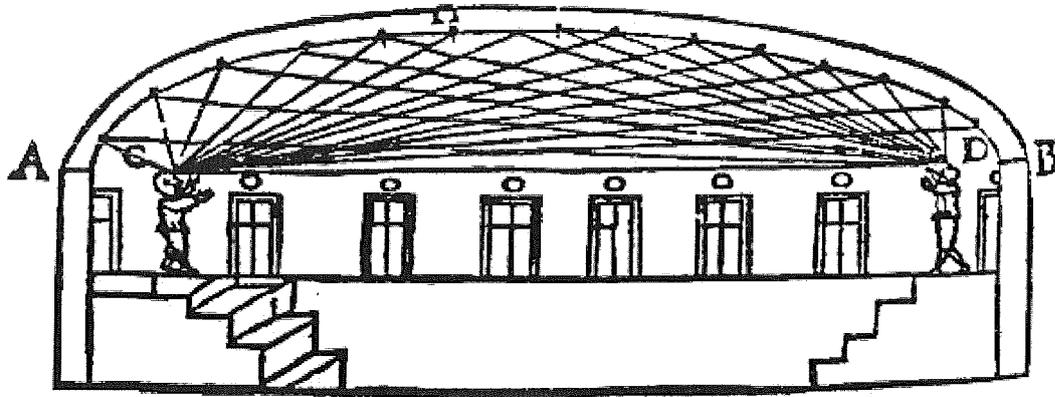
En effet, cette courbe jouit de la propriété suivante: si l'on joint un point  $P$  quelconque de la courbe avec les deux foyers, l'angle formé par ces deux segments admet comme bissectrice la perpendiculaire à la courbe en  $P$ . Si un faisceau d'ondes sortant d'un des deux foyers, est dirigé vers une surface elliptique, il est réfléchi par cette surface selon une trajectoire qui passe par l'autre foyer.



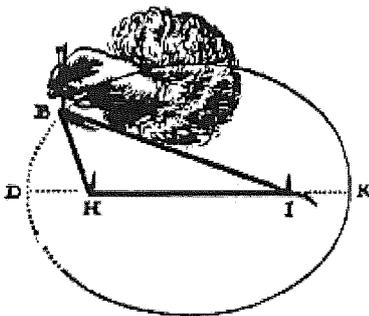
Cette propriété peut être exploitée pour obtenir des effets sonores intéressants dans une pièce dont la voûte a la forme d'un ellipsoïde de révolution (un ellipsoïde est obtenu par rotation d'une ellipse autour de son axe). Supposons qu'une personne placée à un des foyers de l'ellipse parle à une autre personne placée à l'autre foyer. Quelle que soit la direction des ondes sonores émises au premier foyer, elles se concentrent toutes au deuxième foyer.

La personne placée en ce point entend donc les sons émis dans l'autre foyer, même s'ils sont de faible intensité. Si l'auditeur s'éloigne du deuxième foyer, il n'entendra que les ondes sonores réfléchies en certains points de la voûte; autant dire qu'il n'entendra presque rien.

Plusieurs palais de la Renaissance (le Palais Schifanoia à Ferrare et le Palais de Charles Quint à Grenade) ont des chambres construites sur ce modèle et où ces phénomènes acoustiques provoquent aujourd'hui encore l'émerveillement des visiteurs.



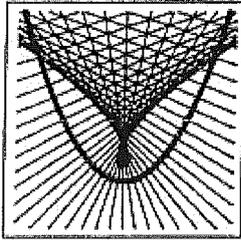
Athanasius Kircher: *Murgia Universalis sive Ars Magna consoni et dissoni. Tomus II*, Roma 1650



L'ellipse jouit d'une autre propriété: la somme des distances d'un point quelconque de l'ellipse aux foyers est constante, quel que soit le point considéré. C'est bien cette propriété que l'on utilise fréquemment pour tracer une ellipse. On fixe les extrémités d'une ficelle aux foyers de l'ellipse. On tend cette ficelle avec un crayon et, d'un trait continu, on trace l'une puis l'autre moitié de l'ellipse.

## AU DELÀ DU COMPAS

La géométrie des courbes

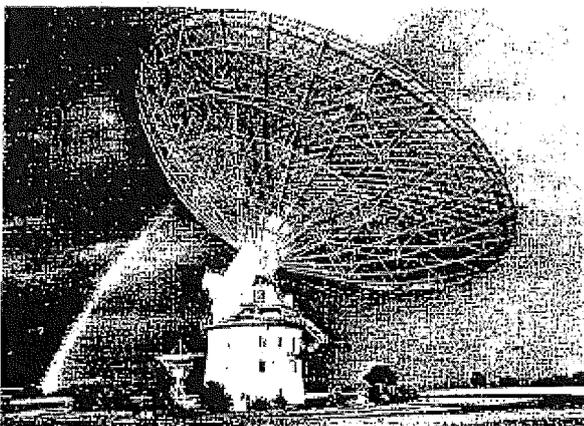
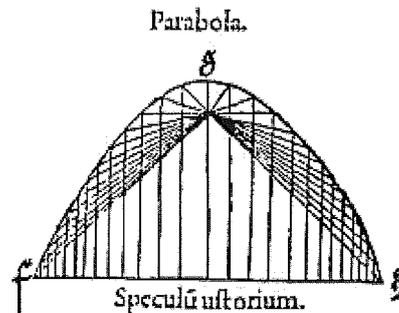


## Les miroirs ardents

Une tradition remontant à Plutarque veut qu'Archimède ait inventé des miroirs, au moyen desquels il aurait incendié les navires des Romains qui assiégeaient Syracuse. Plutarque ne dit pas comment ces miroirs étaient faits, mais il est clair qu'il devait s'agir de miroirs courbes, puisqu'un miroir plat pourra bien éblouir quelqu'un, mais il ne pourra jamais incendier un navire, même en bois comme l'étaient ceux des Romains.

L'idée à la base de la construction d'un miroir ardent consiste à utiliser une surface réfléchissante comme un condensateur de rayons solaires, qui concentre en une petite zone (mieux en un point, le foyer) les rayons qui tombent sur toute la surface du miroir. De cette manière, on peut obtenir des températures assez élevées, suffisantes pour incendier des matières inflammables placées sur le foyer. Les grandes centrales solaires fonctionnent sur la base de ce principe.

La forme plus simple de miroir ardent est celle d'un paraboloïde de révolution, une surface qui est engendrée par une parabole tournant autour de son axe. Dans la parabole en effet, il existe un point  $F$ , que l'on appelle précisément son foyer, tel que les rayons parallèles à l'axe qui se réfléchissent sur la parabole ont la propriété de tous passer par  $F$ . A cause de la grande distance entre la terre et le soleil, les rayons solaires peuvent être considérés pratiquement comme parallèles, le miroir parabolique les concentre donc tous au foyer. Ce principe est valable aussi pour les ondes radio; il explique également la forme des antennes de télévision captant les signaux provenant directement d'un satellite, ainsi que les antennes des radiotélescopes.



*Antenne parabolique du radiotélescope de 66 mètres  
Australian National Radio  
Observateurs de Parkes N.S.W.*

Ne pouvant utiliser les rayons solaires, on s'est servi ici de deux miroirs paraboliques. Le premier d'entre eux a en son foyer une source lumineuse, dont les rayons, se réfléchissant dans le miroir, deviennent tous parallèles. Le second reçoit ce faisceau de rayons parallèles provenant du premier et le concentre à nouveau en son foyer, lieu où il enflamme une allumette.

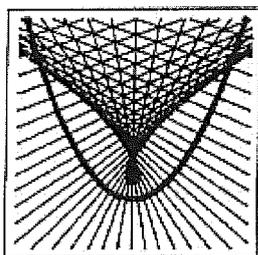


Mais revenons à Archimède. Comme on peut le voir à partir des miroirs exposés, mais aussi à partir des antennes paraboliques ordinaires, le foyer est assez près du miroir, d'autant plus près que le miroir est courbe. Si l'on veut varier la position du foyer, il faut donc changer la courbure du miroir, d'autant plus plat, qu'il devra brûler plus loin. Mais un miroir presque plat ne brûle que très peu, parce que ses rayons ont tendance à se disperser et ne se focalisent que difficilement.

Doit-on conclure alors que les miroirs d'Archimède ne sont qu'une légende? Probablement, ou du moins ces miroirs devaient être bien plus élaborés qu'un simple miroir parabolique. C'est ce que pensaient nombreux mathématiciens du XVII<sup>ème</sup> siècle, qui avaient essayé en vain de reproduire la machine attribuée à Archimède. Parmi ces mathématiciens Bonaventura Cavalieri, élève de Galilée, qui avança l'idée d'utiliser deux miroirs paraboliques. Le premier, le plus grand, avait la fonction habituelle de concentrer les rayons au foyer. En ce foyer était placé un second miroir parabolique plus petit et réfléchissant vers l'extérieur, dont le foyer coïncidait avec le foyer du premier. Les rayons étaient alors réfléchis à nouveau parallèles vers l'extérieur, mais concentrés cette fois-ci en un rayon beaucoup plus étroit. Bien qu'ingénieuse, cette solution ne rencontra pas plus de succès que les autres, en raison des difficultés pour construire un miroir parabolique assez précis, et aussi parce que la chaleur engendrée sur la surface du second miroir l'endommageait très rapidement.

## AU DELÀ DU COMPAS

La géométrie des courbes



## La cycloïde - I

Sur une droite horizontale, qui représente pour nous la ligne du sol, est posé un cercle: on marque le point le plus bas de ce cercle. Si on déplace le cercle en le faisant rouler sans glisser sur la droite, le point marqué s'éloignera du sol, puis arrivera à la hauteur maximale, qui est égale au diamètre du cercle, et descendra ensuite jusqu'à toucher le sol; et ceci à une distance du point de départ égale à la longueur du cercle. La trajectoire parcourue par le point se répète si l'on continue à faire rouler le cercle. Cette courbe s'appelle une *cycloïde*.



Un des premiers savants à étudier cette courbe fut Galilée; en 1640, il écrivait: "Cette ligne courbe, cela fait plus de cinquante ans que j'ai envie de la décrire, et je la tenais pour une courbure très gracieuse à adapter aux arcs d'un pont. Je fis différentes tentatives d'étude des propriétés de celle-ci, et de l'espace compris entre cette courbe et la corde horizontale. Au commencement, j'ai eu l'impression que cet espace pouvait être le triple de la surface du cercle. En fait, ce n'est pas le cas, bien que la différence ne soit pas grande".

Galilée évalua probablement ces deux surfaces à l'aide de modèles, qu'il pesait. En réalité, contrairement aux dernières conclusions de Galilée, l'aire de la surface comprise entre la cycloïde et la droite horizontale est exactement le triple de l'aire du disque. E. Torricelli, G. Roberval et B. Pascal sont arrivés presque au même moment à cette conclusion. Assez rapidement, en plus de l'aire, on découvrit le centre de gravité et le volume des corps obtenus par rotation de la courbe autour de la droite horizontale ou autour de son axe de symétrie. On trouva aussi une méthode pour déterminer ses tangentes. Cette recherche intéressa les plus grands mathématiciens de cette période, parmi lesquels figure R. Descartes.

Toutes ces recherches témoignent de l'intérêt pour la cycloïde, peut-être la première courbe vraiment moderne, c'est-à-dire qui ne figure pas dans les œuvres des géomètres de la Grèce antique. Cet intérêt allait s'accroître considérablement lorsqu'on découvrit que la cycloïde constituait la solution de deux problèmes qui n'avaient apparemment pas de relation : *l'isochronisme des oscillations* et la *courbe de la descente la plus rapide*.

Le premier problème était en grande partie technologique. A l'aube de l'époque moderne, en effet, la mesure du temps était d'une grande importance puisque c'était d'elle que dépendait, entre autres, la détermination de la longitude, connaissance essentielle pour la navigation océanique. C'est à peu près au milieu du XVII<sup>ème</sup> siècle, que commençait à devenir techniquement réalisable la construction d'un instrument destiné à mesurer le temps en

utilisant les oscillations d'un pendule. Dans un pendule classique, le poids décrit un arc de cercle, et le temps employé pour accomplir une oscillation complète dépend de l'amplitude de celle-ci. Ce temps est plus long pour de grandes oscillations et diminue progressivement quand diminue l'amplitude; il reste presque constant pour de petites oscillations. En d'autres termes, le pendule circulaire n'est approximativement isochrone que pour de petites oscillations.

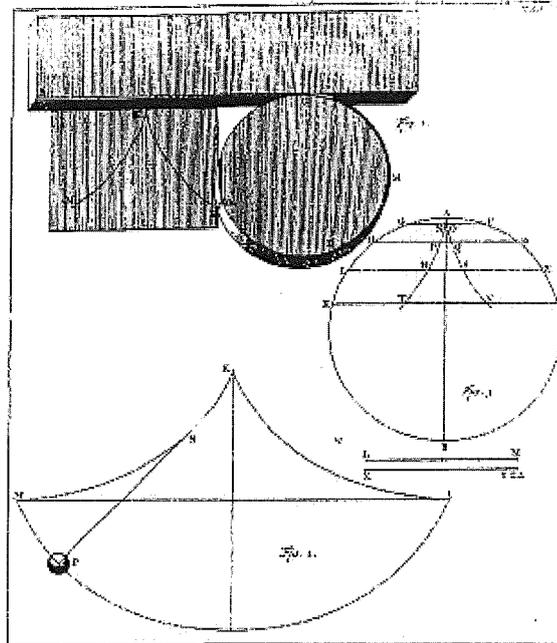
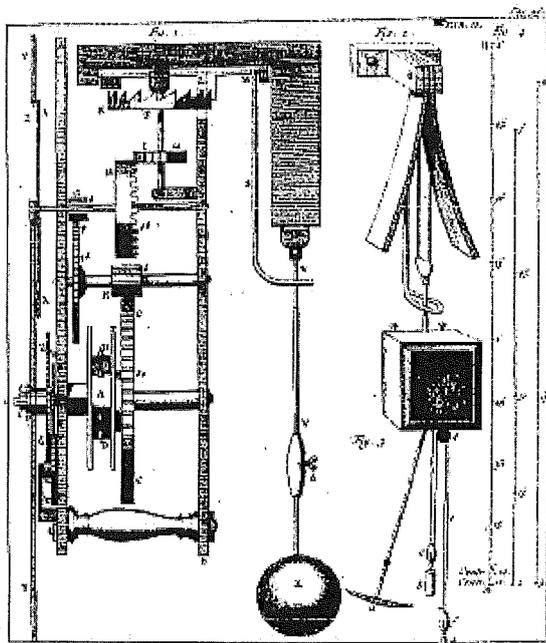
On se pose alors la question suivante: existe-t-il une courbe sur laquelle toutes les oscillations, grandes et petites, emploient le même temps pour une oscillation complète? La réponse est affirmative.

Le savant hollandais Christian Huygens démontra que la courbe *isochrone* est la cycloïde. Par conséquent, pour obtenir des oscillations strictement isochrones, il faut que le poids du pendule décrive une cycloïde.



Comment obliger le poids d'un pendule à se déplacer le long d'une cycloïde? On pourrait construire un profil de forme cycloïdale, et y faire rouler le poids du pendule. Mais il serait alors difficile d'assurer un mouvement régulier. De plus, le frottement du poids le long du profil arrêterait le mouvement après un assez petit nombre d'oscillations.

On résout le problème en construisant deux guides (profils) qu'on place des deux côtés du point de suspension; de cette manière, le fil du pendule n'est pas libre, mais doit suivre en partie la forme du profil: on obtient alors un pendule dont l'extrémité décrit une cycloïde. Du point de vue de la géométrie, il faut construire deux profils identiques (à droite et à gauche) tels que leur *développante* soit une cycloïde. Huygens a démontré qu'il faut pour cela que le profil soit lui aussi une cycloïde. En conclusion, si l'on construit deux profils ayant la forme d'une cycloïde, on obtient un pendule parfaitement isochrone.

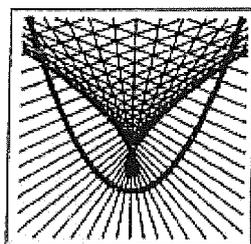


*Utilisation de la développante pour la construction d'un pendule cycloïdal*

C. Huygens, *Horologium oscillatorium*, Paris 1673

## AU DELÀ DU COMPAS

La géométrie des courbes



## La cycloïde - II

L'autre problème dont la cycloïde permet la solution est celui de la détermination de la *brachystochrone*, c'est à dire de la courbe qui rend minimal le temps de chute d'un point à un autre.

On suppose deux points fixés  $A$  et  $B$ , le premier étant plus haut que l'autre, et qui ne sont pas sur la même verticale. On fait partir du point  $A$  un corps soumis à la force de gravité; ce corps arrive en  $B$  suivant une trajectoire qui lie les deux points. On pose le problème suivant : parmi toutes les trajectoires possibles pour aller de  $A$  à  $B$ , laquelle demande un temps minimal ? Ce n'est pas, comme on pourrait le croire, le segment de droite qui relie les deux points. En effet, pour diminuer le temps de parcours, il faut commencer la descente verticalement, de manière à acquérir immédiatement de la vitesse, même si cela allonge le parcours.

La solution de ce problème constitua un des premiers succès du calcul différentiel, qui avait été inventé vers la fin du XVII<sup>e</sup> siècle à la fois par I. Newton et par G. W. Leibniz, indépendamment l'un de l'autre. Le problème fut énoncé ainsi pour la première fois par Johann Bernoulli, sous forme de défi aux mathématiciens contemporains.

*Problème nouveau, à la solution duquel on invite les Mathématiciens. Soit dans un plan vertical deux points  $A$  et  $B$ , trouver le parcours  $AMB$  d'un mobile  $M$  tel que, en se déplaçant sous l'effet de la gravité, et commençant du point  $A$ ,  $M$  arrive en  $B$  dans le temps le plus bref possible.*

Le défi de Bernoulli fut relevé par les plus grands mathématiciens du temps, parmi lesquels Leibniz et Newton eux-mêmes, qui en donnèrent une solution à l'aide du calcul infinitésimal. Il démontrèrent que le parcours le long duquel le temps est le plus court, est la cycloïde.

Il s'agit d'une courbe transcendante, dont Leibniz et Bernoulli ont posé l'équation différentielle. Si l'on indique avec  $x$  et  $y$  les coordonnées d'un point quelconque sur la cycloïde, et avec  $x + dx$  et  $y + dy$  les coordonnées d'un deuxième point infiniment proche du premier, on pose l'équation:

$$dx = dy \sqrt{\frac{y}{2-y}}$$

On peut trouver de la manière suivante une équation paramétrique de la cycloïde. On suppose égal à 1 le rayon du cercle qui engendre la courbe. Ce cercle s'est déjà déplacé, et le point dont on suit le déplacement se trouve à la position  $P$ . Les coordonnées de  $P$  sont  $x$  et  $y$ , et  $t$  est la

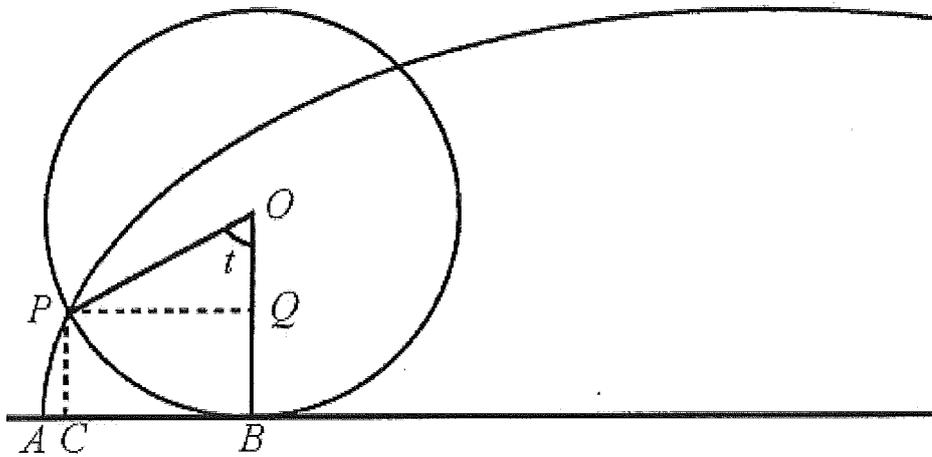


mesure en radians de l'angle  $\hat{P}OB$  (sommet en  $O$ ). Puisque le rayon est 1,  $t$  est égal à la longueur de l'arc  $PB$ , qui d'ailleurs est égal à  $AB$ . D'autre part, on a  $BC = BQ$ . On a alors:

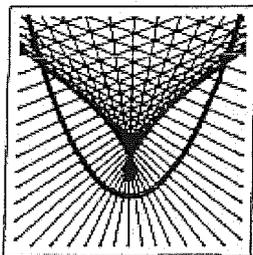
$$x = AC = AB - BC = t - PQ = t - \sin t$$

$$y = PC = QB = OB - OQ = 1 - \cos t$$

Lorsque le cercle fait un tour complet, le nombre  $t$  varie entre 0 et  $2\pi$  ; le point de coordonnées  $(t - \sin t, 1 - \cos t)$  décrit la cycloïde.



AU DELÀ DU COMPAS  
La géométrie des courbes



Enveloppe, développée, développante

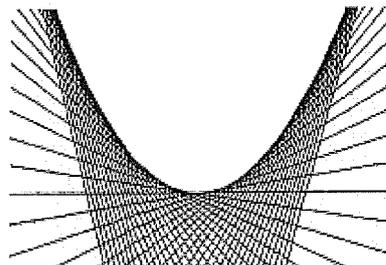
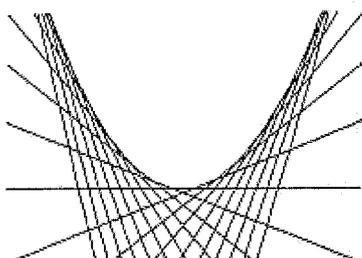
Enveloppes, développées, développantes : que des termes inconnus !

Pourtant, derrière ces noms quelque peu étranges se cachent des concepts relativement simples et en tout cas esthétiquement attrayants.

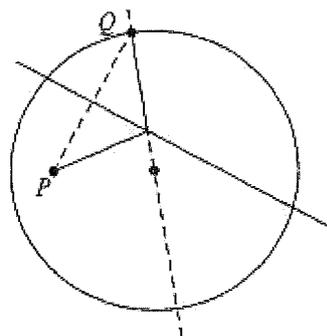
ENVELOPPE:

C'est une manière de décrire une courbe grâce à une famille de courbes. Intuitivement on peut déjà comprendre qu'une famille de courbes enveloppe une courbe  $G$ , si chaque élément de la famille est tangent à  $G^1$ . Voyons cela de plus près à l'aide de quelques exemples.

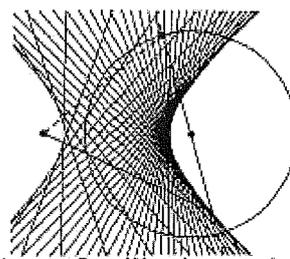
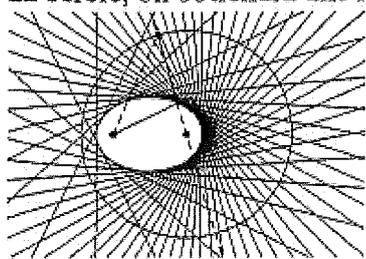
Considérons la famille de droites comme dans la figure: elles "enveloppent" une parabole, c'est-à-dire chaque droite de notre famille est tangente à la parabole. On remarque que la parabole n'est pas tracée physiquement, simplement elle sera de plus en plus facilement lisible au fur et à mesure que le nombre des droites que l'on trace augmente.



Une ellipse peut être dessinée de plusieurs manières. Une parmi tant d'autres est la suivante: considérons un cercle et fixons un point  $P$  à l'intérieur du cercle autre que son centre. Joignons  $P$  à n'importe quel point  $Q$  sur la circonférence du cercle, et traçons l'axe du segment  $PQ$ . En variant la position de  $Q$  sur la circonférence, nous tracerons une famille de droites qui enveloppent une ellipse (de cette façon, on le verra par la suite, on peut construire une ellipse en pliant le papier).



En s'appuyant sur la construction précédente, mais en prenant le point  $P$  extérieur au cercle, on obtiendra une hyperbole.



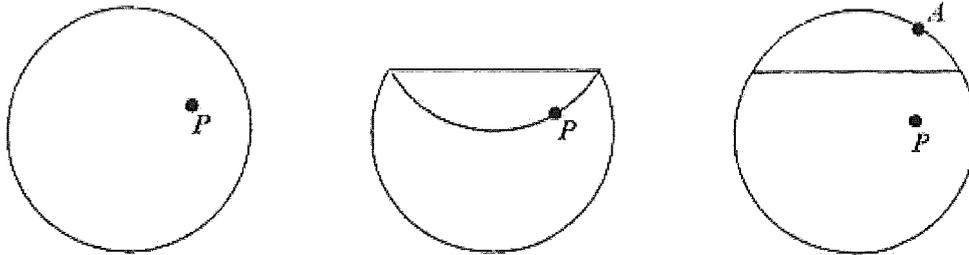
Dans notre "définition" de l'enveloppe, nous avons parlé d'une famille de courbes en général, sans que celles-ci soient nécessairement des droites. Ainsi, au lieu de prendre une famille de droites, nous pouvons aussi bien considérer une famille de cercles. Une famille de cercles, ayant leurs centres sur un cercle fixé et les tangents à l'un de ses diamètres, enveloppe une courbe particulière qui s'appelle *néphroïde*.

<sup>1</sup> Deux courbes sont tangentes en un point si elles ont une droite tangente commune en ce point.

## Construire une ellipse en pliant le papier

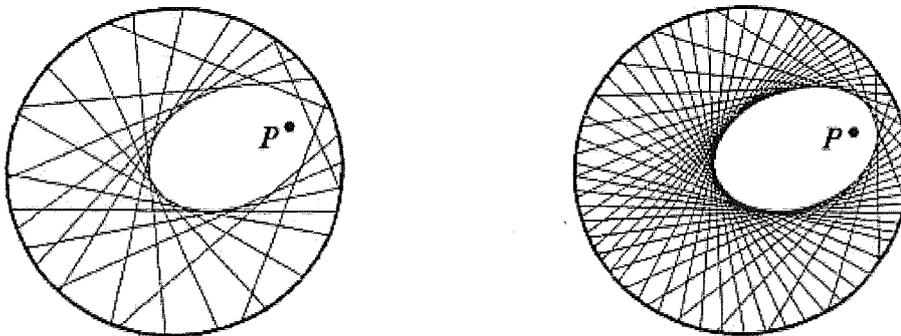
### La construction:

Prenez une feuille de papier, découpez-y un cercle et marquez un point  $P$  à l'intérieur de celui-ci. Puis pliez le papier de manière à ce qu'un point  $A$  placé sur la circonférence du cercle vienne se superposer avec le point  $P$ , comme indiqué dans la figure.

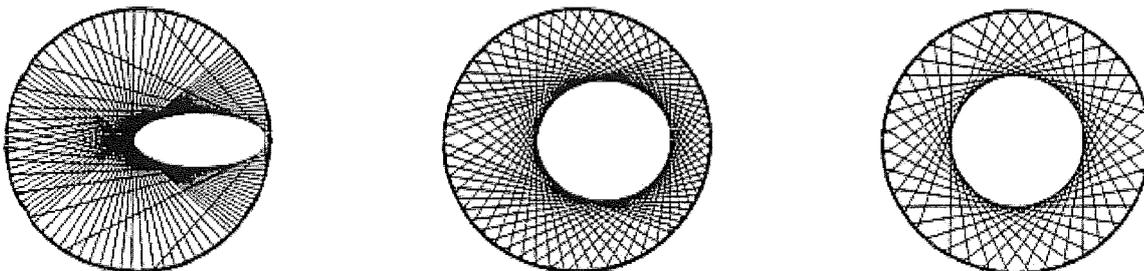


Bien évidemment vous pouvez procéder ainsi pour chaque point de la circonférence que vous décideriez de faire superposer avec le point  $P$ . Si vous le pliez plusieurs fois (en ouvrant à chaque fois la feuille avant de refaire un pliage), vous verrez apparaître l'ellipse "dessinée" par tous les plis que vous avez ainsi faits; plus précisément vous obtiendrez l'ellipse comme enveloppe des droites représentées par les plis.

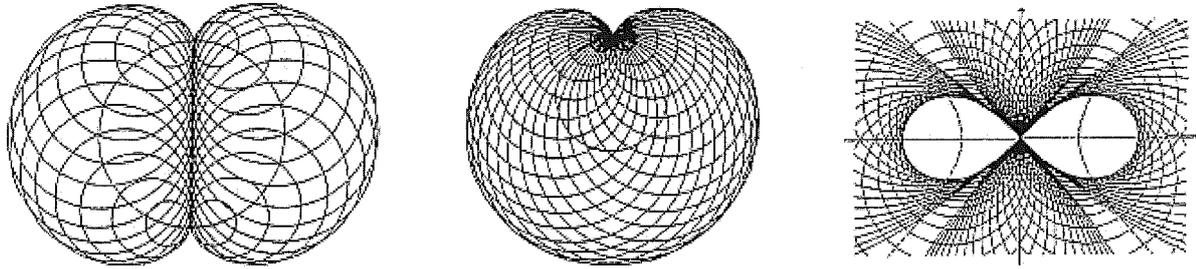
Rien qu'avec une vingtaine de pliages, vous aurez une figure assez belle; naturellement plus vous ferez de pliages, plus l'ellipse apparaîtra clairement.



Si vous faites varier la position du point  $P$  que vous avez choisi pour commencer la construction, vous pouvez obtenir des ellipses de différentes formes: d'autant plus allongées que  $P$  est loin du centre du cercle, d'autant plus "épaisses" que  $P$  est près du centre; vous obtiendrez une circonférence si vous placez  $P$  au centre du cercle.



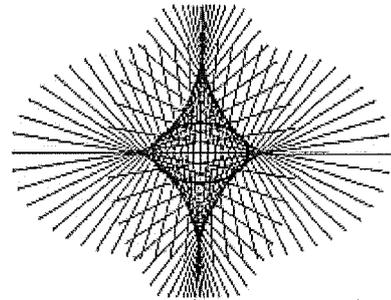
La cardioïde peut être obtenue comme l'enveloppe des cercles dont les centres sont sur un cercle fixé et passant par un point  $P$ . La famille de cercles ayant leurs centres sur une hyperbole équilatère et passant par le centre de celle-ci enveloppe la *lemniscate de Bernoulli*.



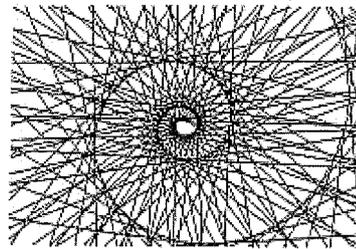
### DÉVELOPPÉE:

Le concept d'enveloppe d'une courbe est fondamental pour parler de la développée d'une courbe. Tout le monde sait ce qu'est la tangente à une courbe; dès lors il nous suffira d'entendre par droite normale à une courbe en un point la droite perpendiculaire à la droite tangente à la courbe en ce même point.

Considérons maintenant une courbe, par exemple une ellipse, et construisons sa développée: traçons toutes ses droites normales; la courbe enveloppée par ces droites est la développée de l'ellipse. De manière analogue, nous pouvons obtenir la développée du cercle, constituée par un seul point, à savoir son centre, ou la développée de la parabole, qui est le logo de l'exposition "Au delà du compas".



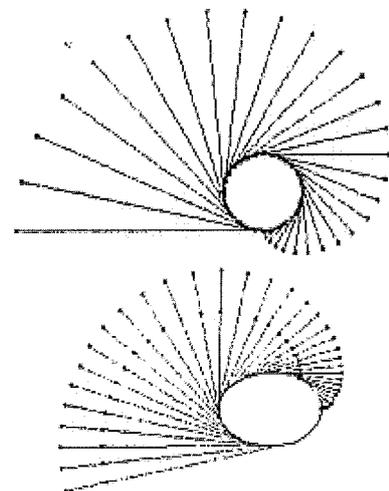
En général une courbe et sa développée sont deux courbes différentes entre elles. En certains cas, cependant, comme pour la cycloïde ou la spirale logarithmique, la développée de la courbe est identique à la courbe elle-même.



### DÉVELOPPANTE:

Étroitement liée (comme on le verra) à la développée, pour définir la développante d'une courbe  $\Gamma$ , nous devons considérer sur cette dernière un point  $O$ , que l'on appellera *point initial*.

Imaginons à présent une cordelette dont l'extrémité est fixée au point  $O$  en la tendant de manière à ce qu'elle soit tangente à la courbe en son point initial. Ensuite enroulons une portion toujours plus longue de la cordelette de sorte que la partie libre soit tangente à la courbe au point où la cordelette se détache de la courbe. L'extrémité libre de la cordelette décrira alors la développante de la courbe. La figure montre la développante d'un cercle. Par ailleurs, tandis que la développée d'une courbe est unique, la développante, elle, dépend du point initial choisi pour fixer la cordelette; c'est la raison pour laquelle il existe une infinité de développantes parallèles entre elles (dans la figure sont dessinées deux développantes d'une ellipse).



Le lien entre la développée et la développante est très étroit: on notera en effet que la courbe initiale  $\Gamma$  peut être vue comme la développée de sa développante.

**Pourquoi la construction fonctionne :**

Quand vous faites le pliage qui superpose le point  $A$  de la circonférence à  $P$ , puis vous dépliez la feuille, le pli que vous avez obtenu est la médiatrice  $t$  du segment  $AP$  (ou plus précisément, son intersection avec le disque).

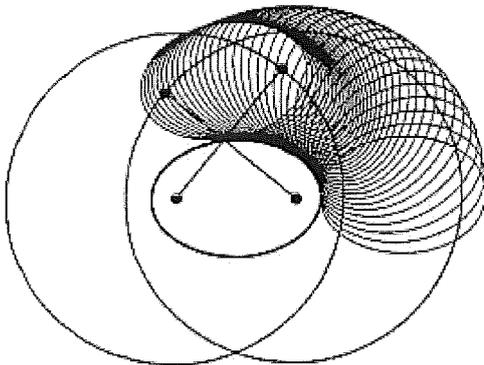
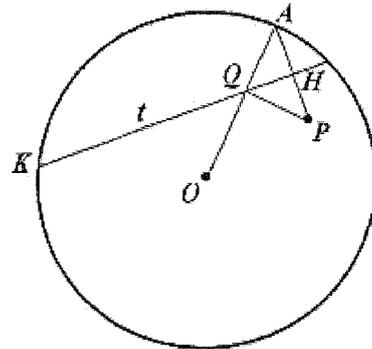
Chacun de ces médiatrices est tangent à une ellipse qui a comme foyers le point  $P$  et le centre  $O$  de la circonférence. En effet, si  $Q$  est, comme la figure l'indique, le point où le rayon  $OA$  croise  $t$ , alors les triangles  $AQH$  et  $PQH$  sont égaux.

Donc:

$$OQ + QP = OQ + QA = \text{le rayon du cercle}$$

Ainsi la somme des distances du point  $Q$  aux points  $O$  et  $P$  est toujours la même quel que soit le pliage effectué, autrement dit  $Q$  appartient à une ellipse qui a pour foyers  $O$  et  $P$ .

En outre, la droite  $t$  forme des angles égaux avec les segments  $OQ$  et  $PQ$ , puisque  $OQK = AQH = PQH$ , et donc cette droite, par la seconde propriété des foyers, est tangente à l'ellipse.



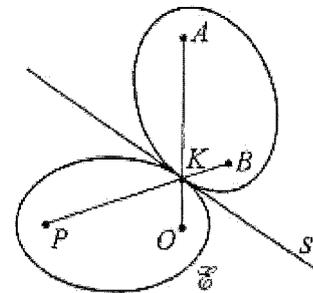
Il n'est pas inutile d'observer que ce qui vient d'être dit est strictement lié à ce que l'on peut voir dans les *Ellipses qui roulent*, où deux ellipses égales sont reliées par deux axes qui se croisent unissant chacun un foyer de la première et un foyer de la seconde comme le montre la figure.

Grâce aussi à la précédente construction, il est possible, tout en gardant fixe une ellipse, de faire rouler l'autre sur la première de manière qu'elles ne cessent de rester tangentes entre elles et que le point d'intersection des deux axes soit le point commun de tangence.

Considérons en effet l'ellipse  $\mathcal{E}$  ayant pour foyers  $O$  et  $P$  de manière à ce que la somme des distances de tous ses points de  $P$  et de  $O$  soit égale à  $r$  et que  $s$  soit la droite tangente à l'ellipse en un de ses points quelconque  $K$ . Renversant le précédent raisonnement on peut dire que les points  $A$  et  $B$ , qui sont symétriques de  $P$  et de  $O$  respectivement à  $s$ , appartiennent respectivement à la circonférence de centre  $O$  et rayon  $r$  et à celle de centre  $P$  et rayon  $r$ . Ainsi, à la variation de  $s$ ,  $P$ ,  $K$ ,  $B$ , et  $A$ ,  $K$ ,  $O$  seront des triades de points alignés; on aura alors  $PB = OA = r$ , c'est-à-dire:

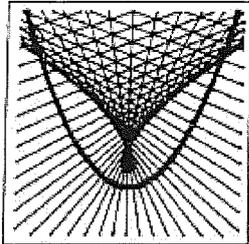
$$PB = OA = AK + OK = AK + KB = r.$$

Ainsi l'ellipse de foyers  $A$  et  $B$  symétrique de  $\mathcal{E}$  respectivement à  $s$  peut rouler sur  $\mathcal{E}$  sans "frotter", et le point de tangence est aussi le point d'intersection des segments de longueur constante  $PB$  et  $OA$ .



## AU DELÀ DU COMPAS

La géométrie des courbes



## Les spirales

Une des courbes que nous rencontrons fréquemment dans la vie quotidienne est sans aucun doute la spirale. Elle est souvent prise comme symbole du soleil en tant qu'image d'expansion: si elle tourne, en effet, elle se conserve toujours semblable à elle-même, tout en donnant l'impression de s'élargir et de se déployer à l'infini. Par ailleurs, les métaphores employées dans les expressions communes comme la spirale de la violence ou encore la spirale de la mort montrent comment le mouvement expansif de cette courbe peut se transformer en un mouvement de contraction continue qui, de manière hypnotique, fait précipiter le spectateur vers le centre. En dépit de ces images opposées, la construction des spirales est des plus simples, et c'est peut-être l'une des raisons qui a poussé les mathématiciens à s'intéresser à leurs propriétés depuis l'antiquité.

La première et la plus simple des spirales est la spirale étudiée par Archimède; qui porte d'ailleurs son nom: la *spirale d'Archimède*. Elle est engendrée par un point  $P$  se mouvant à vitesse uniforme  $v$  sur un axe lui-même en mouvement circulaire uniforme autour du point  $O$  avec une vitesse angulaire  $\omega$ . Supposons que  $P$  au départ coïncide avec  $O$ ; si on appelle  $r$  la distance de  $P$  du centre de rotation  $O$ , et  $\vartheta$  l'angle que forme  $OP$  avec la position initiale de l'axe, nous aurons:

$$\begin{cases} r = vt \\ \vartheta = \omega t \end{cases}$$

déterminant  $t$  à partir de la seconde équation et l'appliquant à la seconde équation, on obtient l'équation (en coordonnées polaires) de la courbe décrite par  $P$ :

$$r = \frac{v}{\omega} \vartheta$$

On obtient d'autres spirales en modifiant l'accélération du mouvement le long de l'axe. Supposons en effet que l'on ait  $r = a t^2$  (spirale quadratique), ou plus en général  $r = a t^n$ . Dans ce cas, on obtient l'équation:

$$r = \frac{a}{\omega^n} \vartheta^n$$

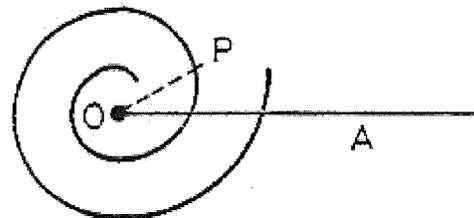
Toutes ces spirales ont leur origine au centre de rotation et vont en s'élargissant lorsque l'angle  $\vartheta$  croît.

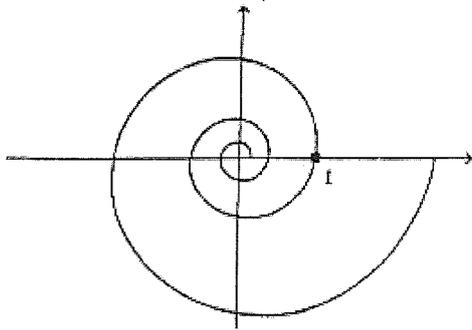
La spirale logarithmique est d'un genre différent; son équation est:

$$\vartheta = \log_A r$$

c'est-à-dire:

$$r = A^\vartheta \quad (A > 1)$$



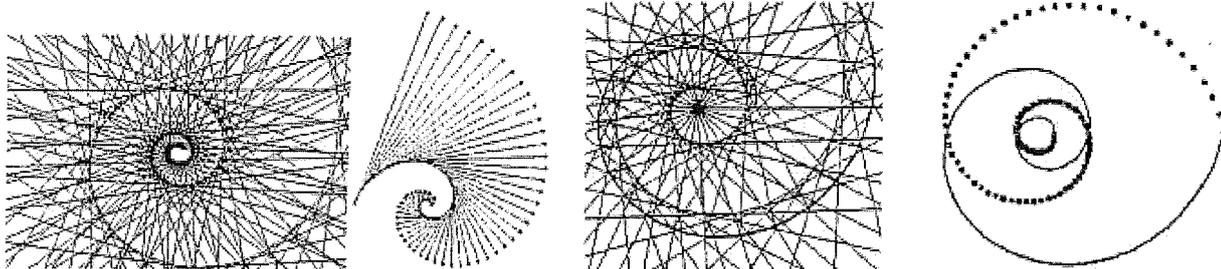
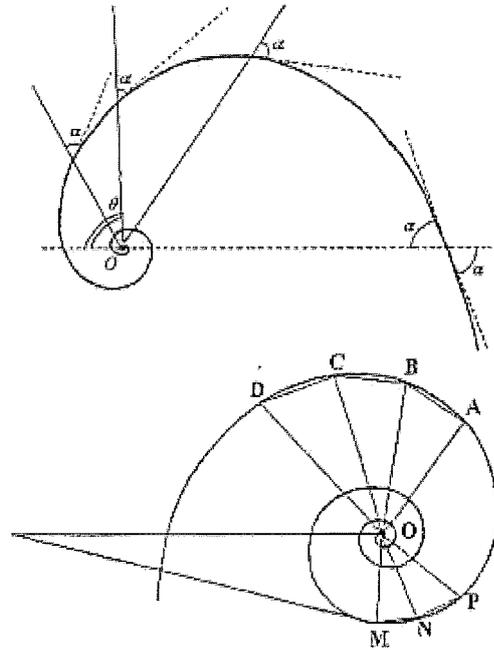


Cette spirale ne part pas du centre comme les autres, mais elle se trouve initialement (c'est-à-dire pour  $\theta = 0$ ) à la distance 1 du centre. Au fur et à mesure que  $\theta$  croît, la spirale logarithmique s'éloigne du centre comme les précédentes, mais de manière plus rapide; puis si  $\theta$  devient négatif augmentant en valeur absolue, le point décrit des révolutions en nombre infini s'approchant de plus en plus du centre, sans jamais le rejoindre: la spirale logarithmique est infini dans les deux sens.

Cette courbe se dit aussi équiangle parce qu'elle coupe ses rayons vecteurs avec un angle constant.

On peut la construire très aisément grâce à cette propriété, en démontrant que les triangles  $AOB$  et  $COD$  indiqués dans la figure à côté sont semblables. En effet, si l'on connaît deux points de la spirale  $M, N$  et que l'on construit sur  $ON$  un triangle  $ONP$  semblable au triangle  $OMN$ ,  $P$  sera un troisième point de la courbe, duquel on en déduira un quatrième, puis un cinquième, et ainsi de suite.

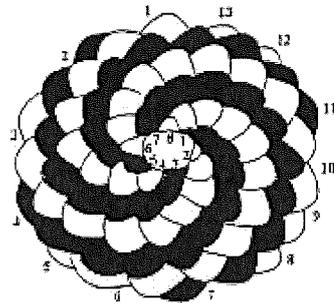
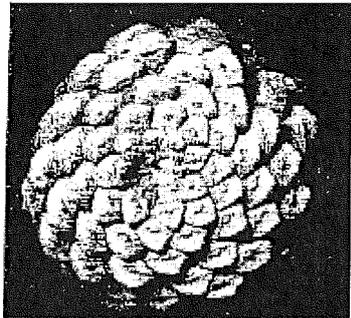
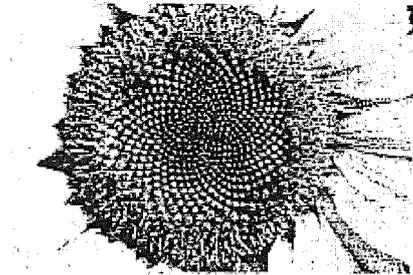
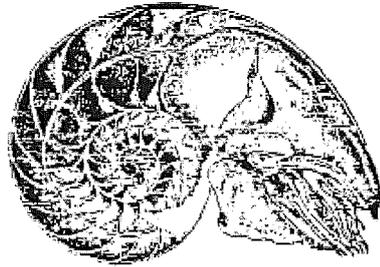
Le mathématicien Johann Bernoulli fut fasciné par la *spiralis mirabilis*. Il en découvrit plusieurs propriétés, notamment celles-ci: la spirale logarithmique se transforme en une courbe égale pour n'importe quelle inversion ayant son centre dans le pôle; la podaire respectivement à son pôle, la développée, la développante, la caustique par réflexion et par réfraction avec une source de lumière placée dans le pôle sont des spirales identiques entre elles.



Bernoulli vit dans cette faculté de se "reproduire" le symbole de la résurrection, et pour cette raison il la fit graver sur sa pierre tombale à Bâle avec l'inscription "*Eadem mutata resurgo semperdem*" (changée je ressuscite toujours la même). Malheureusement le graveur n'était pas très bon mathématicien, et au lieu de la spirale logarithmique fut gravée une spirale d'Archimède!

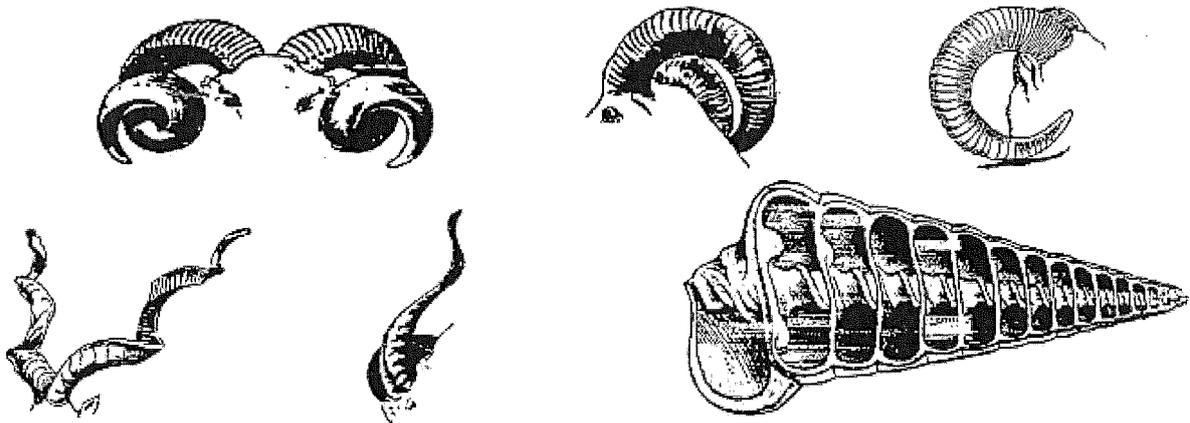
On rencontre énormément de spirales logarithmiques dans la nature, en particulier à chaque fois que l'on est en présence d'un accroissement; nous en avons des exemples dans

certains coquillages comme le Nautilus, dans les pommes de pin ou les graines au centre d'une fleur de tournesol.

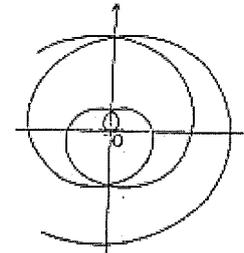
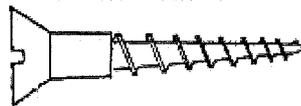
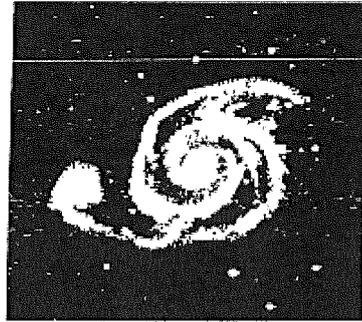
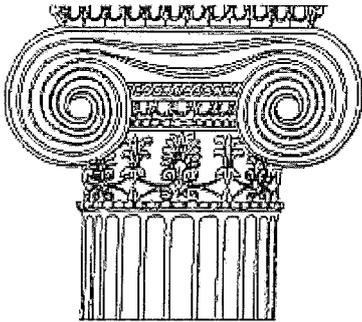


À ce propos une curiosité : dans la fleur comme dans la pomme de pin on peut observer des spirales qui tournent en sens horaire d'autres qui tournent en sens contraire: le nombre de spirales des deux genres n'est pas donné par hasard, mais il appartient toujours à une suite particulière de nombres bien connu des mathématiciens: la suite de Fibonacci. (Dans le schéma de la pomme de pin dans la figure, il y a 8 spirales dextrogyres et 13 lévogyres).

Les spirales logarithmiques en trois dimensions (obtenues en faisant croître la nouvelle coordonnée selon la même loi appliquée au rayon vecteur) se retrouvent enfin dans certains coquillages, dans les cornes de certains animaux, etc



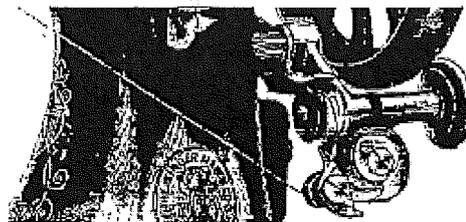
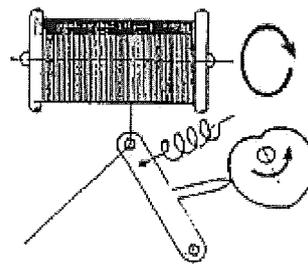
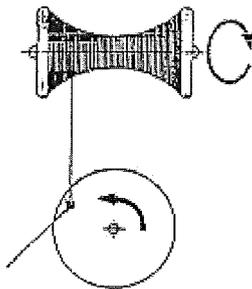
Par ailleurs, ce type de spirale n'est certainement pas le seul que l'on peut observer: toutes sortes de spirales sont présentes dans l'art, dans les galaxies, dans certains cristaux, dans les vis...



Jusqu'à présent on a considéré des spirales dont la valeur du rayon était positive. Mais si, comme c'est si souvent le cas, nous considérons l'équation  $r = a\theta$  pour des valeurs négatives de  $\theta$ , on obtiendra une autre branche de la spirale d'Archimède (fig. ci-contre). Cette courbe constitue la base de la solution d'un problème technique de grande importance.

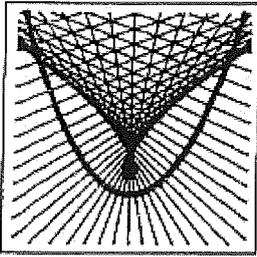
À la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, la machine à coudre Singer s'était imposée partout. Toutefois pour améliorer cette invention révolutionnaire, il fallait trouver un guide qui puisse, en bougeant avec une vitesse constante (alternativement de droite à gauche) diriger le fil en l'enroulant de manière uniforme autour de la bobine.

Si on utilise le guide le plus simple, qui se meut d'un mouvement circulaire et uniforme, le fil a tendance à s'accumuler aux extrémités (aux points où il y a inversion de sens) plutôt qu'au centre. Singer fit breveter la solution de ce problème (encore utilisée à ce jour) à en utilisant une came formée de deux morceaux de spirale d'Archimède.



## AU DELÀ DU COMPAS

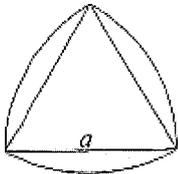
La géométrie des courbes



## Courbes de diamètre constant

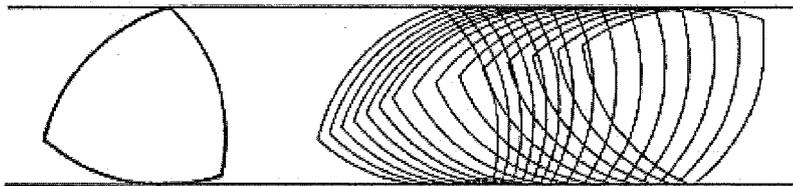
Le cercle qui roule sur une droite reste toujours dans une bande de plan comprise entre cette droite et la parallèle à une distance égale au diamètre du cercle. En roulant, le cercle est toujours en contact avec les deux droites; c'est une figure de diamètre constant.

À première vue, on pourrait croire qu'il n'y a pas d'autres figures avec la même propriété: au contraire, on peut en construire tant qu'on veut.



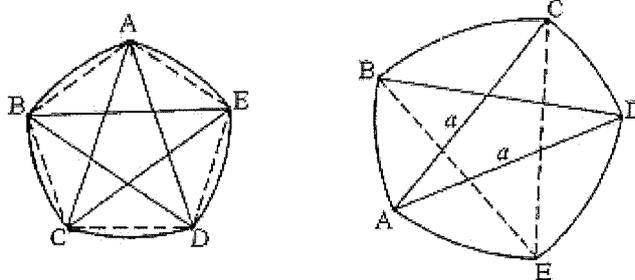
Triangle de Reuleaux

Après le cercle, la figure la plus simple qui a un diamètre constant, c'est le triangle de Reuleaux, du nom de l'ingénieur et mathématicien allemand Franz Reuleaux (1829-1905): on le construit en partant d'un triangle équilatéral de côté  $a$ , et en remplaçant chaque côté par un arc de cercle de rayon  $a$ , centré sur le sommet opposé. Le diamètre de cette figure est égale à la longueur du côté du triangle équilatéral.



Outre les triangles de Reuleaux, il y a les polygones de Reuleaux qui se construisent en utilisant un polygone régulier convexe quelconque ayant un nombre impair de côtés: ces figures sont ainsi constituées d'un nombre impair d'arcs de cercle de même rayon, et possèdent le même nombre de sommets<sup>1</sup>.

Pour obtenir des figures de diamètre constant il n'est pas nécessaire de considérer exclusivement des polygones réguliers avec un nombre impair de sommets; on peut aussi utiliser un polygone irrégulier convexe, dont les diagonales du polygone, qui joignent les sommets opposés, ont la même longueur. On peut alors tracer à partir du polygone de départ différents arcs de cercle avec un rayon égal à la diagonale du polygone.



Polygones de Reuleaux

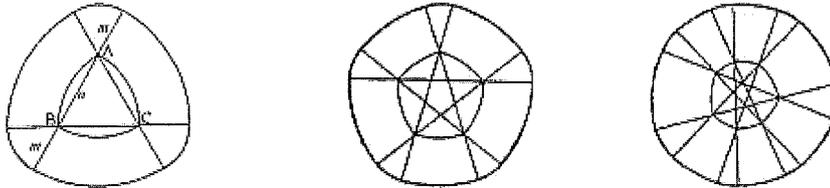
Ainsi, si on utilise cette méthode, à partir de polygones ayant  $2n+1$  côtés, on obtient des figures de diamètre constant à  $2n+1$  sommets et ayant comme côté  $2n+1$  arcs de cercle.

<sup>1</sup> Nous entendons par sommet le point de raccord entre deux arcs de cercle successifs.

Il est aussi possible de construire des figures sans "points anguleux", ou encore constituées seulement par des arcs de cercle selon une construction dite "dilatation parallèle".

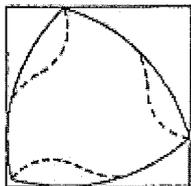
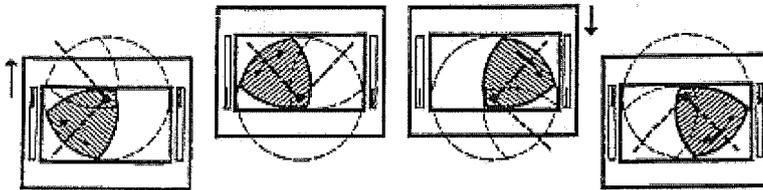
Considérons par exemple le triangle de Reuleaux ABC. Substituons les trois arcs de rayon  $a$  avec trois arcs de cercles qui leur sont parallèles, ayant donc encore centrés en A, B, C et rayon  $a + m$ , où  $m$  est une quantité arbitraire. Maintenant raccordons deux à deux ces nouveaux arcs avec trois arcs ayant pour centre A, B, C et rayon  $m$ : ce que l'on obtient est une courbe de diamètre constant  $a + 2m$  sans points anguleux.

La dilatation parallèle peut-être utilisée pour des polygones ayant un nombre impair de côtés réguliers ou irréguliers.



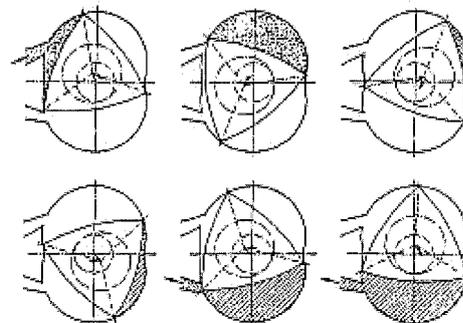
On peut démontrer que **toutes les courbes de diamètre constant  $a$  ont un périmètre égal à  $\pi a$** : ainsi la circonférence du cercle de diamètre  $a$  est égale à  $\pi a$ , mais c'est également vrai pour le triangle de Reuleaux, et pour n'importe quelle autre courbe de diamètre constant  $a$ : elles ont tous un périmètre égal à  $\pi a$ .

Les courbes de diamètre constant ont été utilisées dans de nombreuses applications mécaniques. Par exemple, le dispositif des projecteurs modernes, qui permet à la pellicule d'avancer par à-coups arrétant successivement les photogrammes, est constitué par un cadre rectangulaire, qui ne peut bouger que verticalement, dans lequel un triangle de Reuleaux peut tourner autour de l'un de ses sommets. La rotation du triangle de Reuleaux déclenche le déplacement vers le haut du cadre rectangulaire, qui permet l'avancement d'une nouvelle portion de pellicule et ainsi la vision du photogramme suivant.



Puisque le triangle de Reuleaux peut tourner à l'intérieur d'un carré se maintenant en contact simultanément avec les quatre côtés, et puisque pendant la rotation chacun de ses sommets trace une trajectoire plus ou moins carrée, on peut construire une mèche de perceuse qui réalise des trous carrés, dont la section est un triangle de Reuleaux rendu concave par trois fissures qui permettent la coupe des bords, tout en évacuant les copeaux.

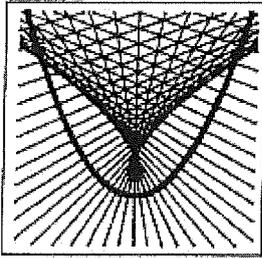
Une autre importante application mécanique est celle du moteur Wankel, où la section du piston qui tourne est un triangle de Reuleaux: après que le carburant ait été injecté dans la chambre de combustion du moteur, la rotation du moteur produit la compression, la combustion, puis la phase d'expansion, enfin l'expulsion des produits de la combustion.



*Les phases du moteur Wankel*

## AU DELÀ DU COMPAS

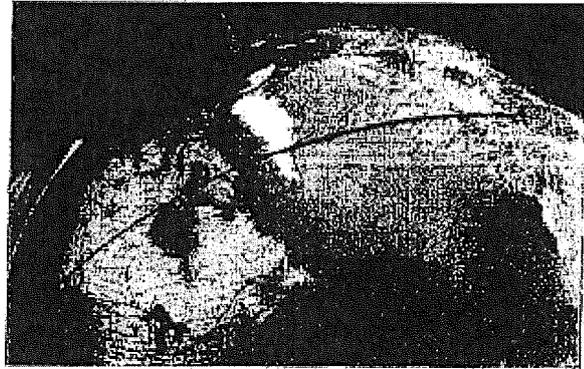
La géométrie des courbes



## Le chemin le plus court

Le chemin le plus court entre deux points est le segment de droite. Comme tous les lieux communs, celui-ci n'est vrai que dans un certain nombre de cas. Il est évident que si l'on veut traverser une place, il faut la traverser en ligne droite. Par contre, pour aller de Pise à San Francisco, la ligne droite n'est plus la solution idéale; il faut se déplacer sur une courbe. Laquelle?

Pour répondre à cette question, on peut faire comme les Egyptiens : tirer une corde, mais sur une mappemonde, bien sûr. La solution, à savoir le chemin le plus court entre ces deux points, la *géodésique*, est un cercle maximal, c'est-à-dire un cercle qu'on obtient en coupant la sphère avec un plan qui passe par le centre de la sphère et les deux points en question. C'est bien pour cette raison que les vols transocéaniques passent souvent près des pôles.



Si le problème n'est pas situé sur une sphère, mais sur une autre surface, on trouvera un autre système de géodésiques, sur lesquelles on peut se déplacer pour trouver le trajet le plus court possible.

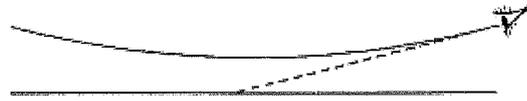
Mais il n'est pas nécessaire de se déplacer sur des surfaces courbes pour avoir des géodésiques courbes. Elles sont aussi la solution pour une surface plane, si l'on décide de mesurer les distances d'une manière inhabituelle, mais qui n'est pas moins logique. Ainsi par exemple, il est souvent plus efficace de rendre le plus court possible le temps du trajet, et non sa longueur dans l'espace. S'il s'agit de traverser une place, il n'y a pas de différence : on se déplace à une vitesse constante, donc le temps est proportionnel à l'espace parcouru. Mais supposons, par exemple, que nous nous trouvions dans une région où le sol comporte des zones de sables mouvants : dans ce cas, il est important d'éviter de s'enfoncer dans le sable, même si cela doit allonger le chemin. Dans ce cas, si on définit la plus courte distance entre deux points par le temps employé pour aller d'un point à un autre, les géodésiques ne sont plus des droites, mais des courbes qui évitent, autant que possible les zones difficiles dans toute la mesure du possible.

Le trajet des rayons lumineux offre une excellente illustration de cette situation. Le principe de Fermat dit que pour aller d'un point à un autre, la lumière suit le chemin auquel correspond un temps minimum. Puisque la vitesse de la lumière dans l'air est pratiquement constante, la propagation de la lumière a lieu habituellement en ligne droite. Mais si la lumière passe de l'air dans l'eau, ou dans du verre (où la vitesse est inférieure), il conviendra de diminuer le parcours dans l'eau, même s'il faut pour cela augmenter le parcours dans l'air,

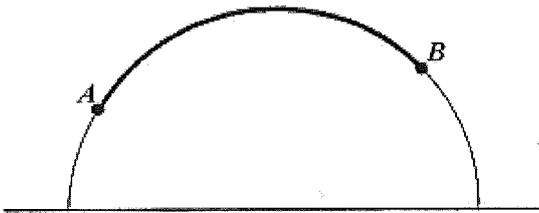
et donc le parcours total. C'est la cause du phénomène de la réfraction (un bâton partiellement immergé dans l'eau semble cassé); et c'est aussi le principe de la construction des lentilles.

Par ailleurs, même dans l'air, les rayons ne suivent que rarement un parcours rectiligne. Par exemple, quand un grand échauffement provoque une différence de densité entre des couches d'air, la lumière avance à des vitesses sensiblement différentes à travers ces couches d'air. Dans une telle situation, il peut arriver que les rayons reviennent vers le haut, si bien que, quelqu'un regardant le sol de loin, voit le ciel et croit qu'il voit de l'eau.

C'est le phénomène du mirage, qui est commun dans les déserts, ainsi que l'été sur les autoroutes.



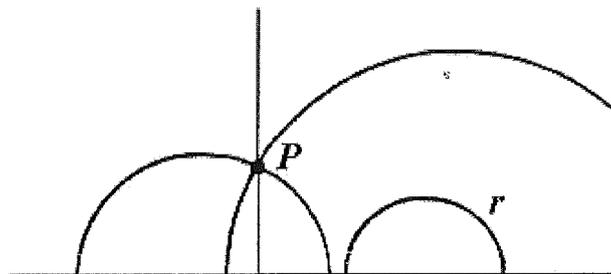
Toujours sur ce même sujet, on peut citer un exemple d'intérêt purement mathématique: le *demi-plan de Poincaré*. On suppose qu'on se déplace sur un terrain délimité par une ligne horizontale (qu'on appellera l'horizon) et que ce terrain est de plus en plus difficile, au fur et à mesure qu'on s'approche de l'horizon. Ainsi, la vitesse avec laquelle on se déplace est proportionnelle à la distance de l'horizon. On comprend que pour se déplacer sur ce terrain, il n'est pas efficace d'avancer en ligne droite; il est plus utile de s'éloigner de l'horizon, pour se déplacer plus rapidement. Dans ce cas, un calcul exact est possible : les géodésiques sont des droites perpendiculaires à l'horizon ainsi que des demi-cercles ayant leur centre sur l'horizon.

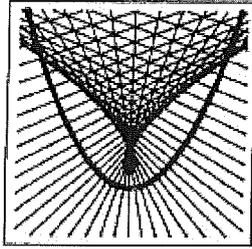


Cela équivaut à dire que pour aller d'un point  $A$  à un point  $B$ , la ligne droite ne représente le chemin le plus court que si  $A$  et  $B$  sont sur une ligne perpendiculaire à l'horizon; dans tous les autres cas, le chemin le plus bref (en termes de temps) est l'arc de cercle qui passe par  $A$  et  $B$  et qui a son centre sur l'horizon.

Dans tous ces cas, les géodésiques ont les mêmes propriétés que les droites. Par exemple, dans le demi-plan de Poincaré, par deux points passe une géodésique et une seule. Par contre, on ne peut pas dire que les géodésiques ont toutes les propriétés des droites. En effet, si l'on dit être parallèles deux droites (c'est-à-dire deux géodésiques) qui n'ont aucun point en commun, on voit tout de suite que, si l'on donne une droite (géodésique)  $r$  et un point  $P$  qui ne se trouve pas sur cette dernière, par  $P$  passe une infinité de droites parallèles à  $r$ . Il s'avère donc que dans le demi-plan de Poincaré, le postulat des parallèles n'est pas vrai; cette géométrie est *non-euclidienne*.

*Géodésiques dans le demi-plan de Poincaré. Les "droites" qui passent par  $P$  sont toutes parallèles à la droite  $r$ .*





## Les fractales

Au premier abord, les figures qui portent ce nom un peu bizarre de *fractales* ressemblent à des objets aux contours découpés. Leur nature intrinsèquement complexe se révèle seulement quand on essaie d'en examiner les frontières à la loupe.

Normalement, quand on agrandit le contour irrégulier d'un objet, surtout s'il s'agit d'une forme définie mathématiquement, on s'attend à voir les anomalies s'adoucir au fur et à mesure de l'agrandissement, jusqu'au moment où elles cèdent la place à une sinuosité régulière, que seule la différence d'échelle faisait apparaître comme une irrégularité. Rien de tout cela n'arrive avec les fractales: au contraire, tout changement d'échelle révèle des concrétions nouvelles et inattendues, selon une hiérarchie de minuties toujours plus subtiles. Ce qui donnait l'air de n'être qu'un profil découpé, apparaît maintenant comme une structure extrêmement variée, vouée à se ramifier ultérieurement à chaque agrandissement. L'irrégularité des fractales est infiniment stratifiée. En dépit de l'extrême variété des formes, la génération de nombre de ces objets est particulièrement simple; un logiciel informatique très simple y suffit.

Imaginons de la poussière posée sur une surface plane, où ses particules peuvent se déplacer à notre guise, et rester en place une fois que nous arrêtons de les mouvoir. Si on distribue cette matière autrement que sa disposition d'origine, on opère une *transformation* du plan, qui fait que la particule qui occupait le point  $P$  se trouve en une nouvelle position, que l'on indiquera avec  $T(P)$  pour nous rappeler qu'il s'agit du *transformé* de  $P$ .

Par exemple, si  $P$  est défini par les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , on pourra décrire la transformation de  $T$  donnant les coordonnées  $(x_1, y_1)$  du point  $T(P)$ ; naturellement ces coordonnées dépendront de celles de  $P$ :

$$\begin{cases} x_1 = x_1(x, y) \\ y_1 = y_1(x, y) \end{cases}$$

Supposons maintenant qu'on effectue une seconde fois la transformation  $T$ . La particule, qui était originairement en  $P$  et qui a été déplacée en  $T(P)$ , ira se placer en un nouveau point  $T(T(P))$ , c'est-à-dire  $T^2(P)$ . Renouvelant encore, puis encore, la transformation, le point continuera de se mouvoir en  $T^3(P)$ , puis en  $T^4(P)$ , et ainsi de suite, pour finir, après un nombre  $m$  de transformation, en  $T^m(P)$ .

Supposons à présent un cercle  $\Omega$  de rayon assez grand et posons-nous le problème suivant: *après combien de répétitions la particule initialement en  $P$ , sortira de  $\Omega$  ?* D'évidence, la réponse dépendra de la position initiale  $P$  de la particule. Il y des zones desquelles la particule sort de  $\Omega$  presque immédiatement, alors qu'il y aura d'autres secteurs du plan qui seront plus tenaces, dans

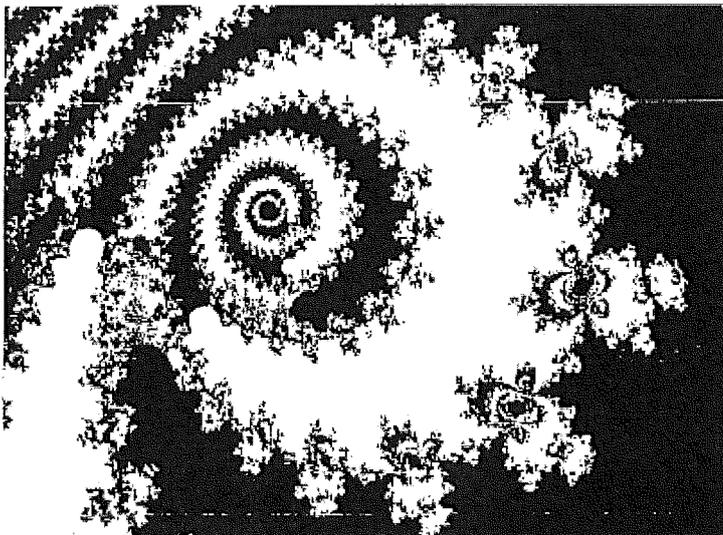
le sens que l'on ne verra pas la particule sortir de  $\Omega$  malgré le nombre maximum d'itérations que nous avons fixé.

C'est ici le cas des exemples les plus simples des *ensembles de Julia*, qui s'obtiennent à partir de transformations  $T$  douée d'un seul point fixe attractif  $P_0$  – tous les points suffisamment près de  $P_0$  sont déplacés en des points encore plus près de lui, tandis que tous les points suffisamment lointains de l'origine sont déplacés en des points encore plus lointains.

En cette situation, tous les points du plan qui ne sont pas des points fixes de  $T$  tomberont en trois groupes distincts: ceux dont les images s'éloignent de manière indéfinie, ceux dont les images s'approchent de  $P_0$ , et ceux qui n'ont aucun de ces deux comportements et qui séparent les deux zones. Ce dernier ensemble de points constitue l'ensemble de Julia de la transformation, et pour la plupart des transformations, il a une structure fractale.

Pour se faire une idée d'une telle structure, on peut procéder de la manière suivante. Après avoir fixé une région limitée  $\Omega$  du plan qui contient l'ensemble des points attirés par  $P_0$ , pour chaque point  $P$  de  $\Omega$  calculons un nombre suffisamment grand d'itérations de la transformation, et colorons le point de départ avec une couleur différente selon le nombre d'itérations nécessaires pour sortir de  $\Omega$  – on choisira par exemple la couleur 0 (noir) pour les points qui restent à l'intérieur de  $\Omega$ .

Comme on peut s'y attendre, si un point  $P$  nécessite  $N$  (disons 50) réitérations pour sortir de  $\Omega$ , les points proches de  $P$  auront besoin d'un nombre d'itérations proche de 50 (par exemple entre 45 et 55). En revanche, quand on se déplace vers des zones caractérisées par un  $N$  de plus en plus grand, on voit que le nombre de itérations varie de plus en plus rapidement en passant d'un point à un autre qui lui est proche. Se forment ainsi des figures très découpées, dont les couleurs se mélangent en des formes imprévisibles, mais jamais au hasard: il y a de la méthode dans cette folie. La beauté des fractales vient de ces figures toujours nouvelles et inattendues.



*Ensemble de Julia pour la  
transformation*

$$T(z) = \left(1 + \frac{i}{10}\right) \text{sen } z$$

( $z$  nombre complexe)