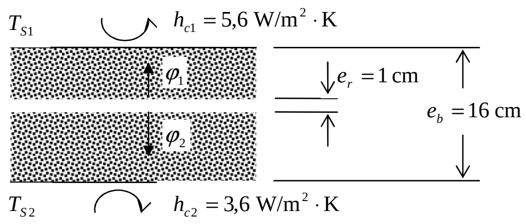
Ex 06 Etude en régime permanant d'un chauffage électrique par plancher

Un système de chauffage électrique par plancher est constitué de câbles électriques chauffants (que l'on pourra assimiler à une plaque de 1 cm d'épaisseur) noyés dans une dalle de béton (épaisseur totale : 16 cm) de conductivité thermique $\lambda = 1{,}2\ \mathrm{W/m \cdot K}$.

$T_A = 18\ °\mathrm{C}$



$T_A = 18\ °\mathrm{C}$

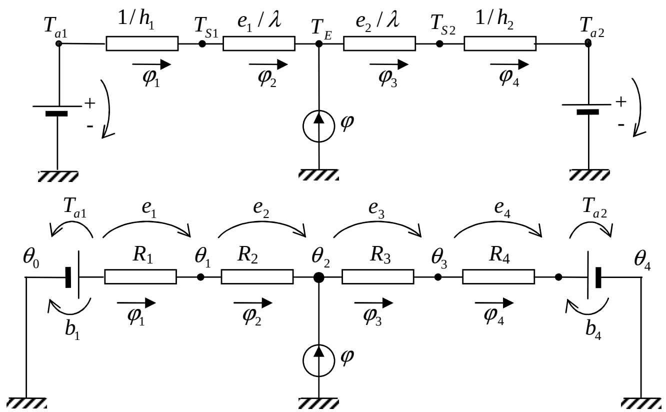
Le flux de chaleur par unité de surface crée par le câble électrique, φ, est de 100 W/m² ; ce flux se partage en un flux ascendant, φ_1 (chauffage par le plancher), et un flux descendant, φ_2 (chauffage par le plafond). Les coefficients d'échange superficiel par convection des surfaces horizontales sont respectivement :

$h_1 = 5{,}6\ \mathrm{W/m^2 \cdot K}$, pour la surface supérieure

$h_2 = 3{,}6\ \mathrm{W/m^2 \cdot K}$, pour la surface inférieure.

La température T_A de l'air de chaque côté du plancher est de 18 °C ; la température de l'élément chauffant est supposée uniforme et égale à T_E .

1. En négligeant les échanges de chaleur par rayonnement et dans le cas où le plan chauffant est situé au centre du plancher, déterminer :
   - la température de l'élément chauffant, T_E ;
   - les températures superficielles, T_{S1} et T_{S2} .
2. Considérant que la température de surface du plancher est trop importante (inconfort thermique), on se propose de déplacer le plan chauffant à une distance x de la surface du plancher pour que la température de surface ne dépasse pas 24°C. Quelle est cette distance x ?
3. La solution obtenue étant aberrante, le local est isolé pour que la puissance dissipée soit inférieure à 100 W/m2. Quelle doit être cette puissance pour que la température de surface soit de 24°C, le plan chauffant étant situé au centre du plancher.



$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{array} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T_{a1} \\ 0 \\ 0 \\ -T_{a2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda/e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [0 \quad \varphi \quad 0]^T$$

Solution numérique (v. cours) :

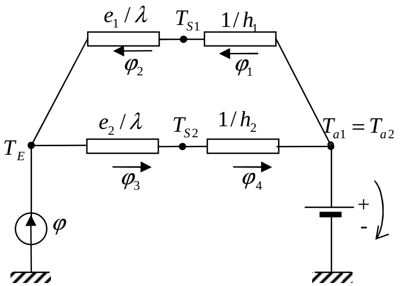
$$\boxed{\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{G}\,\mathbf{b} + \mathbf{f}) = [28.45 \quad 32.11 \quad 29.52]\ °\mathrm{C}}$$

Solution analytique

Système de 3 équations avec 3 inconnues, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$:

$$\begin{cases} \varphi_2 = \dfrac{T_{a1} - T_E}{\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{e_1}{\lambda}} \\ \varphi_3 = \dfrac{T_E - T_{a2}}{\dfrac{e_2}{\lambda} + \dfrac{1}{h_2}} \\ \varphi = -\varphi_2 + \varphi_3 \end{cases}$$

où, on remarque que, parce que $T_{a1} = T_{a2} = T_a$, la forme équivalente du circuit consiste en deux résistances en parallèle, chacune formée par deux résistances en série.



$$\varphi = (T_E - T_a)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \; ; \; R_1 = \frac{1}{h_1} + \frac{e_1}{\lambda_1} \; ; \; R_2 = \frac{1}{h_2} + \frac{e_2}{\lambda_2}$$

$$T_E = T_a + \varphi \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} = 32.11\ °\mathrm{C}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{T_a - T_E}{R_1} = -58.53\ \mathrm{W/m^2} \; ; \; \varphi_3 = \varphi_4 = \frac{T_E - T_a}{R_2} = 41.46\ \mathrm{W/m^2}$$

Noter le signe de φ_1.

$$\varphi_2 = \frac{T_{S1} - T_E}{e_1/\lambda} \; ; \; \boxed{T_{S1} = T_E + \varphi_2 \frac{e_1}{\lambda} = 28.45\ °\mathrm{C}}$$

$$\varphi_3 = \frac{T_E - T_{S2}}{e_2/\lambda} \; ; \; \boxed{T_{S2} = T_E - \varphi_3 \frac{e_2}{\lambda} = 29.52\ °\mathrm{C}}$$

---

2. Problème inverse dimensionnement : épaisseur pour la que température de surface soit $T_{S1} = 24$ °C

Solution numérique

Comme la conductance $G_{2,2} = \lambda / x$, la matrice des conductances $\mathbf{G}$ dépend de l'épaisseur inconnue x. La température dans le nœud 1,

$\theta_1 = [1 \quad 0 \quad 0](\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{G}\,\mathbf{b} + \mathbf{f})$

est en fonction de l'épaisseur inconnue x, $\theta_1(x)$. Pour trouver x, il faut résoudre l'équation : $\theta_1(x) = T_{S1}$ ou $f_\theta(x) \equiv \theta_1(x) - T_{S1} = 0$.

Une solution numérique est la méthode de la sécante.

Algorithme :

1. Initialisation

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{array} \end{array} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T_{a1} \\ 0 \\ 0 \\ -T_{a2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda/e_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [0 \quad \varphi \quad 0]^T$$

On propose deux solutions initiales, où x_2 est une petite variation de l'épaisseur initiale e_1 (par ex. $\Delta e = 0.010\,\mathrm{m}$)

$x_1 = e_1$; $x_2 = e_1 + \Delta e$;
$G_{2,2} = \lambda / x_1$; $f_\theta(x_1) = [1 \quad 0 \quad 0](\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{G}\,\mathbf{b} + \mathbf{f}) - T_{S1}$
$G_{2,2} = \lambda / x_2$; $f_\theta(x_2) = [1 \quad 0 \quad 0](\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{G}\,\mathbf{b} + \mathbf{f}) - T_{S1}$
$k = 2$ le nombre des solutions proposées initialement

2. Calcul itératif de la solution

while $|f_\theta(x_k) - f_\theta(x_{k-1})| > \varepsilon$; critère de convergence (par ex. $\varepsilon = 0.001$ °C)

$x_{k+1} = x_k - f_\theta(x_k)\dfrac{x_k - x_{k-1}}{f_\theta(x_k) - f_\theta(x_{k-1})}$; calcule la nouvelle solution
$k \leftarrow k+1$; incrément k
$G_{2,2} = \lambda / x_k$;
$f_\theta(x_k) = [1 \quad 0 \quad 0](\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{G}\,\mathbf{b} + \mathbf{f}) - T_{S1}$

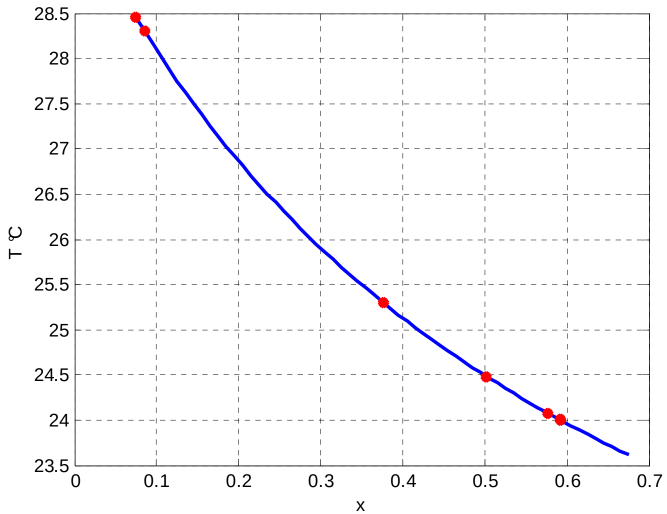
end

$\theta_1 = f_\theta(x_{end}) + T_{S1}$; solution

Les résultats sont (v. figure) :

$k =$	1	2	3	4	5	5	6	7
$x =$	0.0750	0.0850	0.3764	0.5023	0.5766	0.5915	0.5926	0.5927
$\theta_1 =$	28.4522	28.3045	25.2987	24.4818	24.0804	24.0059	24.0001	24.0000

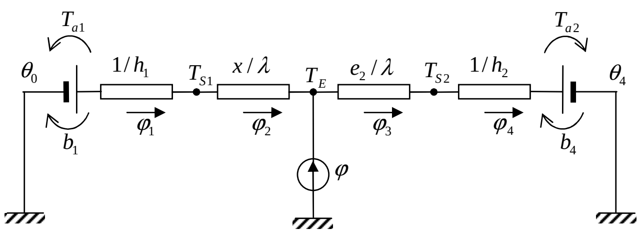
On remarque que, pour une erreur acceptée $\varepsilon = 0.001\,°\mathrm{C}$, l'algorithme converge en 5 itérations.



Solution analytique

On considère que l'épaisseur de la couche inférieure, e_2, reste constante

$$T_{S1} = 24\ °\mathrm{C} \ \Rightarrow\ \varphi_1 = \frac{T_{a1} - T_{S1}}{1/h_1} = -33.6\ \mathrm{W/m^2}\ ;\ \varphi_2 = \varphi_1$$



$$\varphi + \varphi_2 = \frac{T_E - T_{a2}}{\dfrac{e_2}{\lambda} + \dfrac{1}{h_2}} \ \Rightarrow\ T_E = T_{a2} + (\varphi + \varphi_2)\left(\frac{e_2}{\lambda} + \frac{1}{h_2}\right) = 40.59\ °\mathrm{C}$$

$$\varphi_2 = \frac{\lambda}{x}(T_{S1} - T_E);\ \Rightarrow \boxed{x = \frac{T_{S1} - T_E}{\varphi_2/\lambda} = 0.5927\ \mathrm{m}}$$ solution aberrante.

3. Problème inverse de contrôle : calcul flux introduits

$$\varphi_1 = \frac{T_{a1} - T_{S1}}{1/h_1} = -33.6\ \mathrm{W/m^2}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{T_{S1} - T_E}{e_1/\lambda}\ ;\ T_E = T_{S1} - \varphi_2 \frac{e_1}{\lambda} = 26.10\ °\mathrm{C}$$

$$\varphi_3 = \frac{T_E - T_{a2}}{e_2/\lambda + 1/h_2} = 23.80\ \mathrm{W/m^2}$$

$$\boxed{\varphi = -\varphi_2 + \varphi_3 = 57.40\ \mathrm{W/m^2}}$$

La solution numérique est similaire au cas précédent.