Ex07 Isolation thermique des tubes cylindriques

De la vapeur d'eau à la température T_{1m} s'écoule dans un tube (conductivité du matériau λ_t) de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2. Ce tube traverse une salle dont la température moyenne est prise égale à T_{2m}.

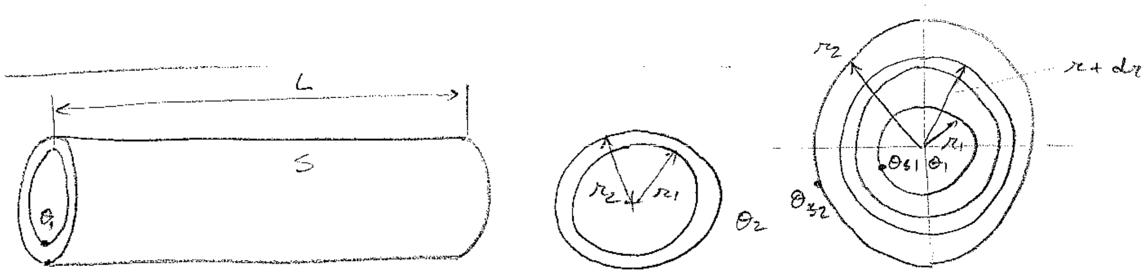
1. Evaluer le flux de chaleur $\dot{Q}$ qui passe de l'intérieur à l'extérieur du tube pour une longueur L de celui-ci. Les coefficients d'échange superficiel sont désignés par les lettres h_1 (coefficients vapeur d'eau-tube) et h_2 (coefficient tube-air ambiant).
2. Les pertes de chaleur calculées précédemment étant jugées trop importantes, on décide de calorifuger la conduite sur toute la longueur L. A cet effet, on recouvre le tube d'un manchon de rayon intérieur r_2 et de rayon extérieur r_3 (conductibilité du matériau isolant employé λ_i). On suppose que le nouveau coefficient d'échange superficiel calorifuge-air ambiant est le même que le coefficient tube air ambiant, soit h_2. On demande d'évaluer le nouveau flux de chaleur $\dot{Q}_i$ traversant le tube et son manchon isolant, pour la longueur L.
3. Evaluer l'accroissement ΔR de la résistance thermique totale R dû au calorifugeage de la conduite.
4. Etudier les variations de ΔR en fonction de r_3 lorsque celui-ci varie de r_2 à l'infini. On utilisera la variable secondaire $x = r_2 / r_3,\ 0 < x < 1$ et on posera $\alpha = r_2 h_2 / \lambda_i$. Discuter les différents cas obtenus en fonction des valeurs d' α.
5. On demande de déterminer la valeur de l'épaisseur de l'isolant pour laquelle les pertes calorifiques sont les mêmes qu'en l'absence du calorifuge. On fera le calcul dans le cas suivant :

   - le calorifuge est de mousse de conductibilité $\lambda_i = 0{,}20\ \mathrm{W/m \cdot K}$;
   - le coefficient d'échange superficiel isolant – air ambiant est $h_2 = 7\ \mathrm{W/m^2 \cdot K}$;
   - le rayon extérieur de la conduite est $r_2 = 25\ \mathrm{mm}$.

   Pour résoudre cette question, on se servira de la fonction $y = \dfrac{x-1}{\ln x}$ dont quelques valeurs numériques sont :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\dfrac{x-1}{\ln x}$	0	0,391	0,498	0,582	0,656	0,721	0,785	0,844	0,902	0,956	1

6. Traiter le même problème quand le rayon extérieur de la conduite est $r_2 = 50\ \mathrm{mm}$.



1. Evaluer le flux de chaleur $\dot{Q}$ qui passe de l'intérieur à l'extérieur du tube

Une solution est donnée dans le chapitre 3.1.2. En partant de l'équation de la chaleur, on obtient :

$$T(r) = T_{S1} - \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_1} = T_{S2} + \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_2}$$

et

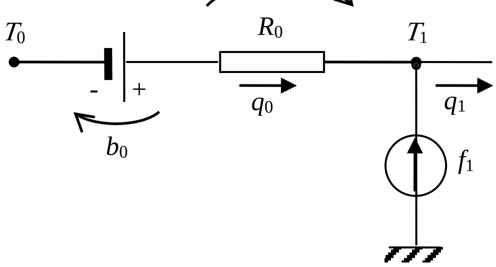
$$\dot{Q} = \lambda \frac{2\pi L}{\ln(r_2 / r_1)} (T_{S1} - T_{S2}) = \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\frac{\ln(r_2 / r_1)}{\lambda\, 2\pi L}}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{1m} - T_{S1}}{\frac{1}{2\pi r_1 L\, h_1}} = \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\frac{\ln(r_2 / r_1)}{\lambda\, 2\pi L}} = \frac{T_{S2} - T_{2m}}{\frac{1}{2\pi r_2 L\, h_2}}$$, d'où

$$\dot{Q} = \frac{T_{1m} - T_{2m}}{\frac{1}{h_1\, 2\pi r_1 L} + \frac{\ln(r_2 / r_1)}{\lambda\, 2\pi L} + \frac{1}{h_2\, 2\pi r_2 L}}$$

Solution basée sur la représentation par un circuit de la conduction unidimensionnelle avec sources internes

$$e_0 = T_0 + b_0 - T_1 = R_0\, q_0$$



$p = 0$ sans sources internes

La résistance thermique d'une paroi plane est $R = \frac{e}{\lambda S}$.

Pour un cylindre d'épaisseur $e = ds$, la résistance thermique est $dR = \frac{ds}{\lambda\, S}$. La résistance thermique du cylindre est :

$$R_0 = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\lambda\, S}\, ds$$

où $s = r$; $s_0 = r_1$; $s_1 = r_2$; $\lambda = \text{ct.}$ $S = 2\pi\, r\, L$;

$$R_0 = \frac{1}{2\pi\, L\, \lambda} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}\, dr = \frac{1}{2\pi\, L\, \lambda} [\ln r]_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{2\pi\, L\, \lambda} (\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi\, L\, \lambda}$$

$$b_0 = -\int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\lambda S}\left(\int_{s_0}^{s_1} pSds'\right)ds$$

Intégration par parties : $\int u'vds = uv - \int uv'ds$; avec $u = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\lambda S} ds$ et $v = \int_{s_0}^{s_1} pSds$, on a :

$$b_0 = -\int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\lambda S}\left(\int_{s_0}^{s_1} pSds'\right)ds = -\left(\int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\lambda S} ds\right)\left(\int_{s_0}^{s_1} pSds\right) + \int_{s_0}^{s_1}\left(\int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\lambda S} ds\right)pSds$$

ou :

$$b_0 = -R_0 \int_{s_0}^{s_1} pSds + \int_{s_0}^{s_1} R_0\, pSds$$

$$f_1 = \int_{s_0}^{s_1} p\, S\, ds = 0$$

$$q_0 = \frac{e_0}{R_0} = \frac{T_0 + b_0 - T_1}{R_0} \text{ où } T_0 = T_{1m} \text{ et } T_1 = T_{2m} \Rightarrow \boxed{q_0 = \frac{T_{1m0} - T_{2m}}{\dfrac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi\, L\, \lambda}}}$$

Solution basée sur la séparation des variables

On remarque que les isothermes sont des cylindres concentriques ; le flux, étant perpendiculaire sur les isothermes, a la direction des rayons. Le flux passant par une isotherme cylindrique est constant ; la loi de Fourier pour les flux passant par une isotherme cylindrique est :

$$\dot{Q} = -\lambda\, S \frac{dT}{dr},\ S = 2\pi\, r\, L \Rightarrow \dot{Q} = -\lambda\, 2\pi\, L\, r \frac{dT}{dr}$$

En séparant les variables :

$$dT = -\frac{\dot{Q}}{\lambda\, 2\pi\, L}\frac{dr}{r}\ ;$$

En intégrant :

$$\int_{T_{S1}}^{T_{S2}} dT = -\frac{\dot{Q}}{\lambda\, 2\pi\, L}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}\ ;\ T_{S2} - T_{S1} = -\frac{\dot{Q}}{\lambda\, 2\pi\, L}(\ln r_2 - \ln r_1)$$

$$T_{S2} - T_{S1} = -\frac{\dot{Q}}{\lambda\, 2\pi\, L} \ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{\lambda\, 2\pi L}{\ln(r_2 / r_1)}(T_{S1} - T_{S2}) = \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\dfrac{\ln(r_2 / r_1)}{\lambda\, 2\pi L}}}$$

Solution en considérant la valeur moyenne logarithmique du rayon :

De l'expression du flux : $\dot{Q} = -\lambda\, S\, \frac{dT}{dr}$ ou $\dot{Q} = -\lambda\, 2\pi\, L\, r\, \frac{dT}{dr}$, il en résulte : $dT = -\frac{\dot{Q}}{\lambda\, 2\pi\, L}\frac{dr}{r}$. Alors

$\int_{T_{S1}}^{T_{S2}} dT = -\frac{\dot{Q}}{\lambda\, 2\pi\, L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$ (v. ci-dessus) et alors :

$$T_{S2} - T_{S1} = -\frac{\dot{Q}}{\lambda\, 2\pi\, L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$$

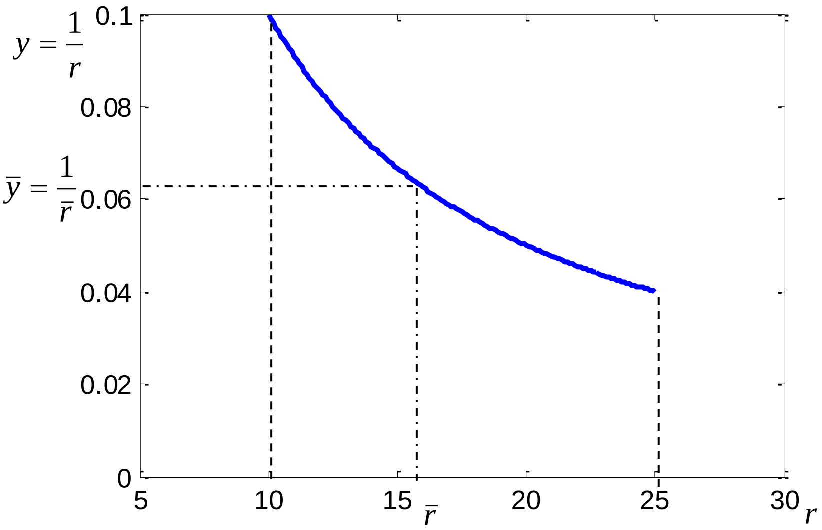


Figure 1 Représentation de la fonction $y = \frac{1}{r}$ **. Sa valeur moyenne est** $\bar{y} = \frac{1}{r_2 - r_1}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}dr = \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{r_2 - r_1}$ **.**

Comme $\bar{y} = \frac{1}{\bar{r}}$ **, il en résulte** $\bar{r} = \frac{r_2 - r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} = \frac{r_2 - r_1}{\ln(r_2 / r_1)}$

La valeur moyenne, $\bar{y}$, d'une fonction $y = f(x)$ est :

$$\bar{y} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \quad \text{ou} \quad \bar{y} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y\, dx$$

Dans le cas d'une variation linéaire, $y = x$,

$\bar{y} = \frac{1}{x_2 - x_1}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)} = \frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{2(x_2 - x_1)} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, c. à d. la moyenne arithmétique

Dans le cas du cylindre, $x = r$ et $y = \frac{1}{r}$; donc

$\bar{y} = \frac{1}{r_2 - r_1}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r}dr = \frac{\ln r_2 - \ln r_1}{r_2 - r_1}$;

La valeur de l'intégrale peut être exprimée en fonction de la valeur moyenne : $\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \bar{y}(r_2 - r_1)$. Comme

$\bar{y} = \frac{1}{\bar{r}}$, et $\bar{r} \equiv r_{ml}$ il en résulte $\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{1}{\bar{r}}(r_2 - r_1)$ ou, en évaluant l'intégrale,

$\ln(r_2) - \ln(r_1) = \frac{1}{\bar{r}}(r_2 - r_1)$;

En notant la moyenne logarithmique du rayon : $\boxed{\bar{r} \equiv r_{ml} = \frac{r_2 - r_1}{\ln(r_2 / r_1)} = \frac{e}{\ln(r_2 / r_1)}}$,

l'expression du flux devient :

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\dfrac{e}{\lambda\, 2\pi\, r_{ml}\, L}} = \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\dfrac{e}{\lambda\, S_{ml}}} \quad \text{où } S_{ml} = 2\pi\, r_{ml}\, L}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{1m} - T_{S1}}{\dfrac{1}{h_1\, S_1}} = \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\dfrac{e}{\lambda\, S_{ml}}} = \frac{T_{S2} - T_{2m}}{\dfrac{1}{h_2\, S_2}} \quad \text{où } S_1 = 2\pi r_1 L,\ S_{ml} = 2\pi r_{ml} L,\ S_2 = 2\pi r_2 L$$

Le flux sur l'unité de longueur :

$$\dot{Q}_L = \frac{T_{1m} - T_{S1}}{\dfrac{1}{h_1\, 2\pi r_1}} = \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\dfrac{e}{\lambda\, 2\pi r_{ml}}} = \frac{T_{S2} - T_{2m}}{\dfrac{1}{h_2\, 2\pi r_2}}$$

$$\boxed{\dot{Q}_L = \frac{T_{1m} - T_{2m}}{\dfrac{1}{h_1\, 2\pi r_1} + \dfrac{e}{\lambda\, 2\pi r_{ml}} + \dfrac{1}{h_2\, 2\pi r_2}} = 2\pi \frac{T_{1m} - T_{2m}}{\dfrac{1}{h_1\, r_1} + \dfrac{1}{\lambda\, r_{ml}} + \dfrac{1}{h_2\, r_2}}}$$

---

2. Le flux de chaleur $\dot{Q}_i$ qui passe de l'intérieur à l'extérieur du tube isolé

$$\dot{Q}_L = 2\pi \frac{T_{1m} - T_{2m}}{\dfrac{1}{h_1\, r_1} + \dfrac{e}{\lambda\, r_{ml}} + \dfrac{e_i}{\lambda_i\, r_{ml\, i}} + \dfrac{1}{h_2\, r_3}}$$

---

3. Accroissement ΔR de la résistance thermique totale

$$\Delta R = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e_i}{\lambda_i r_{ml\, i}} + \frac{1}{h_2 r_3} - \frac{1}{h_2 r_2}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\lambda_i}\ln(r_3 / r_2) + \frac{1}{h_2 r_3} - \frac{1}{h_2 r_2}\right)$$

$$r_{ml} = \frac{r_2 - r_1}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{e}{\ln(r_2/r_1)}$$

$$\frac{1}{h_2 r_3} - \frac{1}{h_2 r_2} = \frac{1}{r_2 h_2}\left(\frac{r_2}{r_3} - 1\right)$$

$$\Delta R = \frac{1}{2\pi\lambda_i}\left(-\ln(r_2/r_3) + \frac{\lambda}{r_2 h_2}\left(\frac{r_2}{r_3} - 1\right)\right)$$

En exprimant en fonction du rapport r_2 / r_3,

$$x \equiv \frac{r_2}{r_3} \;;\; \alpha \equiv \frac{r_2 h_2}{\lambda_i}$$

$$\boxed{\Delta R = \frac{1}{2\pi\lambda_i}\left(-\ln x + \frac{1}{\alpha}(x-1)\right)}$$

---

4. Etude des variations de ΔR en fonction de r_3

$$x \equiv \frac{r_2}{r_3}$$

Variations de r_3 :

$$r_3 = r_2 \;\Rightarrow\; x = 1$$

$$r_3 = \infty \Rightarrow\; x = 0$$

Variations de x : $\quad x \in \,]0 \quad 1]$

La dérivée de ΔR : $\dfrac{d(\Delta R)}{dx} = \dfrac{1}{2\pi\lambda_i}\left(-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\alpha}\right)$; $\dfrac{d(\Delta R)}{dx} = 0$ pour $x = \alpha$

cas $\alpha > 1$:

comme toujours $x \le 1$ (parce que $r_3 \ge r_2$), $\Rightarrow \dfrac{1}{\alpha} < 1 \le \dfrac{1}{x}; -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\alpha} < 0 \Rightarrow \dfrac{d(\Delta R)}{dx} < 0$

$\lim_{x\to 0} \Delta R = \infty$; $\Delta R\big|_{x\to 1} = 0$;

cas $\alpha < 1$:

$$x < \alpha < 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} > \frac{1}{\alpha}; -\frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha} < 0 \;\Rightarrow\; \frac{d(\Delta R)}{dx} < 0$$

$$\alpha < x < 1 \Rightarrow\; \frac{1}{x} < \frac{1}{\alpha}; -\frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha} > 0 \;\Rightarrow\; \frac{d(\Delta R)}{dx} > 0$$

$\lim_{x\to 0} \Delta R = \infty$; $\Delta R\big|_{x\to 1} = 0$; $\lim_{x\to\infty} \Delta R = \infty$

x	0	$x < \alpha$	α	$\alpha < x$	1
r_3	∞		λ_i / h_2		r_2
ΔR	∞	$\downarrow$	$\dfrac{1}{2\pi\lambda_i}\left(-\ln\alpha + \dfrac{\alpha-1}{\alpha}\right)$	$\uparrow$	0

5. Rayon extérieur de la conduite : $r_2 = 25\ \text{mm}$, $\alpha < 1$

Epaisseur de l'isolant pour laquelle les pertes calorifiques sont les mêmes qu'en l'absence du calorifuge

$$\Delta R = \frac{1}{2\pi\lambda_i}\left(-\ln x + \frac{1}{\alpha}(x-1)\right)$$

$\Delta R = 0 \ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\alpha}(x-1) = \ln x$; les deux solutions pour $\alpha = \dfrac{r_2 h_2}{\lambda_i} = 0.875$ sont :

1. $x = 1 \ \Rightarrow\ r_3 = r_2$ (la solution banale, c. à d. sans isolant)

2. $x = 0.75 \ \Rightarrow\ \dfrac{r_2}{r_3} = 0.75 \ \Rightarrow r_3 = \dfrac{r_2}{0.75} = 0.033\ \text{m}$

6. Rayon extérieur de la conduite : $r_2 = 50\ \text{mm}$, $\alpha > 1$

$$\alpha = \frac{r_2 h_2}{\lambda_i} = \frac{0.050 \times 7}{0.20} = 1.75$$

$\alpha > 1\ \ \Delta R = 0 \ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\alpha}(x-1) = \ln x$.

Comme $\dfrac{x-1}{\ln x} < 1$ et $\alpha > 1 \ \Rightarrow$ pas de solution pour $\dfrac{x-1}{\ln x} = \alpha$