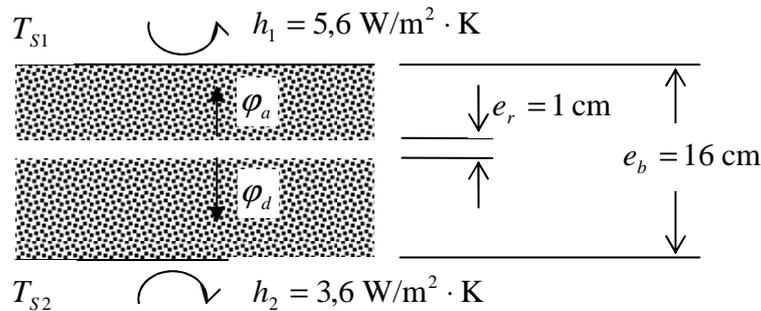


Ex 06 Etude en régime permanent d'un chauffage électrique par plancher

Un système de chauffage électrique par plancher est constitué de câbles électriques chauffants (que l'on pourra assimiler à une plaque de 1 cm d'épaisseur) noyés dans une dalle de béton (épaisseur totale : 16 cm) de conductivité thermique $\lambda = 1,2 \text{ W/m} \cdot \text{K}$.

$$T_{a1} = T_A = 18 \text{ }^\circ\text{C}$$



$$T_{a2} = T_A = 18 \text{ }^\circ\text{C}$$

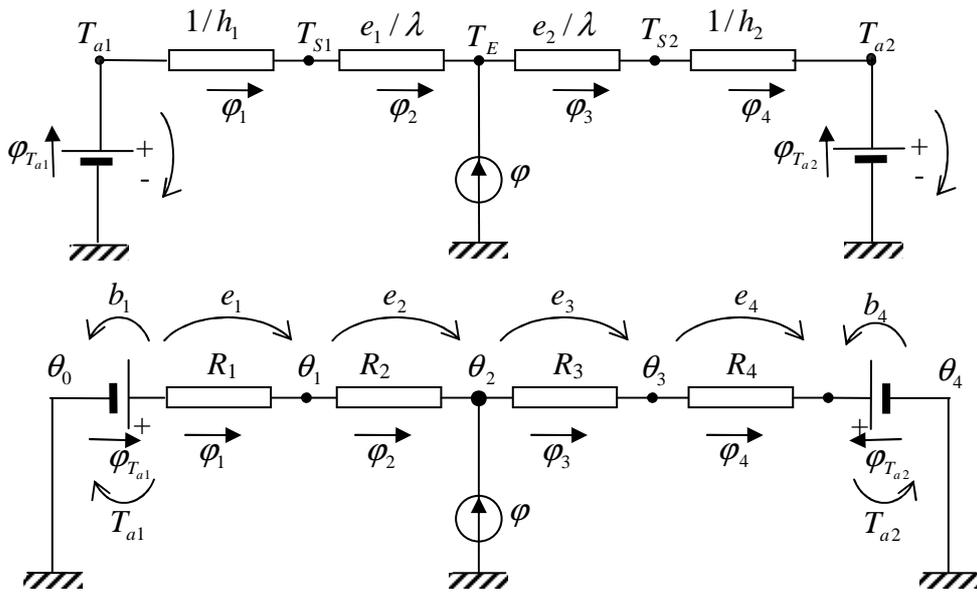
Le flux de chaleur par unité de surface créée par le câble électrique, φ , est de 100 W/m^2 ; ce flux se partage en un flux ascendant, φ_a (chauffage par le plancher), et un flux descendant, φ_d (chauffage par le plafond). Les coefficients d'échange superficiel par convection des surfaces horizontales sont respectivement :

$$h_1 = 5,6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}, \text{ pour la surface supérieure}$$

$$h_2 = 3,6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}, \text{ pour la surface inférieure.}$$

La température T_A de l'air de chaque côté du plancher est de $18 \text{ }^\circ\text{C}$; la température de l'élément chauffant est supposée uniforme et égale à T_E .

1. En négligeant les échanges de chaleur par rayonnement et dans le cas où le plan chauffant est situé au centre du plancher, déterminer :
 - la température de l'élément chauffant, T_E ;
 - les températures superficielles, T_{S1} et T_{S2} .
2. Considérant que la température de surface du plancher, T_{S1} , est trop importante (inconfort thermique), on se propose de déplacer le plan chauffant à une distance x de la surface du plancher pour que la température de surface ne dépasse pas 24°C , $T_{S1} \leq 24^\circ\text{C}$. Quelle est cette distance x ?
3. La solution obtenue étant aberrante, le local est isolé pour que la puissance dissipée soit inférieure à 100 W/m^2 . Quelle doit être cette puissance pour que la température de surface soit de 24°C , le plan chauffant étant situé au centre du plancher.



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T_{a1} \\ 0 \\ 0 \\ -T_{a2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda/e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [0 \quad \varphi \quad 0]^T$$

Solution numérique (v. cours) :

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f}) \equiv [T_{S1} \quad T_E \quad T_{S2}]^T = [28.45 \quad 32.11 \quad 29.52]^T \text{ } ^\circ\text{C}$$

```
clear all, clc
```

```
h1 = 5.6; h2 = 3.6; % coefficients de convection
lambda = 1.2; % conductivite
e1 = 0.075; e2 = 0.075; e = 0.150; %epaisseurs
phi = 100; % flux de chaleur cree par le cable
Ta1 = 18; Ta2 = 18; % temperature de l'air de chaque cote
```

```
% Description matricielle
```

```
A = [1 0 0; -1 1 0; 0 -1 1; 0 0 -1];
b = [Ta1 0 0 -Ta2]';
G = [h1 0 0 0; 0 lambda/e1 0 0; 0 0 lambda/e2 0; 0 0 0 h2];
f = [0 phi 0]';
theta = inv(A'*G*A)*(A'*G*b + f)
```

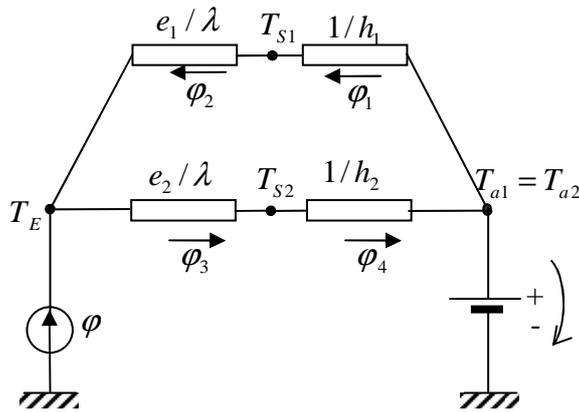
$$\text{Solution : } \boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T \equiv [T_{S1} \quad T_E \quad T_{S2}]^T = [28.45 \quad 32.11 \quad 29.52]^T \text{ } ^\circ\text{C}$$

Solution analytique

Système de 3 équations avec 3 inconnues, φ , φ_1 , φ_2 :

$$\begin{cases} \varphi_2 = \frac{T_{a1} - T_E}{\frac{1}{h_1} + \frac{e_1}{\lambda}} \\ \varphi_3 = \frac{T_E - T_{a2}}{\frac{e_2}{\lambda} + \frac{1}{h_2}} \\ \varphi = -\varphi_2 + \varphi_3 \end{cases}$$

où, on remarque que, parce que $T_{a1} = T_{a2} = T_a$, la forme équivalente du circuit consiste en deux résistances en parallèle, chacune formée par deux résistances en série.



$$\varphi = (T_E - T_a) \left(\frac{1}{R_{eq1}} + \frac{1}{R_{eq2}} \right) ; R_{eq1} = \frac{1}{h_1} + \frac{e_1}{\lambda} ; R_{eq2} = \frac{1}{h_2} + \frac{e_2}{\lambda}$$

$$T_E = T_a + \varphi \frac{1}{1/R_{eq1} + 1/R_{eq2}} = 32.11 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{T_a - T_E}{R_{eq1}} = -58.53 \text{ W/m}^2 ; \varphi_3 = \varphi_4 = \frac{T_E - T_a}{R_{eq2}} = 41.46 \text{ W/m}^2$$

Noter le signe de φ_1 .

$$\varphi_2 = \frac{T_{S1} - T_E}{e_1 / \lambda} ; T_{S1} = T_E + \varphi_2 \frac{e_1}{\lambda} = 28.45 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\varphi_3 = \frac{T_E - T_{S2}}{e_2 / \lambda} ; T_{S2} = T_E - \varphi_3 \frac{e_2}{\lambda} = 29.52 \text{ } ^\circ\text{C}$$

2. Problème inverse de dimensionnement : épaisseur pour la que température de surface soit $T_{S1} = 24 \text{ °C}$

Solution numérique

Comme la conductance $G_{2,2} = \lambda / x$, la matrice des conductances \mathbf{G} dépend de l'épaisseur inconnue x , la température dans le nœud 1,

$$\theta_1 = [1 \ 0 \ 0](\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f})$$

est en fonction de l'épaisseur inconnue x , $\theta_1(x)$. Pour trouver x , il faut résoudre l'équation :

$$\theta_1(x) = T_{S1} \text{ ou } f_\theta(x) \equiv \theta_1(x) - T_{S1} = 0.$$

Une solution numérique peut être donnée en utilisant la méthode de la sécante. Considérons la définition de la dérivée autour de la solution de l'équation (c. à d. $f(x) = 0$) :

$$f'(x_k) \equiv \frac{\Delta f(x_k)}{\Delta x} = \frac{f(x_k) - 0}{x_k - x_{k+1}}, \text{ donc } x_{k+1} = x_k - f(x_k) / f'(x_k)$$

on obtient la solution itérative :

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Algorithme :

1. Initialisation

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T_{a1} \\ 0 \\ 0 \\ -T_{a2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda/e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [0 \ \varphi \ 0]^T$$

2. On propose deux solutions initiales, $x_1 = e_1$ et $x_2 = e_1 + \Delta e$, où x_2 est une petite variation de l'épaisseur initiale e_1 (par ex. $\Delta e = 0.010 \text{ m}$)

$$x_1 = e_1 ; x_2 = e_1 + \Delta e ;$$

$$G_{2,2} = \lambda / x_1 ; f_\theta(x_1) = [1 \ 0 \ 0](\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f}) - T_{S1}$$

$$G_{2,2} = \lambda / x_2 ; f_\theta(x_2) = [1 \ 0 \ 0](\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f}) - T_{S1}$$

2. Calcul itératif de la solution

$k = 2$; le nombre de solutions proposées initialement

while $|f_\theta(x_k) - f_\theta(x_{k-1})| > \varepsilon$; critère de convergence (par ex. $\varepsilon = 0.001 \text{ °C}$)

$$x_{k+1} = x_k - f_\theta(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f_\theta(x_k) - f_\theta(x_{k-1})} ; \text{ calcule la nouvelle solution}$$

$k \leftarrow k + 1$; incrémente k

$$G_{2,2} = \lambda / x_k ;$$

$$f_\theta(x_k) = [1 \ 0 \ 0](\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f}) - T_{S1}$$

end

$$\theta_1 = f_\theta(x_{end}) + T_{S1} ; \text{ solution}$$

Les résultats sont (v. figure) :

```

% Initialisation
clear all, clc
e = 0.150;
h1 = 5.6; h2 = 3.6;
lambda = 1.2;
phi = 100;
Ta1 = 18; Ta2 = 18; TS1 = 24;

e1 = 0.075; e2 = e - e1;

A = [1 0 0; -1 1 0; 0 -1 1; 0 0 -1];
G = [h1 0 0 0; 0 lambda/e1 0 0; 0 0 lambda/e2 0; 0 0 0 h2];
b = [Ta1 0 0 -Ta2]';
f = [0 phi 0]';

% On propose deux solutions initiales :
x(1) = e1; x(2) = e1 + 0.010; % deux valeurs initiales de l'inconnue
% calcul de la fonction pour les valeurs initiales
G(2,2) = lambda/x(1); ft(1) = [1 0 0]*inv(A'*G*A)*(A'*G*b + f) - TS1;

G(2,2) = lambda/x(2); ft(2) = [1 0 0]*inv(A'*G*A)*(A'*G*b + f) - TS1;

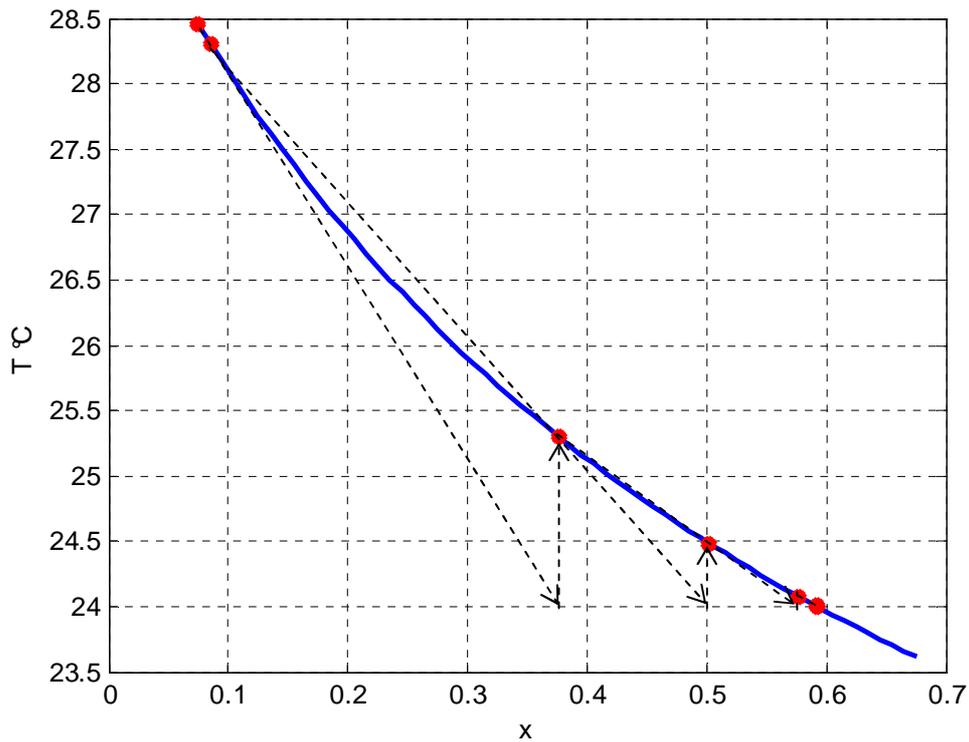
% Calcul iteratif de la solution
k = 2;
while abs(ft(k) - ft(k-1))>0.001 % verification condition d'arret
    % calcule la nouvelle solution
    xnew = x(k) - ft(k)*(x(k) - x(k-1))/(ft(k) - ft(k-1));
    k=k+1; x(k) = xnew;
    G(2,2) = lambda/x(k);
    ft(k) = [1 0 0]*inv(A'*G*A)*(A'*G*b + f) - TS1;
end
x
theta_1 = ft + TS1
plot(x, theta_1,'r')

% Verification graphique
%*****
% Cas épaisseur e2 = constant
for i = 0:60
    x = e/2 + 0.010*i;
    xi(i+1) = x;
    G = [h1 0 0 0; 0 lambda/x 0 0; 0 0 lambda/(e/2) 0; 0 0 0 h2];
    theta = inv(A'*G*A)*(A'*G*b + f);
    th(i+1) = [1 0 0]*theta;
end
hold on, plot(xi, th), xlabel('x'), ylabel('T °C'), grid on

```

$k =$	1	2	3	4	5	5	6	7
$x =$	0.0750	0.0850	0.3764	0.5023	0.5766	0.5915	0.5926	0.5927
$\theta_1 =$	28.4522	28.3045	25.2987	24.4818	24.0804	24.0059	24.0001	24.0000

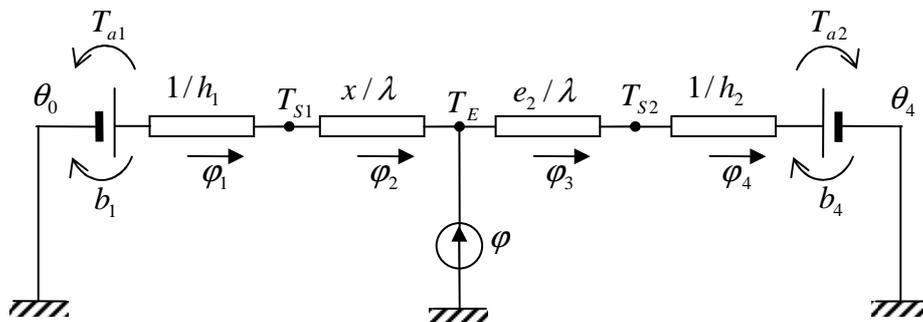
On remarque que, pour une erreur acceptable $\varepsilon = 0.001$ °C, l'algorithme converge en 5 itérations. La solution est en dehors de la limite physique, $x = 0.59 > e = 0.15$.



Solution analytique

On considère que l'épaisseur de la couche inférieure, e_2 , reste constante

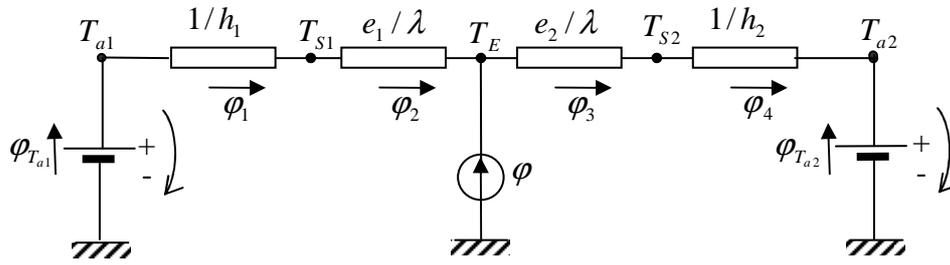
$$T_{S1} = 24 \text{ °C} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{T_{a1} - T_{S1}}{1/h_1} = -33.6 \text{ W/m}^2 ; \varphi_2 = \varphi_1$$



$$\varphi + \varphi_2 = \frac{T_E - T_{a2}}{\frac{e_2}{\lambda} + \frac{1}{h_2}} \Rightarrow T_E = T_{a2} + (\varphi + \varphi_2) \left(\frac{e_2}{\lambda} + \frac{1}{h_2} \right) = 40.59 \text{ °C}$$

$$\varphi_2 = \frac{\lambda}{x} (T_{S1} - T_E); \Rightarrow \boxed{x = \frac{T_{S1} - T_E}{\varphi_2 / \lambda} = 0.5927 \text{ m}} \text{ solution aberrante.}$$

3. Problème inverse de contrôle : calcul flux introduits



$T_{S1} = 24 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{a1} = 18 \text{ }^\circ\text{C}$, $h_1 = 5.6 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, il en résulte la densité de flux ascendant :

$$\varphi_1 = \frac{T_{a1} - T_{S1}}{1/h_1} = -33.6 \text{ W/m}^2$$

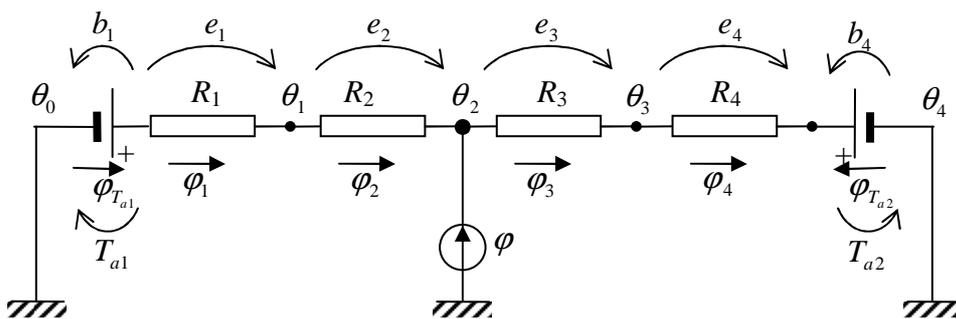
$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{T_{S1} - T_E}{e_1/\lambda} \Rightarrow T_E = T_{S1} - \varphi_2 \frac{e_1}{\lambda} = 26.10 \text{ }^\circ\text{C} \text{ température de l'élément chauffant}$$

La densité de flux descendant :

$$\varphi_3 = \frac{T_E - T_{a2}}{e_2/\lambda + 1/h_2} = 23.80 \text{ W/m}^2$$

La densité de flux totale donnée par l'élément chauffant :

$$\boxed{\varphi = -\varphi_2 + \varphi_3 = 57.40 \text{ W/m}^2}$$



La solution numérique est similaire au cas précédent.

1. Initialisation

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{matrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T_{a1} \\ 0 \\ 0 \\ -T_{a2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda/e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [0 \quad \varphi \quad 0]^T$$

2. On propose deux solutions initiales, $x_1 = \varphi_1$ et $x_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$, où x_2 est une petite variation du flux initial φ_1 (par ex. $\Delta\varphi = -10 \text{ W/m}^2$)

$$x_1 = \varphi_1 ;$$

Calcule la différence entre $\theta_1 = [1 \quad 0 \quad 0](\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f})$ et T_{S1}

$$\mathbf{f} = [0 \quad \varphi_1 \quad 0]^T ; f_\theta(\varphi_1) = [1 \quad 0 \quad 0](\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f}) - T_{S1}$$

$$x_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi ;$$

$$\mathbf{f} = [0 \quad \varphi_2 \quad 0]^T ; f_\theta(\varphi_2) = [1 \quad 0 \quad 0](\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f}) - T_{S1} ;$$

2. Calcul itératif de la solution

$$k = 2 ;$$

le nombre de solutions proposées initialement

while $|f_\theta(x_k) - f_\theta(x_{k-1})| > \varepsilon$; critère de convergence (par ex. $\varepsilon = 0.001 \text{ }^\circ\text{C}$)

$$x_{k+1} = x_k - f_\theta(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f_\theta(x_k) - f_\theta(x_{k-1})} ; \quad \text{calcule la nouvelle solution}$$

$$k \leftarrow k + 1 ;$$

incrémenter k

$$G_{2,2} = \lambda / x_k ;$$

$$f_\theta(x_k) = [1 \quad 0 \quad 0](\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f}) - T_{S1} \text{ (différence : } \theta_1 - T_{S1} \text{)}$$

end

```
clear all
phi = 100; h1 = 5.6; h2 = 3.6;
lambda = 1.2;
e = 0.150; e1 = 0.075; e2 = e - e1;
Ta1 = 18; Ta2 = 18; TS1 = 24;

A = [1 0 0; -1 1 0; 0 -1 1; 0 0 -1];
G = [h1 0 0 0; 0 lambda/e1 0 0; 0 0 lambda/e2 0; 0 0 0 h2];
b = [Ta1 0 0 -Ta2]';
f = [0 phi 0]';

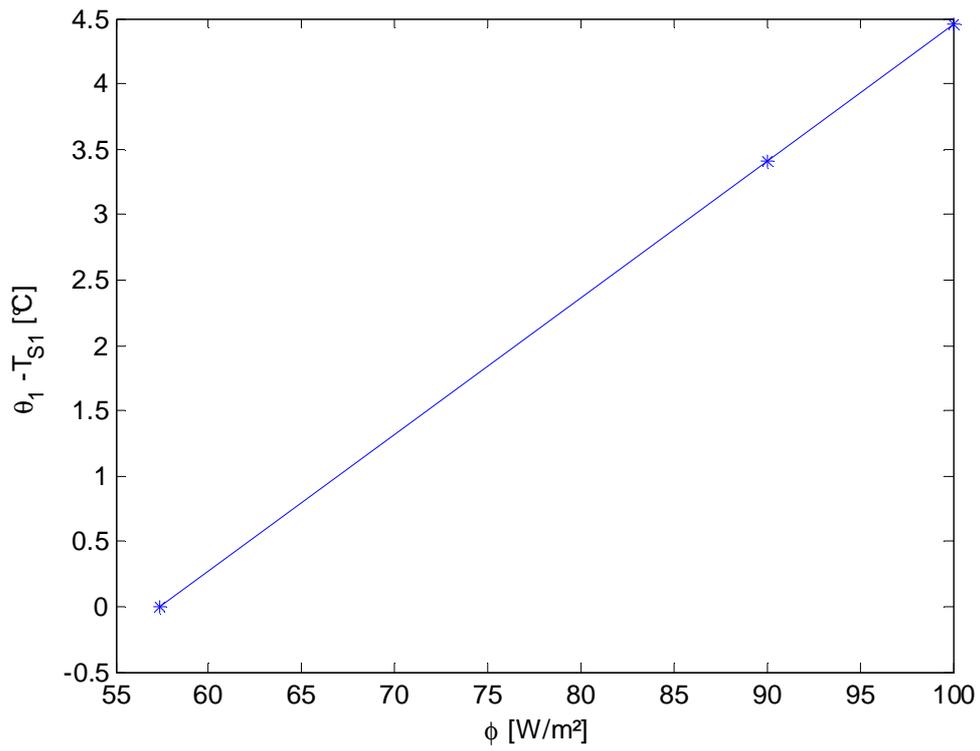
% Valeurs initiales
x(1) = phi; x(2) = x(1) - 10;

f(2) = x(1); % source de flux dans le nœud 2
ft(1) = [1 0 0]*inv(A'*G*A)*(A'*G*b + f) - TS1;

f(2) = x(2); % source de flux dans le nœud 2
ft(2) = [1 0 0]*inv(A'*G*A)*(A'*G*b + f) - TS1;
k = 2;

% Itérations
while abs(ft(k) - ft(k-1)) > 0.01 % verification condition d'arret
    % calcule la nouvelle solution
    xnew = x(k) - ft(k)*(x(k) - x(k-1))/(ft(k) - ft(k-1));
    x = [x xnew];

    k=k+1;
    f(2) = x(k);
    ft(k) = [1 0 0]*inv(A'*G*A)*(A'*G*b + f) - TS1;
end
k, x, ft
plot(x,ft,'-*'), xlabel('\phi [W/m^2]'), ylabel('\theta_1 -T_S_1 [°C]')
```



Solution :

$k =$	1	2	3
$\varphi =$	100	90	57.404
$\theta_1 =$	4.4522	3.4070	-7.1055 × 10 ⁻¹⁵

Note : la solution est donnée dans une itération (les valeurs pour k_1 et k_2 sont les valeurs initiales).