Ex08 Création de chaleur en coordonées cylindriques

Un câble conducteur protégé par une gaine isolante est immergé dans l'eau à T_0. On fait passer dans ce conducteur un courant I de densité constante dans toute la section.

Calculer la distribution des températures lorsque le régime permanent est obtenu.

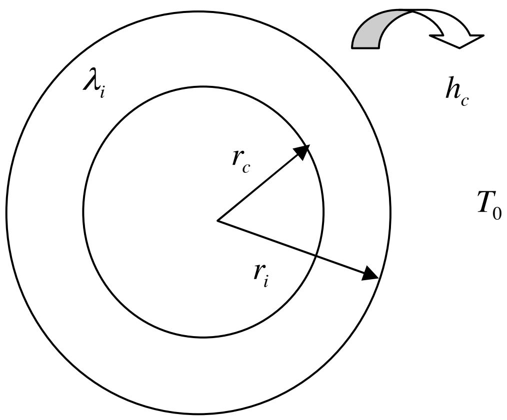
Notations :

R_l, résistance linéique électrique du conducteur ;

λ_c, conductivité du conducteur ;

λ_i, conductivité de la gaine isolante ;

h_e, coefficient d'échange superficiel gaine-eau.



Conduction en régime stationnaire avec sources internes.

1) Sources internes

Considérons un conducteur électrique cylindrique de longueur L et surface transversale $A_c = \pi r_c^2$. La quantité de chaleur produite par effet Joule est $Q_{Joule} = R I^2$ [W]. La quantité de chaleur produite par unité de volume est

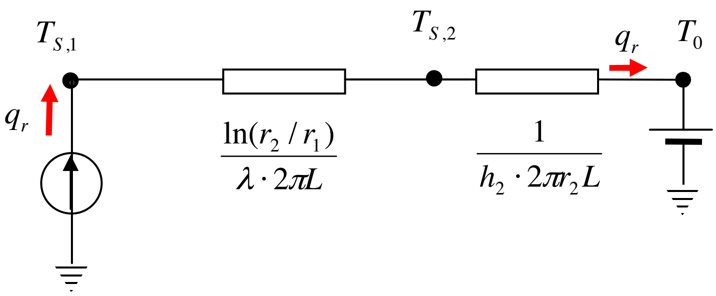
$$\boxed{p = \frac{Q_{Joule}}{\pi r_c^2 L} = \frac{R}{L}\frac{I^2}{\pi r_c^2} = \frac{R_l I^2}{\pi r_c^2}\ [\mathrm{W/m^3}]}$$

2) Équations différentielles et conditions aux limites

$$\begin{cases}
\lambda_c \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT}{dr}\right) + p = 0 \ \text{(dans le câble)} \\
\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT}{dr}\right) = 0 \ \text{(dans l'isolant)} \\
dT/dr\big|_{r=0} = 0 \ \text{(flux nul en } r = 0 \text{ due à la symetrie)} \\
\lambda_c\, dT/dr\big|_{r=r_c-} = \lambda_i\, dT/dr\big|_{r=r_c+} \ \text{(flux conservatif à la surface de contact)} \\
T(r_{c-}) = T(r_{c+}) \ \text{(température de surface du câble égale à la température de l'isolant)} \\
-\lambda_i dT/dr\big|_{r=r_i-} = h[T(r_u) - T_0] \ \text{(flux sortant par conduction égale au flux de convection)}
\end{cases}$$

3) Température de surface du conducteur électrique

Le flux de chaleur produit à l'intérieur du câble est évacue par la surface extérieure du câble.



$$q_r = Q_{Joule} \; [W]$$

Le flux à la surface extérieure de l'isolant est :

$$q_r = h_2 \cdot 2\pi r_2 L (T_{S,2} - T_0)$$

D'où la température de surface extérieure de l'isolant :

$$T_{S,2} = T_0 + \frac{q_r}{h_2 \cdot 2\pi r_2 L}.$$

Le flux à travers l'isolant est

$$q_r = \lambda \frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)}(T_{S1} - T_{S2})$$

La température de surface du câble est :

$$\boxed{T_{S1} = T_{S2} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda \cdot 2\pi L} q_r}.$$

4) Distribution de la température dans le câble électrique

a) approche basée sur l'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur en régime stationnaire avec sources internes

$$\lambda_c \nabla^2 T + p = 0$$

en coordonnées cylindrique pour une symétrie cylindrique :

$$\lambda_c \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + p = 0 \text{ ou } \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{p}{\lambda_c} = 0 \text{ ou}$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{pr}{\lambda_c}$$

Par intégration en fonction de r, on obtient

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{pr^2}{2\lambda_c} + C_1 \text{ ou}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{pr}{2\lambda_c} + \frac{C_1}{r}$$

En intégrant encore une fois en fonction de r, on obtient

$$T(r) = -\frac{pr^2}{4\lambda_c} + C_1 \ln(r) + C_2$$

Les constants d'intégrations s'obtient en utilisant les conditions aux limites :

CL1 : $\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0$ (flux nul en $r = 0$ due à la symétrie)

CL2 : $T|_{r=r_c} = T_c = T_{S,1}$ (la température en r_c est égale à la température de l'isolant).

De $\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0$ et $\frac{dT}{dr} = -\frac{pr}{2\lambda_c} + \frac{C_1}{r}$ on obtient $C_1 = 0$

De $T|_{r=r_c} = T_c = T_{S,1}$ et $T(r) = -\frac{pr^2}{4\lambda_c} + C_1 \ln(r) + C_2$ on obtient $C_2 = T_c + \frac{pr_c^2}{4\lambda_c}$

L'équation de la distribution spatiale de la température dévient :

$$T(r) = -\frac{pr^2}{4\lambda_c} + T_c + \frac{pr_c^2}{4\lambda_c} \text{ ou } \boxed{T(r) = T_c + \frac{p}{4\lambda_c}(r_c^2 - r^2)}$$

b) Approche basée sur des considérations physiques

Pour chaque rayon r, la chaleur produite à l'intérieure du rayon, $p\,\pi r^2\,L$, doit sortir par conduction par la surface délimitée par ce rayon, $-\lambda_c\,(2\pi r\,L)\frac{dT}{dr}$:

$$p\,\pi r^2\,L = -\lambda_c\,(2\pi r\,L)\frac{dT}{dr}$$

Séparation des variables

$$dT = -\frac{p}{2\lambda_c} r\,dr$$

En intégrant

$$T(r) = -\frac{pr^2}{4\lambda_c} + C$$

La constante d'intégration s'obtient en utilisant la condition à la limite $r = r_c$

$T(r_c) = T_c = T_{s,1}$

Donc

$C = T_c + \dfrac{p r_c^2}{4\lambda_c}$ et la distribution de la température est

$$\boxed{T(r) = T_c + \frac{p}{4\lambda_c}(r_c^2 - r^2)}$$

5) Température maximale

La température maximale est dans le centre du câble. En mettant $r = 0$ dans l'équation de la distribution de la température on obtient

$$\boxed{T_{\max} = T_c + \frac{p}{4\lambda_c} r_c^2}$$

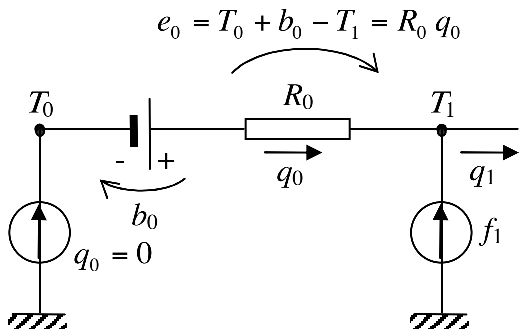
6) Température dans le centre du câble électrique en utilisant l'équivalent électrique de l'équation de Poisson

$$R_0 = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\lambda S} ds$$

où $s = r$; $s_0 = 0$; $s_1 = r_c$; $\lambda = \text{ct.}$

$S = 2\pi r L$;

$$R_0 = \frac{1}{2\pi L\lambda} \int_0^{r_c} \frac{1}{r} dr = \frac{\ln(r_c/0)}{2\pi L\lambda} = \infty$$



$$f_1 = \int_{s_0}^{s_1} p S\, ds = \int_0^{r_c} p\, 2\pi L r\, dr = 2\pi L p \int_0^{r_c} r\, dr = \pi L r_c^2 p$$

$$b_0 = -\int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\lambda S}\left(\int_{s_0}^{s} p S\, ds'\right) ds = -\frac{1}{\lambda}\int_0^{r_c} \frac{1}{2\pi L r}\left(\int_0^{r} p\, 2\pi L r\, dr'\right) dr = -\frac{p}{\lambda}\int_0^{r_c} \frac{1}{r}\left(\int_0^{r} r\, dr'\right) dr$$

$$= -\frac{p}{\lambda}\int_0^{r_c} \frac{1}{r}\left[\frac{r'^2}{2}\right]_0^r dr = -\frac{p}{\lambda}\int_0^{r_c} \frac{1}{r}\frac{r^2}{2} dr = -\frac{p}{2\lambda}\int_0^{r_c} r\, dr = -\frac{p}{4\lambda} r_c^2$$

$$\boxed{T_{\max} = T_0 = T_1 - b_0 = T_c - b_0 = T_c + \frac{p}{4\lambda} r_c^2}$$