Ex16 Effet de serre

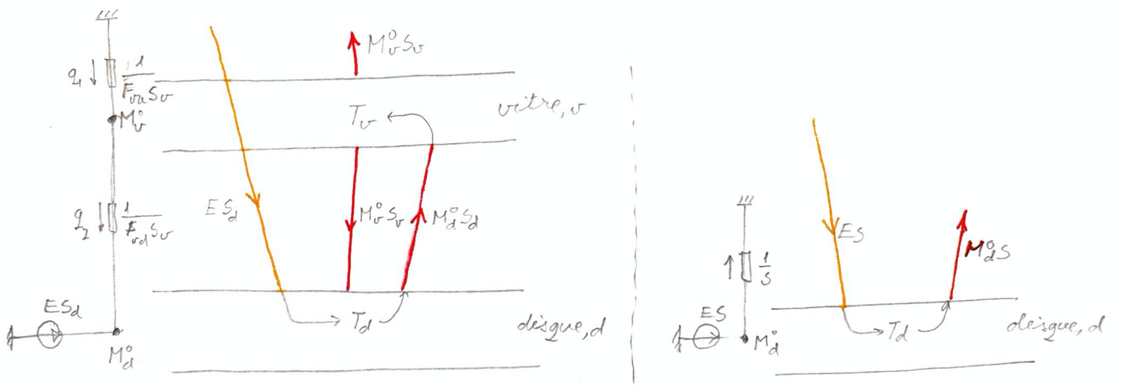
Le disque supposé noir sur la face éclairée et parfaitement réfléchissant sur la face opposée, reçoit le rayonnement solaire, $E = 800$ W/m^2 à travers une vitre. Cette vitre est parallèle au disque. L'ensemble est perpendiculaire au rayonnement solaire.
Le disque est parfaitement absorbant en courte et en grande longueur d'onde sur la face éclairée, $\alpha_{de} = 1$, et parfaitement réfléchissant sur la face opposée, $\rho_{do} = 1$.

a) La vitre est considérée comme parfaitement transparente au rayonnement solaire de courte longueur d'onde (CLO), $\tau_{v,CLO} = 1$, et parfaitement absorbante pour le rayonnement du disque de grande longueur d'onde (GLO), $\alpha_{v,GLO} = 1$. Calculer la température d'équilibre du disque et la comparer avec celle du disque non protégé.

b) La vitre a un facteur de réflexion $\rho_{v,CLO}$ et un facteur de transmission $\tau_{v,CLO}$ pour le rayonnement solaire (CLO). Elle a un facteur de réflexion $\rho_{v,GLO}$ et un facteur de transmission $\tau_{v,GLO}$ pour le rayonnement qu'elle reçoit du disque (GLO). Calculer la température d'équilibre prise par le disque ainsi protègé et la comparer avec celle du disque non protègé.
Application numérique : $\rho_{v,CLO} = 0.05$, $\tau_{v,CLO} = 0.95$, $\rho_{v,GLO} = 0.30$, $\tau_{v,GLO} = 0.05$

c) Traiter les deux questions précédentes en considérant que l'ambiance environnante, à la température T_a, rayonne au-dessus de la vitre comme un corps noir.
Application numérique : $T_a = 300$ K

a) Vitre parfaitement absorbante en GLO, disque corps noir



a) Disque avec vitre

Modèle :
2 nœuds de température et une source de flux. Les surfaces du disque et de la vitre sont égales, $S_d = S_v$

1. Résolution en utilisant deux bilans thermiques :

Les bilans sur la vitre et sur le disque sont :

$$\begin{cases} S_d M_d^o - 2 S_v M_v^o = 0 \\ S_d E + S_v M_v^o - S_d M_d^o = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Deux équations avec deux inconnues, M_s^o et M_d^o. En résolvant :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}$$

on obtient $\begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 2E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 800 \\ 1600 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} T_v \\ T_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{M_v^o/\sigma} \\ \sqrt[4]{M_d^o/\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 344.65\text{ K} \\ 409.86\text{ K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71.50\text{ °C} \\ 136.71\text{ °C} \end{bmatrix}$

2. Résolution en utilisant le circuit thermique

Les conditions nécessaires pour la modélisation par circuits thermiques sont remplies (la vitre est complètement transparente en CLO et pas transparente en GLO, le disque est un corps noir).
Le facteur de forme entre le disque et la vitre est unitaire, $F_{vd} = 1$. Le facteur de forme entre la vitre et le milieu ambiant est unitaire, également, $F_{va} = 1$.
Les bilans (1) sur la vitre et le disque peuvent être écrits :

$$\begin{cases} S_v(M_v^o - M_d^o) + S_v M_v^o = 0 \\ S_v(M_v^o - M_d^o) = -S_d E \end{cases}$$

ce qui est équivalent au circuit thermique caractérisé par :

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} F_{vd}S_v & 0 \\ 0 & F_{va}S_v \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\mathbf{f} = [0 \quad E]^T$

Pour l'unité de surface, $S_v = 1\text{ m}^2$, on obtient :
$\begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 800 \\ 1600 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} T_v \\ T_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{M_v^o/\sigma} \\ \sqrt[4]{M_d^o/\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 344.65\text{ K} \\ 409.86\text{ K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71.50\text{ °C} \\ 136.71\text{ °C} \end{bmatrix}$

Disque sans vitre

1. Résolution en utilisant le bilan sur le disque :

$$ES_d - M_d^o S_d = 0$$

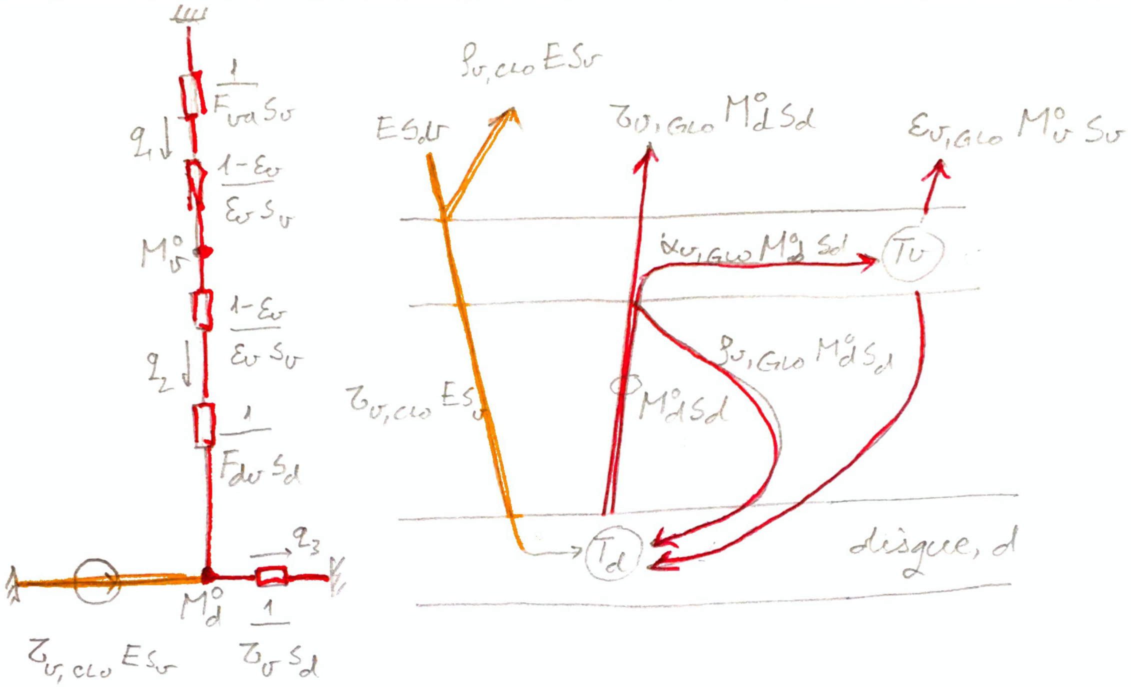
D'ou : $M_d^0 = E$; $T_d = \sqrt[4]{M_d^o/\sigma} = 344.56\text{ K} = 71.50\text{ °C}$

2. Résolution avec le circuit thermique :

$$\mathbf{A} = -1; \mathbf{G} = F_{da}S_d; \mathbf{b} = 0; \mathbf{f} = S_d E$$

$M_d^o = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{f} = E = 800\text{ W/m}^2$; $T_d = \sqrt[4]{M_d^o/\sigma} = 344.56\text{ K} = 71.50\text{ °C}$

b) Vitre partiellement transparente en GLO, disque corps noir



1. Résolution en utilisant deux bilans thermiques

Les bilans thermiques sur la vitre et sur le disque :

$$\begin{cases} \alpha_{v,GLO} S_d M_d^o - 2\varepsilon_{v,GLO} S_v M_v^o = 0 \\ \tau_{v,CLO} S_v E + \rho_{v,GLO} S_d M_d^o + \varepsilon_{v,GLO} S_v M_v^o - S_d M_d^o = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Deux équations avec deux inconnues, M_s^o et M_d^o. En résolvant :

$$\begin{bmatrix} -2\varepsilon_{v,GLO} & \varepsilon_{v,GLO} \\ -\varepsilon_{v,GLO} & 1-\rho_{v,GLO} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{v,CLO} E \end{bmatrix}$$

on obtient la solution

$$\begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\tau_{v,CLO} E}{2-\varepsilon_{v,GLO}-2\rho_{v,GLO}} \\ \dfrac{2\tau_{v,CLO} E}{2-\varepsilon_{v,GLO}-2\rho_{v,GLO}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1013.3 \text{ W/m}^2 \\ 2026.7 \text{ W/m}^2 \end{bmatrix}$$

ou, en tenant compte que $1-\rho_{v,GLO} = \alpha_{v,GLO} + \tau_{v,GLO}$, en résolvant :

$$\begin{bmatrix} -2\varepsilon_{v,GLO} & \varepsilon_{v,GLO} \\ -\varepsilon_{v,GLO} & \varepsilon_{v,GLO}+\tau_{v,GLO} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{v,CLO} E \end{bmatrix}$$

on obtient la solution

$$\begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\tau_{v,CLO} E}{\varepsilon_{v,GLO}+2\tau_{v,GLO}} \\ \dfrac{2\tau_{v,CLO} E}{\varepsilon_{v,GLO}+2\tau_{v,GLO}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1013.3 \text{ W/m}^2 \\ 2026.7 \text{ W/m}^2 \end{bmatrix}$$

On obtient

$$\begin{bmatrix} T_v \\ T_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{M_v^o/\sigma} \\ \sqrt[4]{M_d^o/\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 365.63\ \text{K} \\ 434.81\ \text{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92.48\ °\text{C} \\ 161.66\ °\text{C} \end{bmatrix}$$

2. Résolution en utilisant le circuit thermique

La vitre est partiellement transparente en GLO, $\tau_{v,GLO} \neq 0$; le flux transmis par la vitre, qui s'échappe de la multi réflexion, est modélisé par la conductance $\tau_{vGLO} S_v$.
Le facteur de forme entre le disque et la vitre est unitaire, $F_{vd} = 1$. Le facteur de forme entre la vitre et le milieu ambiant est unitaire, également, $F_{va} = 1$.

Le système (2) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{v,GLO} S_v M_v^o + \varepsilon_{v,GLO} S_v (M_v^o - M_d^o) = 0 \\ -\tau_{v,GLO} S_d M_d^o + \varepsilon_{v,GLO} S_v (M_v^o - M_d^o) = -\tau_{v,CLO} S_v E \end{cases}$$

Ce qui représente un circuit thermique chartérisé par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{F_{va} S_v} + \frac{1 - \varepsilon_{vGLO}}{\varepsilon_{vGLO} S_v}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{F_{vd} S_v} + \frac{1 - \varepsilon_{vGLO}}{\varepsilon_{vGLO} S_v}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{vGLO} S_v \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [0 \quad \tau_{vCLO} E S_v]^T$$

Pour l'unité de surface, $S_v = 1\ \text{m}^2$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{\tau_{v,CLO} E}{\varepsilon_{v,GLO} + 2\tau_{v,GLO}} \\ \dfrac{2\tau_{v,CLO} E}{\varepsilon_{v,GLO} + 2\tau_{v,GLO}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1013.3\ \text{W/m}^2 \\ 2026.7\ \text{W/m}^2 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} T_v \\ T_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{M_v^o/\sigma} \\ \sqrt[4]{M_d^o/\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 365.63\ \text{K} \\ 434.81\ \text{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 92.48\ °\text{C} \\ 161.66\ °\text{C} \end{bmatrix}$$

c) Ambiance corps noir

c.1) Vitre parfaitement transparente, disque corps noir

1. Résolution en utilisant deux bilans thermiques :

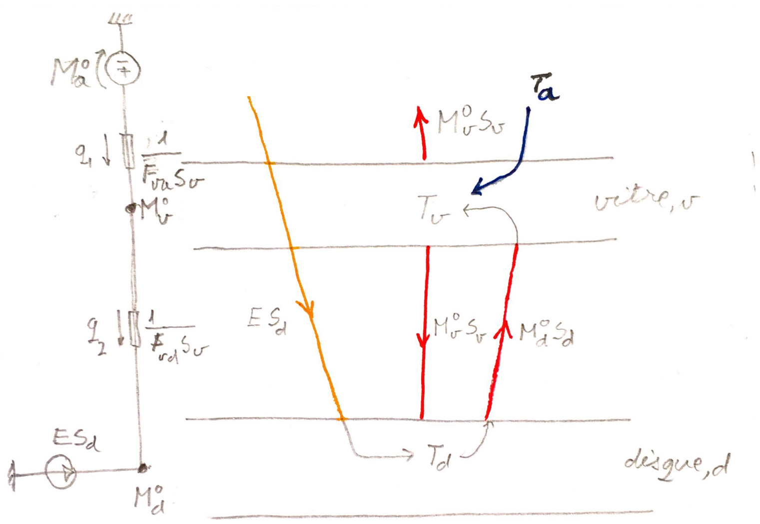
sur la vitre : $S_d M_d^o - 2 S_v M_v^o + S_v M_a^o = 0$
sur le disque : $S_d E + S_v M_v^o - S_d M_d^o = 0$
où $M_a^o = \sigma T_a^4$

Deux équations avec deux inconnues, M_s^o et M_d^o. En résolvant :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_a^o \\ E \end{bmatrix}$$

on obtient :

$$\begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E + M_a \\ 2E + M_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1259.3\ \mathrm{W/m^2} \\ 2059.3\ \mathrm{W/m^2} \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} T_v \\ T_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{M_v^o/\sigma} \\ \sqrt[4]{M_d^o/\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 386.04\ \mathrm{K} \\ 436.55\ \mathrm{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112.89\ \mathrm{°C} \\ 163.40\ \mathrm{°C} \end{bmatrix}$$



2. Circuit thermique :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \mathbf{G} = \begin{bmatrix} F_{vd}S_v & 0 \\ 0 & F_{va}S_v \end{bmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} M_a^o \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [0 \quad E]^T$$

Pour l'unité de surface, $S_v = 1\ \mathrm{m}^2$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{b} + \mathbf{f}) = \begin{bmatrix} 1259.3\ \mathrm{W/m^2} \\ 2059.3\ \mathrm{W/m^2} \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} T_v \\ T_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{M_v^o/\sigma} \\ \sqrt[4]{M_d^o/\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 386.04\ \mathrm{K} \\ 436.55\ \mathrm{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 112.89\ \mathrm{°C} \\ 163.40\ \mathrm{°C} \end{bmatrix}$$

c) Ambiance corps noir

---

2. Vitre partiellement transparente en GLO, disque corps noir

1. Résolution en utilisant deux bilans thermiques :

Les bilans thermiques sur la vitre et sur le disque :

$$\begin{cases} \alpha_{v,GLO}S_dM_d^o - 2\varepsilon_{v,GLO}S_vM_v^o + \alpha_{v,GLO}S_dM_a^o = 0 \\ \tau_{v,CLO}S_vE - S_dM_d^o + \rho_{v,GLO}S_dM_d^o + \varepsilon_{v,GLO}S_vM_v^o + \tau_{v,GLO}S_dM_a^o = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Deux équations avec deux inconnues, M_s^o et M_d^o. En résolvant :

$$\begin{bmatrix} 2\varepsilon_{v,GLO} & -\varepsilon_{v,GLO} \\ -\varepsilon_{v,GLO} & 1 - \rho_{v,GLO} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{v,GLO}M_a^o \\ \tau_{v,CLO}E + \tau_{v,GLO}M_a^o \end{bmatrix}$$

on obtient la solution

$$\begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1442.0 \text{ W/m}^2 \\ 2424.7 \text{ W/m}^2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} T_v \\ T_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{M_v^o/\sigma} \\ \sqrt[4]{M_d^o/\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 401.44 \text{ K} \\ 457.59 \text{ K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128.29 \text{ °C} \\ 184.44 \text{ °C} \end{bmatrix}$$

2. Circuit thermique :
Le système d'équations (3) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \varepsilon_{v,GLO} S_d M_d^o - 2\varepsilon_{v,GLO} S_v M_v^o + \varepsilon_{v,GLO} S_d M_a^o = 0 \\ \tau_{v,CLO} S_v E - S_d M_d^o + \rho_{v,GLO} S_d M_d^o + \varepsilon_{v,GLO} S_v M_v^o + \tau_{v,GLO} S_d M_a^o = 0 \end{cases}$$

ou, en tenant compte que $1 - \rho_{v,GLO} = \alpha_{v,GLO} + \tau_{v,GLO}$,

$$\begin{cases} \varepsilon_{v,GLO} S_d (M_d^o - M_v^o) + \varepsilon_{v,GLO} S_d (M_a^o - M_v^o) = 0 \\ \tau_{v,CLO} S_v E - \alpha_{v,GLO} S_d M_d^o - \tau_{v,GLO} S_d M_d^o + \varepsilon_{v,GLO} S_v M_v^o + \tau_{v,GLO} S_d M_a^o = 0 \end{cases}$$

En exprimant en fonction des différences des émittances :

$$\begin{cases} \varepsilon_{v,GLO} S_d (M_v^o - M_d^o) + \varepsilon_{v,GLO} S_d (M_v^o - M_a^o) = 0 \\ \tau_{v,CLO} S_v E + \varepsilon_{v,GLO} S_d (M_v^o - M_d^o) + \tau_{v,GLO} S_d (M_a^o - M_d^o) = 0 \end{cases}$$

Ces équations correspondent au circuit thermique

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{F_{va} S_v} + \frac{1 - \varepsilon_{vGLO}}{\varepsilon_{vGLO} S_v}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{F_{vd} S_v} + \frac{1 - \varepsilon_{vGLO}}{\varepsilon_{vGLO} S_v}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{vGLO} S_v \end{bmatrix};$$

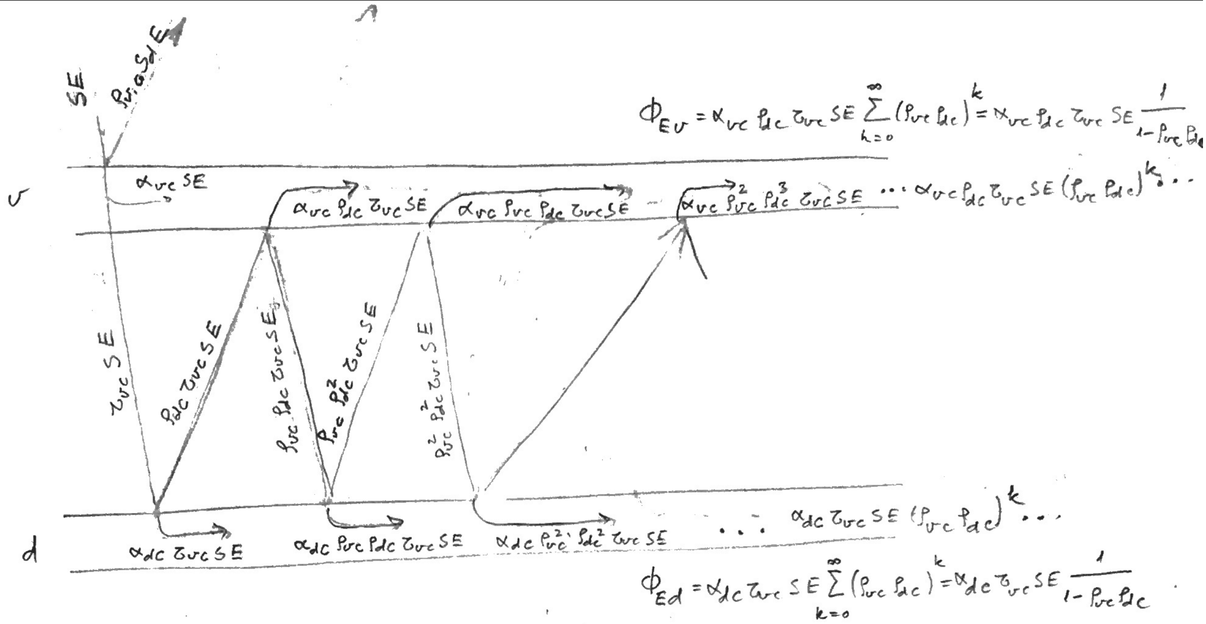
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} M_a \\ 0 \\ -M_a \end{bmatrix}; \ \mathbf{f} = [0 \quad \tau_{vCLO} E S_v]^T$$

On obtient :

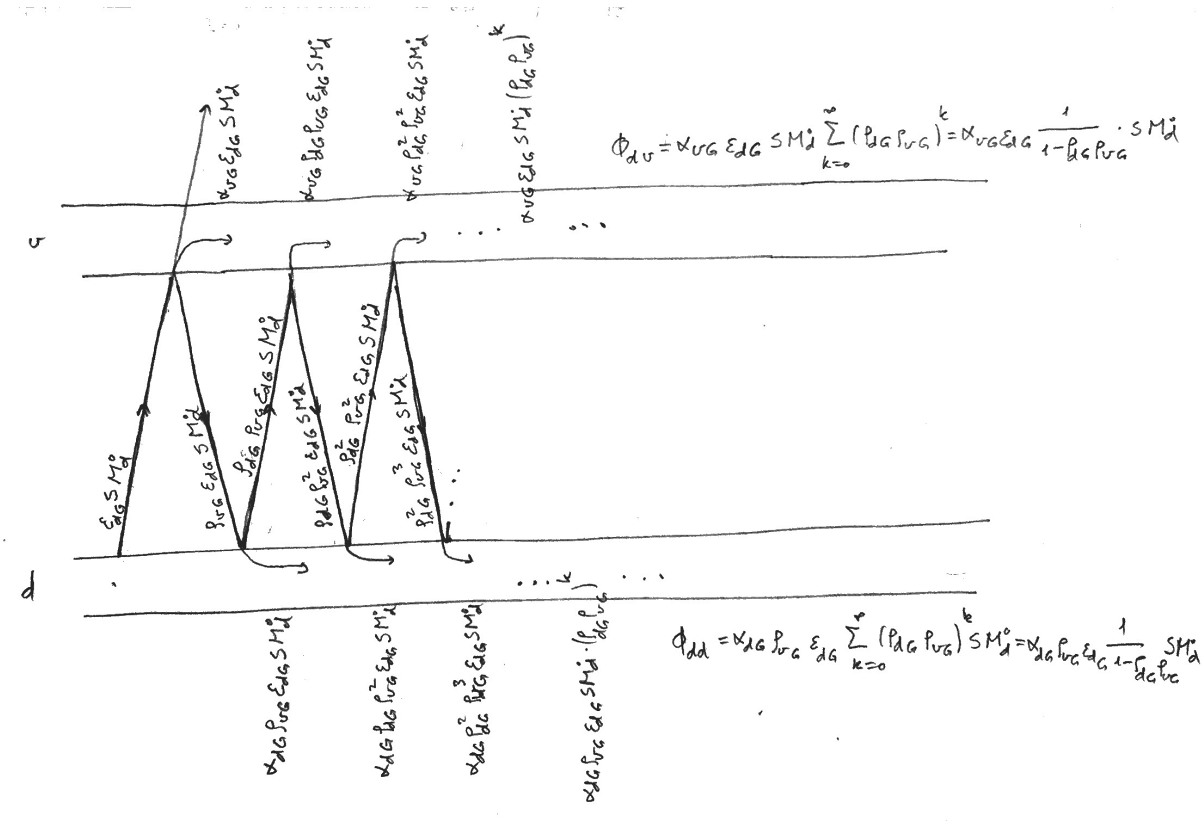
$$\begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f}) = \begin{bmatrix} 1442.0 \text{ W/m}^2 \\ 2424.7 \text{ W/m}^2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} T_v \\ T_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{M_v^o/\sigma} \\ \sqrt[4]{M_d^o/\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 401.44 \text{ K} \\ 457.59 \text{ K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128.29 \text{ °C} \\ 184.44 \text{ °C} \end{bmatrix}$$

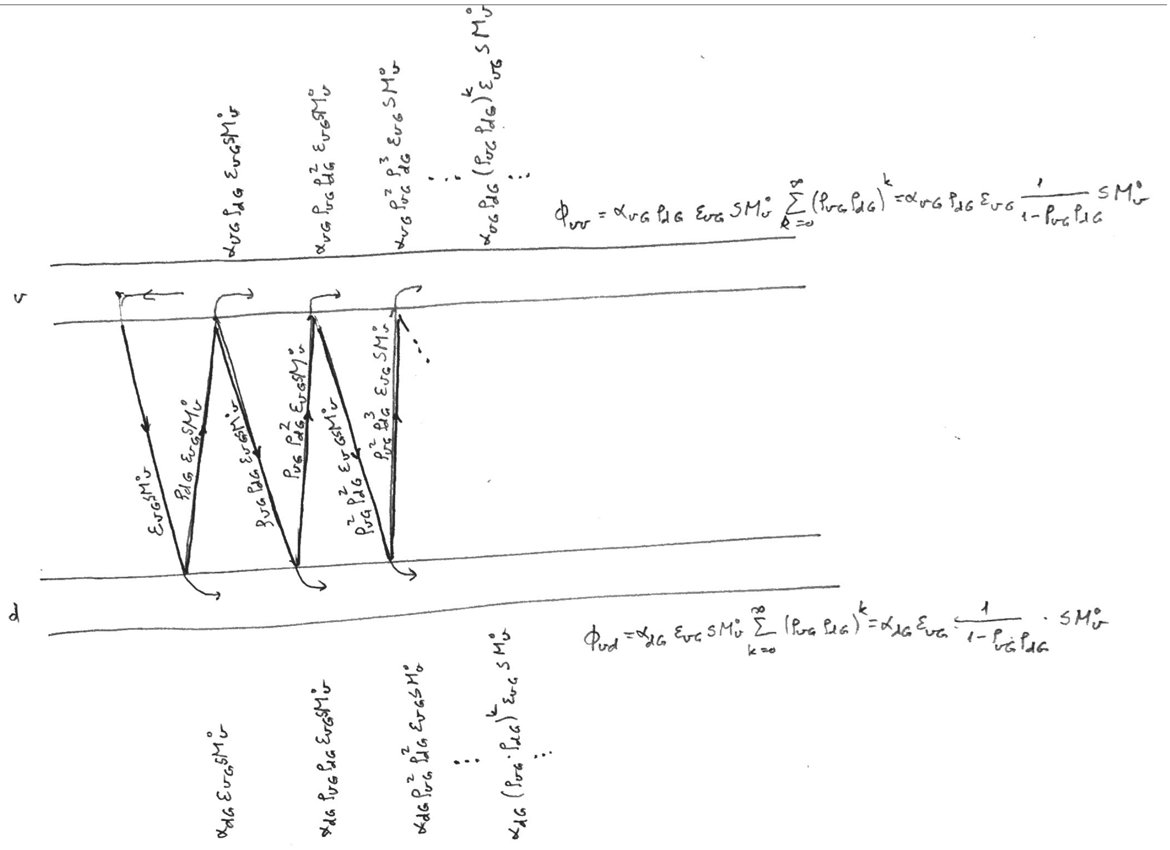
d) Vitre et disque ont des surfaces réfléchissantes



Multi-réflexion du rayonnement solaire



Multi-réflexion du rayonnement GLO émis par le disque



Multi-réflexion du rayonnement GLO émis par la vitre

Les bilans sur la vitre

$$\alpha_{vC}\left(1+\rho_{dC}\tau_{vC}\frac{1}{1-\rho_{vC}\rho_{dC}}\right)SE+\alpha_{vC}\varepsilon_{dG}\frac{1}{1-\rho_{vG}\rho_{dG}}SM_d^0 + \left(\alpha_{vG}\rho_{dG}\varepsilon_{vG}\frac{1}{1-\rho_{vG}\rho_{dG}}-2\varepsilon_{vG}\right)SM_d^0 = 0$$

et sur le disque

$$\alpha_{dC}\tau_{vC}\frac{1}{1-\rho_{vC}\rho_{dC}}SE+\alpha_{dG}\rho_{vG}\varepsilon_{dG}\frac{1}{1-\rho_{vG}\rho_{dG}}SM_d^0 + \left(\alpha_{dG}\varepsilon_{vG}\frac{1}{1-\rho_{vG}\rho_{dG}}-2\varepsilon_{dG}\right)SM_d^0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} M_v^o \\ M_d^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 480.39\ \mathrm{W/m^2} \\ 1067.30\ \mathrm{W/m^2} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} T_v \\ T_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{M_v^o/\sigma} \\ \sqrt[4]{M_d^o/\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 303.39\ \mathrm{K} \\ 370.41\ \mathrm{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30.24\ \mathrm{°C} \\ 97.26\ \mathrm{°C} \end{bmatrix}$$