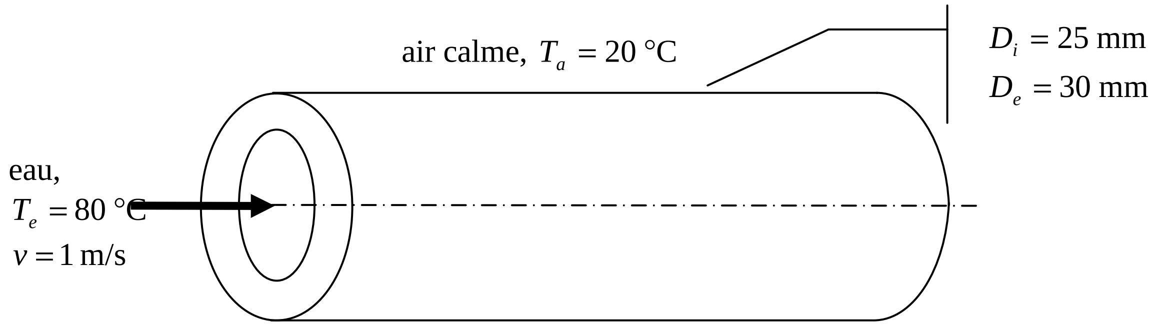
Exo 11. Estimation des coefficients d'échange superficiel
A partir des différentes corrélations existantes, donner les valeurs des coefficients d'échange convectif dans le tube (eau - tube) et à l'extérieur du tube (air - tube). On considère la conductivité thermique de l'acier $\lambda = 100$ W/m K .
Calculer les températures de surface et le flux par mètre linéaire de conduit.



Propriétés physique de l'eau

T [°C]	λ [W/m · K]	μ [Pa · s]	ρ [kg/m²]	c_p [J/kg · K]
80	0.669	$0.355 \cdot 10^{-3}$	971.6	4199

Analyse des phénomènes
Convection forcée entre le fluide de l'intérieure et la surface intérieure du tube.
Conduction en régime stationnaire dans le tube.
Convection naturelle à l'extérieure du tube.

1. Coefficient d'échange convectif dans le tube : convection forcée dans un tube

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\, v\, D}{\mu} = \frac{971.6 \times 1 \times 0.025}{0.355 \cdot 10^{-3}} = 68.42 \cdot 10^{3} > 10 \cdot 10^{3} \qquad \text{régime turbulent}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu\, c_p}{\lambda} = \frac{0.355 \cdot 10^{-3} \times 4199}{0.699} = 2.228$$

$$Nu = 0.023\,\mathrm{Re}^{0.8}\,\mathrm{Pr}^{0.33} = 221.15 \ \text{(formule de Colburn)}$$

$$h_e = \frac{\lambda}{D} Nu = \frac{0.669}{0.025} 221.15 = 5.9 \cdot 10^{3} \ \text{W/(m² K)}$$

2. Coefficient d'échange convectif à l'extérieur du tube : convection naturelle cylindre horizontal

Régime laminaire $h_a = 1.32\left(\dfrac{\Delta\theta}{D_e}\right)^{0.25}$ *; régime turbulent* $h_a = 1.24\left(\dfrac{\Delta\theta}{D_e}\right)^{0.33}$.

Solution approximative

La valeur du coefficient de convection naturelle dans l'air est de l'ordre de $10\ \text{W/m}^2\text{K}$. Cette valeur est négligeable en comparaison avec $h_e = 5.9\cdot10^3\ \text{W/m}^2\text{K}$ et $\lambda / e = 100/0.0025 = 40\cdot10^3\ \text{W/m}^2\text{K}$. Par conséquent, la chute de température est, de manière prédominante, dans l'air. Cela implique que la température de la parois à l'extérieure est approximativement égale à la température de l'eau, $\theta_2 \cong T_e = 80\ °\text{C}$. Pour convection naturelle en air à la surface d'un cylindre horizontal en régime laminaire, on trouve :

$$h_a = 1.32\left(\frac{\Delta\theta}{D_e}\right)^{0.25} = 1.32\left(\frac{80-20}{0.030}\right)^{0.25} = 9.5\ \text{W/m}^2\ \text{K}$$ et le flux par mètre linéaire :

$$q_l = \frac{T_e - T_a}{\dfrac{1}{h_a \pi D_e}} = \frac{80-20}{\dfrac{1}{9.5\times\pi\times0.030}} = 53.7\ \text{W/m}$$

Solution

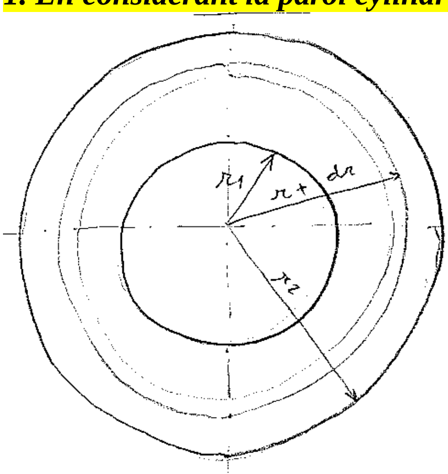
Le problème à résoudre : trouver la solution $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$ et $h_a = G_{3,3}$ qui satisfait simultanément le système thermique et l'équation non-linéaire de transfert convectif

$$\begin{cases} \mathbf{A}^T\mathbf{GA\theta} = \mathbf{A}^T\mathbf{Gb} + \mathbf{f} \\ G_{3,3} = 1.32\left(\dfrac{\theta_2 - T_a}{D_e}\right)^{0.25} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \mathbf{A}^T\mathbf{GA\theta} = \mathbf{A}^T\mathbf{Gb} + \mathbf{f} \\ G_{3,3} = 1.24\left(\dfrac{\theta_2 - T_a}{D_e}\right)^{0.33} \end{cases}$$

en régime laminaire en régime turbulent.

---

1. En considérant la paroi cylindrique



Par raison de symétrie, le gradient de la température est dans la direction du rayon :

$$q = -\lambda\, S\, grad\theta = -\lambda\, S\frac{d\theta}{dr} = -\lambda\, 2\pi r L\frac{d\theta}{dr}$$

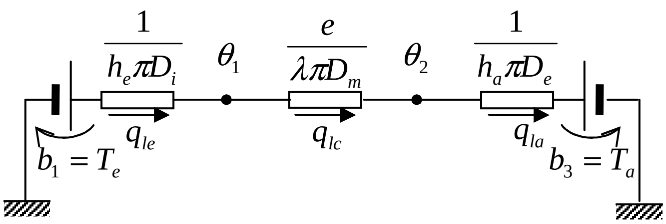
Le flux q est constant à traves tout cylindre coaxial de rayon r. Par la séparation des variables :

$$d\theta = -\frac{q}{2\pi\lambda L}\frac{dr}{r}\ ;\ \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = -\frac{q}{2\pi\lambda L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$$

$$\theta_2 - \theta_1 = -\frac{q}{2\pi\lambda L}(\ln r_2 - \ln r_1)\ ;\ \theta_2 - \theta_1 = -\frac{q}{2\pi\lambda L}\ln\frac{r_2}{r_1}\ ;$$

$$q = \frac{\lambda}{r_{ml}\ln(r_2/r_1)}\ 2\pi\, r_{ml} L\,(\theta_2 - \theta_1)\ \ [\text{W}],$$

où $r_{ml} = \dfrac{r_2 - r_1}{\ln(r_2/r_1)} = \dfrac{e}{\ln(r_2/r_1)}$ et $2\pi\, r_{ml} L$ est la surface de passage du flux.



q_l - flux par mètre linéaire

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} q_{le} \\ q_{lc} \\ q_{la} \end{array} \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} ; \ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} h_e \pi D_i & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \pi D_m / e & 0 \\ 0 & 0 & h_a \pi D_e \end{bmatrix} ; \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T_e \\ 0 \\ -T_a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Dans le cas de la paroi plane, le diamètre moyen à l'intérieur de la paroi est

$$D_{ml} = \frac{D_e - D_i}{\ln(D_e / D_i)} = 0.0274 \text{ m} \cong (D_i + D_e)/2 = 0.0275 \text{ m}$$

En utilisant l'algorithme de calcul, on obtient :

Itération, k	θ_1 [°C]	θ_2 [°C]	$\Delta\theta_1 = \theta_1^{k-1} - \theta_1^k$	$\Delta\theta_2 = \theta_2^{k-1} - \theta_2^k$	h_a [W/m² K]
0	60	40	--------------	---------------	6.7074
1	79.9183	79.9073	-19.9183	-39.9073	8.8240
2	79.8925	79.8781	0.0257	0.0292	8.8229
3	79.8925	79.8781	-0.1307e-4	- 0.1483e-4	-------

$q_{le} = q_{lc} = q_{la} = 49.7909$ W/m

Algorithme de calcul :

```
clear all, clc
he = 5.9e3; lambda = 100;
Di = 0.025; De = 0.030; e = (De - Di)/2;
Te = 80; Ta = 20;

A = [1 0; -1 1; 0 -1];
b = [Te 0 -Ta]';
f = [0 0]';

Dm = (De - Di)/log(De/Di);
%valeurs initiale pour la distribution des temperatures
theta0 = [60 40]'

nonconvergence = true; eps = 0.001; %erreure admise pour les temperatures
while nonconvergence
    %calculer G = f(theta0)
    ha = 1.32*((theta0(2) - Ta)/De)^0.25
    G = [he*pi*Di      0          0;...
          0   lambda*pi*Dm/e     0;...
          0      0         ha*pi*De];
    %estimer la temperature
    theta = inv((A'*G*A))*(A'*G*b + f)

    %verifier la convergence: que toutes les 'diff de temp' < eps
    nonconvergence = max(abs(theta0 - theta))>eps;
    epsc = theta0 - theta
    theta0 = theta;
end
q = G*(-A*theta + b)
Tac = theta(2) - q(2)/ha ; Tac – Ta
```

Calcul « manuel »
On observe que :

$$q=\frac{T_e-T_a}{\dfrac{1}{h_e\pi D_i}+\dfrac{e}{\lambda\pi D_{ml}}+\dfrac{1}{h_a\pi D_e}}=\frac{\theta_2-T_a}{\dfrac{1}{h_a\pi D_e}}\text{ , d'où : }\theta_2=\frac{1}{h_a\pi D_e}\left(\frac{T_e-T_a}{\dfrac{1}{h_e\pi D_i}+\dfrac{e}{\lambda\pi D_{ml}}+\dfrac{1}{h_a\pi D_e}}\right)$$

- Supposer une distribution initiale de la température : $\theta_{0;1}=80,\ \theta_{0;2}=40$
- **Pendant que la convergence n'est pas atteinte**
  - Calculer la matrice $\mathbf{G}$ en fonction de $\boldsymbol{\theta}_0$, où

    $G_{3,3}=h_a=1.32\left((\theta_2-T_a)/D_e\right)^{0.25}$

  $h_a=1.32((40-20)/0.030)^{0.26}=6.7074$ W/m² K
  - Estimer les températures

$$\theta_2=\frac{1}{h_a\pi D_e}\left(\frac{T_e-T_a}{\dfrac{1}{h_e\pi D_i}+\dfrac{e}{\lambda\pi D_{ml}}+\dfrac{1}{h_a\pi D_e}}\right)=79.9073\ ^\circ\text{C}$$

  - Vérifier la convergence :

  $\theta_{0;2}-\theta_2=40-79.9073=-39.9073>\varepsilon=0.001$ **convergence = non**
  - $\theta_{0;2}=\theta_2$

On répète le calcul (itération 2) :

- Calculer la matrice $\mathbf{G}$ en fonction de $\boldsymbol{\theta}$, où $G_{3,3}=h_a=1.32\left((\theta_2-T_a)/D_e\right)^{0.25}$

$h_a=1.32((79.9218-20)/0.030)^{0.26}=8.8240$ W/m² K
- Estimer les températures :

$$\theta_2=\frac{1}{h_a\pi D_e}\left(\frac{T_e-T_a}{\dfrac{1}{h_e\pi D_i}+\dfrac{e}{\lambda\pi D_{ml}}+\dfrac{1}{h_a\pi D_e}}\right)=79.8781\ ^\circ\text{C}$$

- Vérifier la convergence :

$\theta_{0;2}-\theta_2=79.9073-79.8781=0.0292>\varepsilon=0.001$ **convergence = non**
- $\theta_{0;2}=\theta_2$

On répète le calcul (itération 3) :

- Calculer la matrice $\mathbf{G}$ en fonction de $\boldsymbol{\theta}$, où $G_{3,3}=h_a=1.32\left((\theta_2-T_a)/D_e\right)^{0.25}$

$h_a=1.32((79.8972-20)/0.030)^{0.26}=8.8229$ W/m² K
- Estimer les températures :

$$\theta_2 = \frac{1}{h_a \pi D_e}\left(\frac{T_e - T_a}{\dfrac{1}{h_e \pi D_i} + \dfrac{e}{\lambda \pi D_{ml}} + \dfrac{1}{h_a \pi D_e}}\right) = 79.8781\,°\mathrm{C}$$

- Vérifier la convergence :

$\theta_{0;2} - \theta_2 = 79.8781 - 79.8781 = 0.0000 < \varepsilon = 0.001$ **convergence = oui**

Stop itérations

- Calculer les flux : $q = \dfrac{T_e - T_a}{\dfrac{1}{h_e \pi D_i} + \dfrac{e}{\lambda \pi D_{ml}} + \dfrac{1}{h_a \pi D_e}} = 49.7909$ W/m

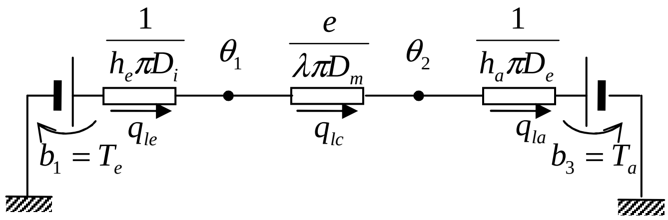
Note :

$h_e = 5.9 \cdot 10^3$ W/m² K et $\lambda / e = 100 / 0.0025 = 40 \cdot 10^3$ W/m² K

A comparer ces valeurs avec la convection dans l'air : $h_a = 8.8$ W/m² K

La chute de température est principalement dans la couche limite de l'air.

2. En considérant la paroi cylindrique mais en utilisant la moyenne arithmétique pour le diamètre moyen du tuyau



q_l - flux par mètre linéaire

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} q_{le} \\ q_{lc} \\ q_{la} \end{array} \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} ; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} h_e \pi D_i & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \pi D_m / e & 0 \\ 0 & 0 & h_a \pi D_e \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T_e \\ 0 \\ -T_a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Dans le cas de la paroi plane, le diamètre moyen à l'intérieur de la paroi est

$$D_m = (D_i + D_e)/2 = 0.0275 \text{ m} \cong D_{ml} = \frac{D_e - D_i}{\ln(D_e / D_i)} = 0.0274 \text{ m}$$

q_{le} - flux convectif entre l'eau et la paroi par mètre linéaire de conduit ;

q_{lc} - flux conductif dans la paroi par mètre linéaire de conduit ;

q_{la} - flux convectif entre la paroi et l'air par mètre linéaire de conduit.

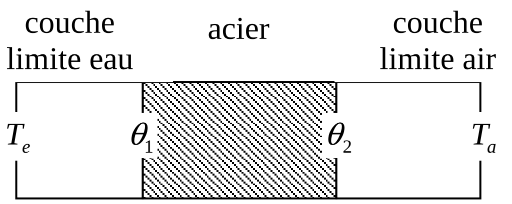
Comme le diamètre moyen logarithmique et approximativement égal au diamètre moyen arithmétique, en utilisant le même algorithme, on obtient les mêmes résultats :

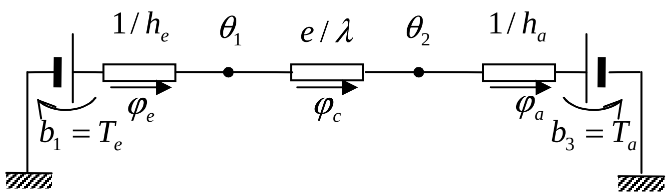
Itération, k	θ_1 [°C]	θ_2 [°C]	$\Delta\theta_1 = \theta_1^{k-1} - \theta_1^k$	$\Delta\theta_2 = \theta_2^{k-1} - \theta_2^k$	h_a [W/m² K]
0	60	40	--------------	---------------	6.7074
1	79.9183	79.9073	-19.9183	-39.9073	8.8240
2	79.8925	79.8781	0.0257	0.0292	8.8229
3	79.8925	79.8781	-0.1307e-4	- 0.1482e-4	-------

Le flux pour 1 m linéaire de conduit : $q_{l1} = q_{l2} = q_{l3} = 49.7909$ W/m

Note : Pour la précision de calcul utilisée, il n'y a pas d'erreur entre les résultats obtenus en utilisant la moyenne logarithmique et la moyenne arithmétique du diamètre du cylindre.

3. En considérant la paroi plane, calculer la densité de flux, puis le flux linéique





$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \theta_1 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \varphi_e \\ \varphi_c \\ \varphi_a \end{array} & \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} ; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} h_e & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/e & 0 \\ 0 & 0 & h_a \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T_e \\ 0 \\ -T_a \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

En utilisant l'algorithme de calcul, on obtient :

Itération, k	θ_1 [°C]	θ_2 [°C]	$\Delta\theta_1 = \theta_1^{k-1} - \theta_1^k$	$\Delta\theta_2 = \theta_2^{k-1} - \theta_2^k$	h_a [W/m² K]
0	60	40	--------------	---------------	6.7074
1	79.9319	79.9218	-19.9319	-39.9218	8.8245
2	79.9104	79.8972	0.0215	0.0246	8.8236
3	79.9104	79.8972	-0.0919e-4	- 0.1055e-4	-------

Les flux pour une surface de 1 m² : $\varphi_e = \varphi_c = \varphi_a = 528.5083$ W/m²

Le flux pour 1 m linéaire de conduit : $q_{le} = q_{lc} = q_{la} = 528.5083\,\pi \dfrac{D_e + D_i}{2} = 45.6598$ W/m

```
clear all, clc
he = 5.9e3; lambda = 100;
Di = 0.025; De = 0.030; e = (De - Di)/2;
Te = 80; Ta = 20;

A = [1 0; -1 1; 0 -1];
b = [Te 0 -Ta]';
f = [0 0]';

%valeurs initiale pour la distribution des temperatures
theta0 = [60 40]'

nonconvergence = true; eps = 0.001; %erreure admise pour les temperatures
while nonconvergence
    %calculer G = f(theta0)
    ha = 1.32*((theta0(2) - Ta)/De)^0.25
    G = [he     0          0;...
          0   lambda/e    0;...
          0     0          ha];

    %estimer la temperature
    theta = inv((A'*G*A))*(A'*G*b + f)

    %verifier la convergence: que toutes les 'diff de temp' < eps
    nonconvergence = max(abs(theta0 - theta))>eps;
    epsc = theta0 - theta
    theta0 = theta;
end

q = G*(-A*theta + b)    %densites de flux [W/m²]
ql = q*pi*(De + Di)/2   %flux pour 1m de conduit [W/m]
Tac = theta(2)-q(2)/ha  %temperature de l'air calculée
Tac - Ta                %difference entre Tair et Tair_calculée
```

Calcul « manuel »

On observe que :

$$q = \frac{T_e - T_a}{\frac{1}{h_e} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_a}} = \frac{\theta_2 - T_a}{\frac{1}{h_a}} \text{ ; d'où : } \theta_2 = \frac{1}{h_a}\left(\frac{T_e - T_a}{\frac{1}{h_e} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_a}} \right)$$

- Supposer une distribution initiale de la température : $\theta_{0;1} = 80$, $\theta_{0;2} = 40$
- **Pendant que la convergence n'est pas atteinte**
  - Calculer la matrice $\mathbf{G}$ en fonction de $\boldsymbol{\theta}_0$, où

    $G_{3,3} = h_a = 1.32\left((\theta_2 - T_a)/D_e\right)^{0.25}$

    $h_a = 1.32((40 - 20)/0.030)^{0.26} = 6.7074$ W/m² K
  - Estimer les températures

    $$\theta_2 = \frac{1}{h_a}\left(\frac{T_e - T_a}{\frac{1}{h_e} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_a}} \right) = \frac{1}{6.7074}\left(\frac{80 - 20}{\frac{1}{5.9 \cdot 10^3} + \frac{0.0025}{100} + \frac{1}{6.7074}} \right) = 79.9218°\text{C}$$
  - Vérifier la convergence :

    $\theta_{0;2} - \theta_2 = 40 - 79.9218 = -39.9218 > \varepsilon = 0.001$ **convergence = non**
  - $\theta_{0;2} = \theta_2$

On répète le calcul (itération 2) :

- Calculer la matrice $\mathbf{G}$ en fonction de $\boldsymbol{\theta}$, où $G_{3,3} = h_a = 1.32\left((\theta_2 - T_a)/D_e\right)^{0.25}$

$h_a = 1.32((79.9218 - 20)/0.030)^{0.26} = 8.8245$ W/m² K

- Estimer les températures :

$$\theta_2 = \frac{1}{h_a}\left(\frac{T_e - T_a}{\frac{1}{h_e} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_a}}\right) = \frac{1}{8.8245}\left(\frac{80 - 20}{\frac{1}{5.9 \cdot 10^3} + \frac{0.0025}{100} + \frac{1}{8.8245}}\right) = 79.8972°\text{C}$$

- Vérifier la convergence :

$\theta_{0;2} - \theta_2 = 79.9218 - 79.8972 = 0.0246 > \varepsilon = 0.001$ **convergence = non**

- $\theta_{0;2} = \theta_2$

On répète le calcul (itération 3) :

- Calculer la matrice $\mathbf{G}$ en fonction de $\boldsymbol{\theta}$, où $G_{3,3} = h_a = 1.32\left((\theta_2 - T_a)/D_e\right)^{0.25}$

$h_a = 1.32((79.8972 - 20)/0.030)^{0.26} = 8.8236$ W/m² K

- Estimer les températures :

$$\theta_2 = \frac{1}{h_a}\left(\frac{T_e - T_a}{\frac{1}{h_e} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_a}}\right) = \frac{1}{8.8236}\left(\frac{80 - 20}{\frac{1}{5.9 \cdot 10^3} + \frac{0.0025}{100} + \frac{1}{8.8236}}\right) = 79.8972°\text{C}$$

- Vérifier la convergence :

$\theta_{0;2} - \theta_2 = 79.8972 - 79.8972 = 0.0000 < \varepsilon = 0.001$ **convergence = oui**

Stop itérations

- Calculer les flux : $q = \dfrac{T_e - T_a}{\frac{1}{h_e} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h_a}} = 528.5083$ W/m²

Note : L'erreur de calcul pour le flux : $\varepsilon = \dfrac{49.7909 - 45.6598}{49.7909} = 8.3\%$