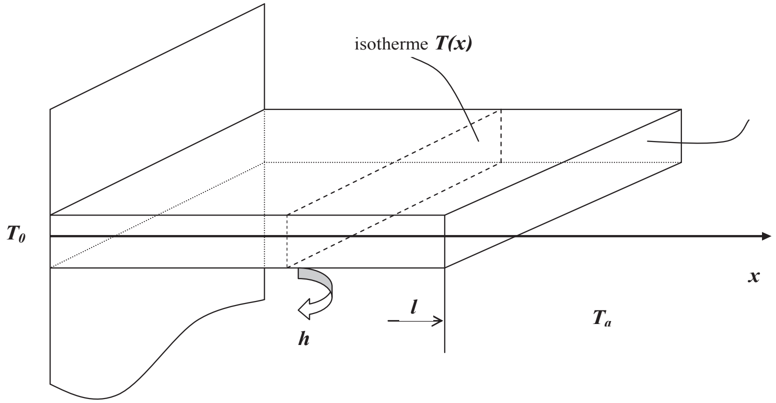
Ex12 Ailette de refroidissement

Soit une ailette de refroidissement de section droite, uniformément chauffée à sa base à la température T_0 et placée dans un milieu ambiant à la température T_∞. On suppose que la température est uniquement en fonction de x, donc les isothermes sont planes et perpendiculaires à l'axe x. On note p le périmètre de base, S la section droite, λ la conductivité thermique et h le coefficient d'échange superficiel de l'ailette.



1. Donner la solution générale pour la distribution spatiale de la température $T = f(x)$.

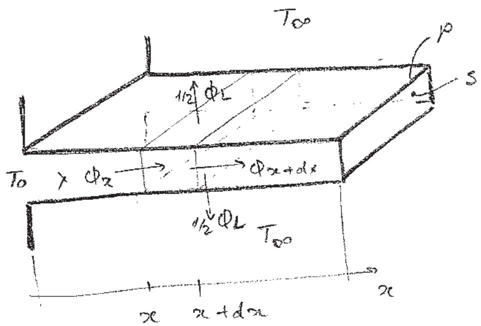
Donner l'expression de la distribution spatiale de la température $T = f(x)$ et de l'efficacité $E = q_0 / q_0^{'}$, où q_0 est le flux évacué au pied de l'ailette et $q_0^{'}$ est le flux évacué par la section S s'il n'y avait pas d'ailette dans les cas suivants :

2. ailette de longueur infinie ;
3. ailette de longueur L finie et isolée (flux nul) en $x = L$;
4. ailette est de longueur finie avec un échange superficiel en $x = L$;
5. ailette est de longueur finie avec une température imposée en $x = L$.

SOLUTION

1. Equation générale pour la distribution de la température

Equation de l'ailette



1. En effectuant le bilan d'énergie pour un élément infinitésimal de volume $S\,dx$:

$$q_x - q_{x+dx} - q_l = 0$$

Flux entrant par conduction :

$$q_x = -\lambda S_x \frac{dT_x}{dx}$$

Flux sortant par conduction :

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx$$

Flux sortant par convection par la surface du périmètre p :

$$q_l = h\,P\,dx\,(T_x - T_\infty)$$

Le bilan d'énergie devient :

$$q_x - q_x - \frac{dq_x}{dx} dx + h\,P_x\,dx\,(T_x - T_\infty) = 0 \text{ ou } -\frac{d}{dx}\left(-\lambda S_x \frac{dT_x}{dx}\right) dx + h\,P_x\,dx\,(T_x - T_\infty) = 0 \text{ ou}$$

$$\boxed{\lambda \frac{d}{dx}\left(S_x \frac{dT_x}{dx}\right) dx + h\,P_x\,dx\,(T_x - T_\infty) = 0}$$ l'équation de l'ailette.

Si on considère la surface moyenne $\bar{S}_x$,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dT_x}{dx}\right) + \frac{h\,P_x}{\lambda\,\bar{S}_x}(T_x - T_\infty) = 0 \text{ ou } \boxed{\frac{d^2T_x}{dx^2} + \frac{h\,P_x}{\lambda\,\bar{S}_x}(T_x - T_\infty) = 0}$$

2. En utilisant l'équation de la chaleur

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda div(gradT) + p$$

en régime stationnaire, unidimensionnel où p est la chaleur perdue par convection par l'élément infinitésimal de volume $dx\,S$: $p = \dfrac{h\,P_x\,dx\,(T_x - T_\infty)}{dx\,\bar{S}_x}$

On obtient la même equation : $\boxed{\dfrac{d^2T_x}{dx^2} + \dfrac{h\,P_x}{\lambda\,\bar{S}_x}(T_x - T_\infty) = 0}$

Discussion : validité de l'hypothèse du transfert unidimensionnel

On a supposé que le transfert se fait que dans la direction x et qu'il a un flux convectif latéral normal à la direction x, en direction y. Le bilan de flux à la surface donne :

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=b} = h(T - T_\infty) \qquad \text{convection} \neq 0 \Rightarrow \text{conduction} \neq 0.$$

où b est la position de la surface dans la direction y.

Quand la variation en direction y peut être négligée :

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=b} = h(T - T_\infty) \text{ approx. par } \lambda \frac{\Delta T}{b} = h(T|_b - T_\infty) \ ; \ \frac{\Delta T}{(T|_b - T_\infty)b} = \frac{hb}{\lambda} \text{ où } Bi_b = \frac{hb}{\lambda}$$

Pour que la variation de la température dans l'ailette en direction y peut soit négligeable par rapport à la variation dans la couche limite de convection, c. à d.

$\Delta T << T|_b - T_\infty$, il faut que $\boxed{Bi_b = \dfrac{hb}{\lambda} << 1}$.

Exemple : aluminium $\lambda \cong 400$ W/m · K , convection naturelle en air $h \cong 10$ W/m² · K .

$Bi_b = \dfrac{hb}{\lambda} < 0.001 \;\Rightarrow b < \lambda\, Bi_b / h = 0.04$ m . Une épaisseur de 4 cm donne une marge très grande pour l'approximation 1-D.

Ailette simple avec section constante

On note : $\theta \equiv T_x - T_\infty$, on a : $\dfrac{d^2T_x}{dx^2} = \dfrac{d^2(T_x - T_\infty)}{dx^2} = \dfrac{d^2\theta}{dx^2}$ On note: $\alpha \equiv \dfrac{h}{\lambda}\dfrac{P}{S}$; $\omega^2 = \alpha$

$\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dx^2} = \alpha\theta}$ $\boxed{\dfrac{d^2\theta}{dx^2} = \omega^2\theta}$ $\boxed{D^2\theta = \omega^2\theta}$ équation différentielle de l'ailette

où $D \equiv \dfrac{d}{dx}$ opérateur de différentiation.

On résolve l'équation différentielle à coefficients constants en cherchant des solutions exponentielles. En introduisant $e^{\alpha x}$ dans l'équation :

$\omega^2 e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$ => $\omega = \pm\sqrt{\alpha}$ => solutions : $\theta_1(x) = e^{\sqrt{\alpha}x}$ et $\theta_2(x) = e^{\sqrt{\alpha}x}$

Toute combinaison linéaire de ces exponentiels est une solution :

$\boxed{\theta(x) = C_1 e^{\sqrt{\alpha}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}x}}$ ou $\boxed{\theta(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}}$, $\omega^2 = \alpha$ solution générale

Solution en utilisant l'opérateur de différentiation :

$(D^2 - \omega^2)\theta = 0 \quad (D-\omega)(D+\omega)\theta = 0$ avec les solutions :

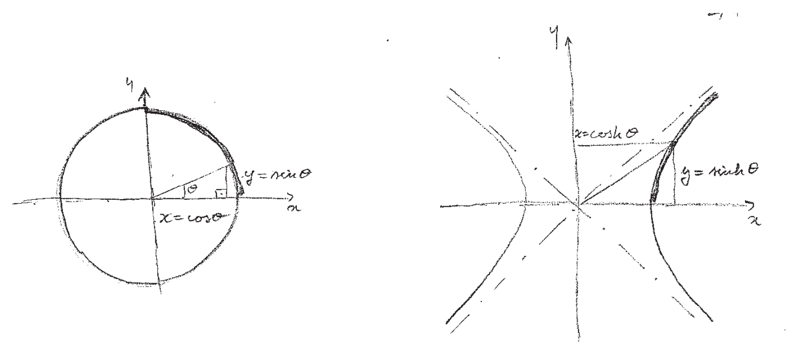
$$(D-\omega)\theta = 0 \;;\; D\theta = \omega\theta \;;\; \frac{d\theta}{dx} = \omega\theta \;;\; \ln\theta = \omega x + A_1 \;;\; \theta = e^{\omega x} + e^{A_1} \;;\; \theta = C_1 e^{\omega x}$$

$$(D+\omega)\theta = 0 \;;\; D\theta = -\omega\theta \;;\; \frac{d\theta}{dx} = -\omega\theta \;;\; \ln\theta = -\omega x + A_2 \;;\; \theta = C_2 e^{-\omega x}$$

$\boxed{\theta(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}}$ solution générale

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 sont déterminées à partir des conditions aux limites.

Fonctions hyperboliques



	Fonction circulaire	Fonction hyperbolique	
	cercle $x^2 + y^2 = 1$ $x = \cos\theta$; $y = \sin\theta$ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ $x = \cosh\theta$; $y = \sinh\theta$ $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$	Courbe paramétrée
	$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$	$e^{x} = \cosh x + \sinh x$ $e^{-x} = \cosh x - \sinh x$	Relation avec exp(x)
	$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cosh(ix)$ $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = \sinh(ix)$	$\cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ $\sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	
	$\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$	$\cosh(-x) = \cosh x$ $\sinh(-x) = -\sinh x$	Parité
$\dfrac{de^x}{dx} = e^x$	$\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$	$\dfrac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$ $\dfrac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$	Différentielle
$\dfrac{dy}{dx} - ay = 0$	$\dfrac{d^2y}{dx^2} + \omega^2 y = 0$	$\dfrac{d^2y}{dx^2} - \omega^2 y = 0$	Equation différentielle
$y(x) = C\,e^{ax}$	$y(x) = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$	$y(x) = C_1\cosh\omega x + C_2\sinh\omega x$	Solution

La solution de $\dfrac{d^2\theta}{dx^2} = \omega^2\theta$ est $\theta(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$ ou $\theta(x) = C_1\cosh\omega x + C_2\sinh\omega x$

Conditions aux limites

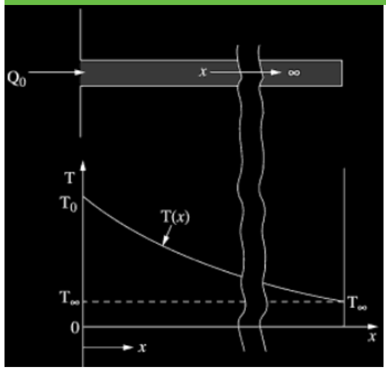
L'équation différentielle de l'ailette nécessite deux conditions aux limites. Une condition limité est la température T_0 à la base de l'ailette, en $x = 0$: $\theta_0 = T_0 - T_\infty$.

La deuxième condition en $x = L$ peut correspondre à une de situations :

1. ailette infiniment longue, la température au bout est égale à la température ambiante ;
2. ailette de longueur finie, le flux convectif négligeable ;
3. ailette de longueur finie, le flux convectif non négligeable ;
4. ailette de longueur finie, température imposée.

Distribution spatiale de la température et l'efficacité de l'ailette

Cas 1 : ailette infiniment longue $x \to \infty$, $T_x = T_\infty$



Problème : trouver la solution de $\theta(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$ avec les conditions aux limites

$\theta(x) = [T_x - T_\infty]_{x\to\infty} = 0$ et

$\theta(0) = [T_x - T_\infty]_{x\to 0} = \theta_0$

Distribution de la température :

$x \to \infty$ et $\theta(x) = T_x - T_\infty = 0$ => $\theta(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x} = C_1 e^{\omega x} = 0$; $C_1 = 0$

$x = 0$ et $\theta(0) \equiv \theta_0 = T_0 - T_\infty$ => $\theta_0 = C_2 e^{-\omega x} = C_2$; $C_2 = T_0 - T_\infty$

$\theta(x) = \theta_0 e^{-\omega x}$ or $T(x) - T_\infty = (T_0 - T_\infty) e^{-\omega x}$

Flux total à travers l'ailette = flux qui sort par sa base ($x = 0$)

$$q_{tot} = q\big|_{x=0} \equiv q_0 = -\lambda S\left[\frac{dT}{dx}\right]_{x=0} = -\lambda S\left[\frac{d\theta}{dx}\right]_{x=0} = -\lambda S\left[\frac{d(\theta_0 e^{-\omega x})}{dx}\right]_{x=0} = -\lambda S\theta_0(-\omega)\left[e^{-\omega x}\right]_{x=0} = \lambda S\omega\theta_0$$

$$q_{tot} = \sqrt{hP\lambda S}\,(T_0 - T_\infty)$$

Flux total à travers l'ailette = intégrale du flux qui sort par sa surface latérale

$$q_{tot} = \int_0^\infty h(P\,dx)(T - T_\infty) = hP\int_0^\infty (T_0 - T_\infty)e^{-\omega x}dx = hP(T_0 - T_\infty)\left(-\frac{1}{\omega}\right)\left[e^{-\omega x}\right]_0^\infty$$

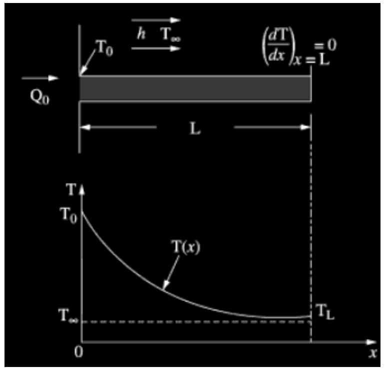
$$= -\frac{hP}{\omega}(T_0 - T_\infty)(e^{-\omega\infty} - e^{-\omega 0}) = \frac{hP}{\omega}(T_0 - T_\infty) = \sqrt{hP\lambda S}\,(T_0 - T_\infty)$$

Efficacité de l'ailette

$$E = \frac{q_0}{q_0^{'}} = \frac{\sqrt{hP\lambda S}(T_0 - T_\infty)}{hS(T_0 - T_\infty)} = \sqrt{\frac{\lambda P}{hS}} = \frac{\lambda}{h}\sqrt{\frac{hP}{\lambda S}} = \frac{\lambda}{h}\sqrt{\alpha}$$

$$E = \frac{\lambda}{h}\omega$$

Cas 2 : ailette de longueur finie, le flux convectif négligeable, $[d\theta/dx]_{x=L} = 0$



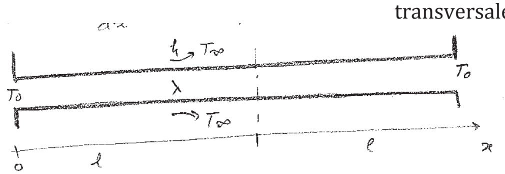
Problème : trouver la solution de $\theta(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$ avec les conditions aux limites :

$\theta\big|_{x=0} = \theta_0$ et

$\left.\dfrac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$

Note : $\left.\dfrac{dT}{dx}\right|_{x=L} = 0$ flux négligeable ou symétrie.

Une ailette est généralement suffisamment longue pour que le flux par la surface transversale au bout soit négligeable.



Problème : trouver la solution de :

$\theta(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$ avec les conditions aux limites $\theta\big|_{x=0} = \theta_0$ et $\left.\dfrac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$.

$\theta\big|_{x=0} = \theta_0$ => $\theta_0 = C_1 e^{\omega 0} + C_2 e^{-\omega 0}$ => $C_1 + C_2 = \theta_0$

$\left.\dfrac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$ => $0 = C_1\omega[e^{\omega x}]_{x=L} + C_2(-\omega)[e^{-\omega x}]_{x=L}$ => $C_1 e^{\omega L} - C_2 e^{-\omega L} = 0$

$$\begin{cases} C_1 e^{\omega L} - C_2 e^{-\omega L} = 0 \\ C_1 + C_2 = \theta_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} e^{\omega L} & -e^{-\omega L} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}$$

Elimination : ligne 1 <-- (ligne 1) + (ligne 2 multipliée par $-e^{\omega L}$)

$$\begin{bmatrix} 0 & -e^{-\omega L} - e^{\omega L} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta_0 e^{-\omega L} \\ \theta_0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \theta_0 \frac{e^{-\omega L}}{e^{\omega L} + e^{-\omega L}} = \theta_0 \frac{e^{-\omega L}}{2\cosh(\omega L)} \ ;$$

$$C_1 = \theta_0 - C_2 = \theta_0 \left[1 - \frac{e^{-\omega L}}{e^{\omega L} + e^{-\omega L}} \right] = \theta_0 \frac{e^{\omega L}}{e^{\omega L} + e^{-\omega L}} = \theta_0 \frac{e^{\omega L}}{2\cosh(\omega L)}$$

$$\theta(x) = \theta_0 \frac{e^{\omega L}}{e^{\omega L} - e^{-\omega L}} e^{\omega x} + \theta_0 \left[1 - \frac{e^{\omega L}}{e^{\omega L} - e^{-\omega L}} \right] e^{-\omega x} = \theta_0 \frac{\cosh(\omega(L-x))}{\cosh(\omega L)}$$

Flux qui sort par la base de l'ailette :

$$q\big|_{x=0} \equiv q_0 = -\lambda S \left[\frac{dT}{dx} \right]_{x=0} = -\lambda S \left[\frac{d\theta}{dx} \right]_{x=0} = -\lambda S \frac{\theta_0}{\cosh \omega L} \frac{d}{dx} \cosh(\omega(L-x))$$

$$= -\lambda S \frac{\theta_0}{\cosh \omega L} \left[\frac{d}{dx}(\omega(L-x)) \right] \left[\sinh(\omega(L-x)) \right]_{x=0}$$

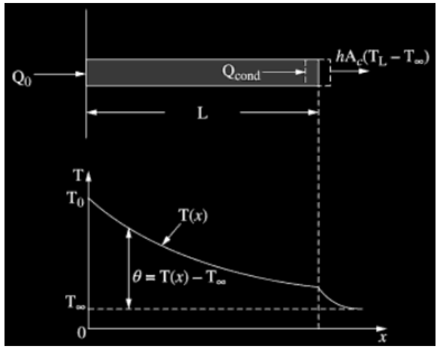
$$= \lambda S \omega \frac{\sinh \omega L}{\cosh \omega L} \theta_0 = \sqrt{hP\lambda S}\, \tanh(\omega L) \theta_0$$

Efficacité de l'ailette

$$E = \frac{q_0}{q_0'} = \frac{\sqrt{hP\lambda S}\, \tanh(\omega L)(T_0 - T_\infty)}{hS(T_0 - T_\infty)} = \sqrt{\frac{\lambda P}{hS}} \tanh(\omega L) = \frac{\lambda}{h} \sqrt{\frac{hP}{\lambda S}} \tanh(\omega L)$$

$$E = \frac{\lambda}{h} \sqrt{\alpha}\, \tanh(\omega L) = \frac{\lambda}{h} \omega \tanh(\omega L)$$

Cas 3 : ailette de longueur finie, le flux convectif non négligeable, $[-\lambda d\theta / dx]_{x=L} = h\theta_{x=L}$



Problème : trouver la solution de

$\theta(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$ avec les conditions aux limites

$\theta\big|_{x=0} = \theta_0$ et

$$-\lambda \frac{d\theta}{dx}\bigg|_{x=L} = h\theta_{x=L}$$

$\theta\big|_{x=0} = \theta_0$ => $\theta_0 = C_1 e^{\omega 0} + C_2 e^{-\omega 0}$ => $C_1 + C_2 = \theta_0$

$$-\lambda \frac{d\theta}{dx}\bigg|_{x=L} = h\theta_{x=L} \implies -\lambda \left[\omega C_1 e^{\omega x} - \omega C_2 e^{-\omega x} \right]_{x=L} = h[C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}]_{x=L}$$

$$\begin{cases} \left(\omega + \frac{h}{\lambda}\right) e^{\omega L} C_1 - \left(\omega - \frac{h}{\lambda}\right) e^{\omega L} C_0 = 0 \\ C_1 + C_2 = \theta_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \left(\omega + \frac{h}{\lambda}\right) e^{\omega L} & -\left(\omega - \frac{h}{\lambda}\right) e^{-\omega L} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}$$

Elimination : ligne 1 <-- (ligne 1) + (ligne 2 multipliée par $-\left(\omega + \frac{h}{\lambda}\right) e^{\omega L}$)

$$\begin{bmatrix} 0 & -\left(\omega + \frac{h}{\lambda}\right) e^{\omega L} - \left(\omega - \frac{h}{\lambda}\right) e^{-\omega L} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\omega + \frac{h}{\lambda}\right) e^{\omega L} \theta_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \frac{\left(\omega + \frac{h}{\lambda}\right) e^{\omega L}}{\left(\omega + \frac{h}{\lambda}\right) e^{\omega L} + \left(\omega - \frac{h}{\lambda}\right) e^{-\omega L}} \theta_0$$

$$C_1 = \theta_0 - C_2 = \frac{\left(\omega - \frac{h}{\lambda}\right) e^{-\omega L}}{\left(\omega + \frac{h}{\lambda}\right) e^{\omega L} + \left(\omega - \frac{h}{\lambda}\right) e^{-\omega L}} \theta_0$$

$$\theta = \theta_0 \frac{\omega(e^{-\omega L}e^{\omega x} + e^{\omega L}e^{-\omega x}) + \frac{h}{\lambda}(-e^{-\omega L}e^{\omega x} + e^{\omega L}e^{-\omega x})}{\left(\omega + \frac{h}{\lambda}\right)e^{\omega L} + \left(\omega - \frac{h}{\lambda}\right)e^{-\omega L}} \; ;$$

où

$$\left(\omega + \frac{h}{\lambda}\right)e^{\omega L} + \left(\omega - \frac{h}{\lambda}\right)e^{-\omega L} = \omega(e^{\omega L} + e^{-\omega L}) + \frac{h}{\lambda}(e^{\omega L} - e^{-\omega L})$$

$$= 2\left[\omega \cosh(\omega L) + \frac{h}{\lambda}\sinh(\omega L)\right]$$

$$e^{-\omega L}e^{\omega x} + e^{\omega L}e^{-\omega x} = e^{-\omega(L-x)} + e^{\omega(L-x)} = 2\cosh(\omega(L-x))$$

$$-e^{-\omega L}e^{\omega x} + e^{\omega L}e^{-\omega x} = -e^{-\omega(L-x)} + e^{\omega(L-x)} = 2\sinh(\omega(L-x))$$

on obtient :

$$\theta = \theta_0 \frac{\cosh(\omega(L-x)) + \frac{h}{\lambda\omega}\sinh(\omega(L-x))}{\cosh(\omega L) + \frac{h}{\lambda\omega}\sinh(\omega L)}$$

Le flux qui sort par la base de l'ailette :

$$q\big|_{x=0} \equiv q_0 = -\lambda S\left[\frac{dT}{dx}\right]_{x=0} = -\lambda S\left[\frac{d\theta}{dx}\right]_{x=0}$$

$$\left[\frac{d}{dx}\cosh(\omega(L-x))\right]_{x=0} = \left[\frac{d}{dx}\omega(L-x)\right]_{x=0} \sinh \omega L = -\omega \sinh \omega L$$

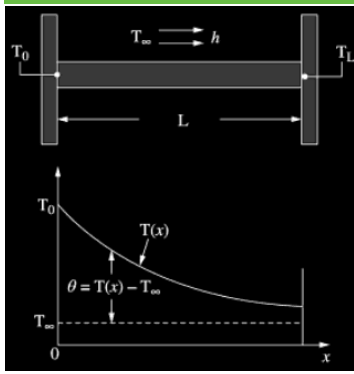
$$\left[\frac{d}{dx}\sinh(\omega(L-x))\right]_{x=0} = \left[\frac{d}{dx}\omega(L-x)\right]_{x=0} \cosh \omega L = -\omega \cosh \omega L$$

$$q_0 = \omega\lambda S\theta_0 \frac{\sinh \omega L + \frac{h}{\lambda\omega}\cosh \omega L}{\cosh(\omega L) + \frac{h}{\lambda\omega}\sinh(\omega L)} = \omega\lambda S\theta_0 \frac{\tanh \omega L + \frac{h}{\lambda\omega}}{1 + \frac{h}{\lambda\omega}\tanh(\omega L)}$$

Efficacité de l'ailette :

$$E = \frac{q_0}{\dot{q}_0} = \frac{\lambda\omega}{h} \frac{\tanh \omega L + \frac{h}{\lambda\omega}}{1 + \frac{h}{\lambda\omega}\tanh(\omega L)} = \frac{1 + \frac{\lambda\omega}{h}\tanh \omega L}{1 + \frac{h}{\lambda\omega}\tanh(\omega L)}$$

Cas 4 : ailette de longueur finie, température imposée, $T_{x=L} = T_L$



Problème : trouver la solution de $\theta(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$ avec les conditions aux limites

$\theta\big|_{x=0} = \theta_0$ et

$-\lambda \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = h\theta_{x=L}$.

$$\theta\big|_{x=0} = \theta_0 \;\Rightarrow\; \theta_0 = C_1 e^{\omega 0} + C_2 e^{-\omega 0} \;\Rightarrow\; C_1 + C_2 = \theta_0$$

$$\theta\big|_{x=L} = \theta_L \;\Rightarrow\; \theta_L = C_1 e^{\omega L} + C_2 e^{-\omega L}$$

$$\begin{cases} C_1 e^{\omega L} + C_2 e^{-\omega L} = \theta_L \\ C_1 + C_2 = \theta_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} e^{\omega L} & e^{-\omega L} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_L \\ \theta_0 \end{bmatrix}$$

Elimination : ligne 1 <-- (ligne 1) + (ligne 2 multipliée par $-e^{\omega L}$)

$$\begin{bmatrix} 0 & -e^{-\omega L} + e^{\omega L} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_L - \theta_0 e^{-\omega L} \\ \theta_0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \frac{\theta_L - \theta_0 e^{-\omega L}}{e^{\omega L} - e^{-\omega L}} \; ; \; C_1 = \theta_0 - C_2 = \frac{\theta_0 e^{-\omega L} - \theta_L}{e^{\omega L} - e^{-\omega L}}$$

$$\theta = \frac{\theta_0[e^{\omega(L-x)} - e^{-\omega(L-x)}] + \theta_L[e^{\omega x} - e^{\omega x}]}{e^{\omega L} - e^{-\omega L}} = \frac{\theta_0 \sinh(\omega(L-x)) + \theta_L \sinh(\omega x)}{\sinh(\omega L)}$$

Le flux qui sort par la base de l'ailette :

$$q\big|_{x=0} \equiv q_0 = -\lambda S\left[\frac{dT}{dx}\right]_{x=0} = -\lambda S\left[\frac{d\theta}{dx}\right]_{x=0}$$

$$\left[\frac{d}{dx}\sinh(\omega(L-x))\right]_{x=0} = \left[\frac{d}{dx}\omega(L-x)\right]_{x=0} \cosh(\omega L) = -\omega\cosh(\omega L)$$

$$\left[\frac{d}{dx}\sinh(\omega x)\right]_{x=0} = \left[\frac{d}{dx}\omega x\right]_{x=0} \cosh(\omega \cdot 0) = \omega$$

$$q_0 = \sqrt{hP\lambda S}\,\frac{\theta_0 \cosh \omega L - \theta_L}{\sinh \omega L}$$

$$E = \frac{q_0}{\dot{q}_0} = \frac{\lambda}{h}\sqrt{\alpha}\,\frac{\cosh \omega L - \theta_L/\theta_0}{\sinh \omega L}$$