TD2 Exo 5 Mur multicouche en régime permanent

On considère une paroi constituée de trois couches homogènes de béton, isolant et enduit. L'enduit protège l'isolant (c. à d. l'enduit est entre l'isolant et l'air).

	Béton (*be*)	Isolant (*i*)	Enduit (*en*)
Epaisseur, e [cm]	15	4	1,5
Conductivité thermique, λ [W/m$\cdot$K]	1,5	0,04	1,5
Chaleur spécifique, c_p [J/kg$\cdot$K]	920	920	920
Masse volumique, ρ [kg/m^3]	2700	75	2700

Les températures de l'air extérieur et intérieur sont, respectivement, $T_e = -5$ °C et $T_i = 20$ °C. Les coefficients d'échange superficiels à l'extérieur et à l'intérieur sont, respectivement, $h_e = 16{,}7$ W/m$^2\cdot$K et $h_i = 9{,}1$ W/m$^2\cdot$K.

1. Isolation à l'intérieure

L'isolant étant vers l'intérieur (c.à d. que les 15 cm de béton sont à l'extérieur du mur),

- donner les différentes résistances thermiques des couches et la résistance totale du mur ;
- dessiner le réseau analogique électrique ;
- calculer la densité de flux traversant le mur, φ ;
- en utilisant la valeur du flux, calculer les températures aux interfaces des matériaux ;
- en utilisant la méthode nodale (matricielle), calculer les températures aux interfaces des matériaux ;
- figurer la répartition des températures dans le mur.

2. Isolation à l'extérieur

Répondre aux mêmes questions que précédemment quand le béton est côté intérieur du mur.

3. Volant thermique

Pour les deux positions de l'isolant, comparer le volant thermique de la paroi (pour 1m²), c'est à dire la quantité de chaleur accumulée dans la paroi.

---

1. Isolation à l'intérieure

On considère les bilans pour une surface $S = 1\ \mathrm{m}^2$.

Les résistances thermiques :

$R_e \equiv R_1 = \frac{1}{h_e S} = \frac{1}{16.7}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}} = 0.06\ \mathrm{K/W}$,   convection à l'extérieure :

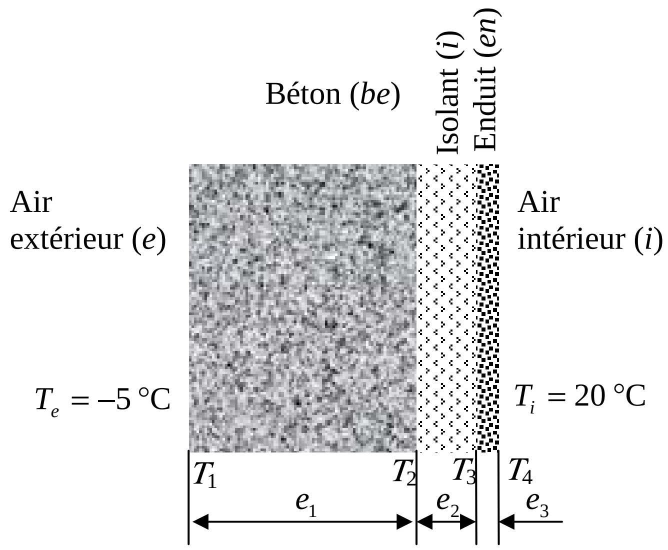
$$R_{be} \equiv R_2 = \frac{e_{be}}{\lambda_{be} S} = \frac{15 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{1.5 \text{ W/mK} \cdot 1 \text{ m}^2} = 0.1 \text{ K/W}, \quad \text{béton ;}$$

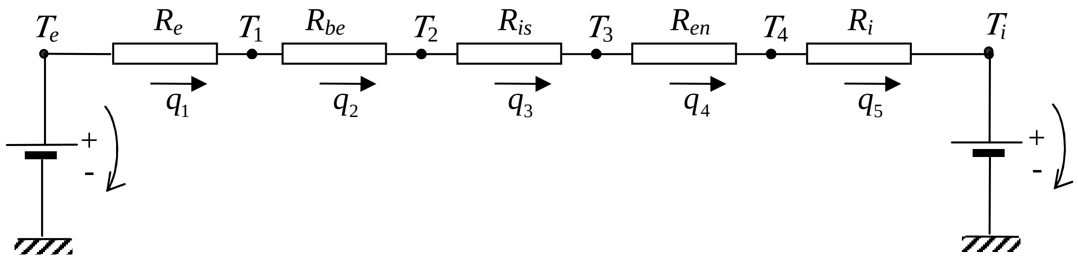
$$R_{is} \equiv R_3 = \frac{e_{is}}{\lambda_{is} S} = \frac{4 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{0.04 \text{ W/mK} \cdot 1 \text{ m}^2} = 1 \text{ K/W}, \quad \text{isolant ;}$$

$$R_{en} \equiv R_4 = \frac{e_{an}}{\lambda_{an} S} = \frac{1.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{1.5 \text{ W/mK} \cdot 1 \text{ m}^2} = 0.01 \text{ K/W}, \quad \text{enduit ;}$$

$$R_i \equiv R_5 = \frac{1}{h_i S} = \frac{1}{9.1} \frac{\text{K}}{\text{W}} = 0.11 \text{ K/W}, \quad \text{convection à l'intérieure.}$$

Notez les ordres de grandeurs de chaque résistance.





Résistance totale :
$R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 1.28$ K/W (pour une surface $S = 1 \text{ m}^2$).

Notez l'ordre de grandeur des résistances convectives par rapport à la résistance totale.

Le flux traversant la paroi par une surface $S = 1 \text{ m}^2$:

$$q = q_1 = \ldots = q_5 = \frac{T_e - T_i}{R_{tot}} = \frac{-5 - 20}{1.279} \text{ W} = -19.53 \text{ W}$$

Note : flux négatif implique que la direction réelle est opposée à celle montrée sur la figure.

Densité de flux traversant la paroi :

$$\varphi = \frac{1}{S}\frac{T_i - T_e}{R_{tot}} = \frac{-5-20}{1.279}\frac{\text{W}}{\text{m}^2} = -19.53\ \text{W/m}^2$$

Distribution des températures :

$T_4 = T_i + R_5 q_5 = 20 - 0.11 \cdot 19.53 = 17.85$ °C

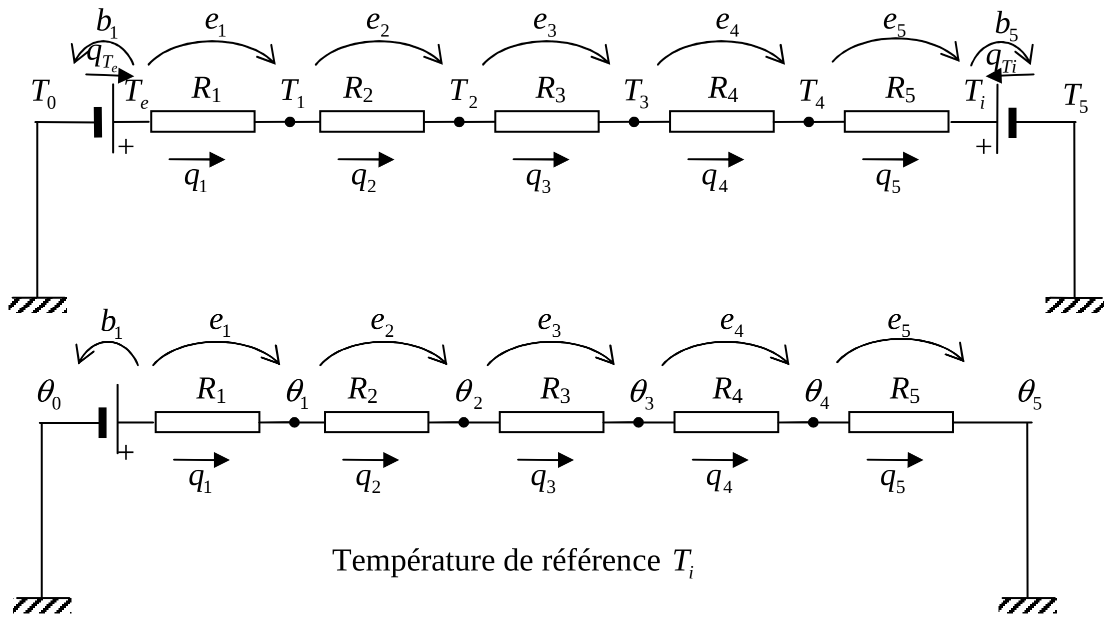
$T_3 = T_4 + R_4 q_4 = T_i + q(R_5 + R_4) = 17.85 + 0.01 \cdot 19.53 = 17.66$ °C

$T_2 = T_3 + R_3 q_3 = T_i + q(R_5 + R_4 + R_3) = 17.66 + 1 \cdot 19.53 = -1.89$ °C

$T_1 = T_2 + R_2 q_2 = T_i + q(R_5 + R_4 + R_3 + R_2) = -1.89 + 0.1 \cdot 19.53 = -3.82$ °C

$T_e = T_1 + R_1 q_1 = T_i + q(R_5 + R_4 + R_3 + R_2 + R_1) = -3.82 + 0.06 \cdot 19.53 = -4.99$ °C ≅ -5 °C

En utilisant la méthode nodale (matricielle)



Température de référence T_i

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{array} ; \mathbf{G} = \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5^{-1} \end{bmatrix}; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -T_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Notez les signes différents de b_1 et b_5).

La solution est :

$$\mathbf{T} = (\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{b} + \mathbf{f}) = [-3.83 \quad -1.87 \quad 17.65 \quad 17.85]\ °\text{C}$$

Si on prend T_i comme température de référence, alors

$$\begin{array}{cccccc} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 \\ \mathbf{b} = & [\,b_1 & 0 & 0 & 0 & 0\,]^T \end{array}$$

et

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{b} + \mathbf{f}) = [-23.83 \quad -21.87 \quad -2.34 \quad -2.14]^T \quad °\mathrm{C}$$

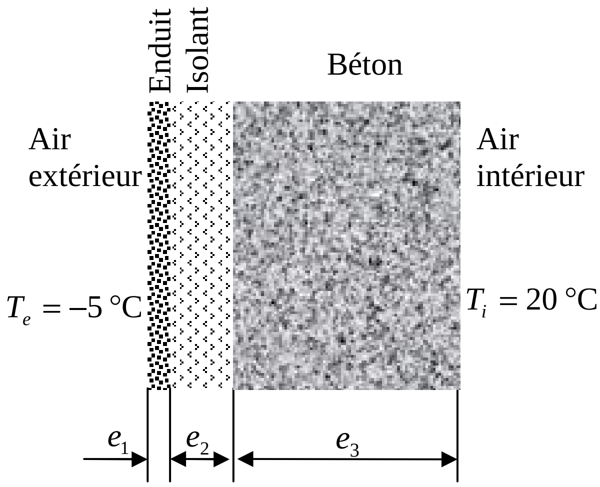
$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\theta} + T_i = \boldsymbol{\theta} + 20\ °\mathrm{C} = [-3.83 \quad -1.87 \quad 17.65 \quad 17.85]^T \quad °\mathrm{C}$$

---

2. Isolation à l'extérieure

On considère les bilans pour une surface $S = 1\ \mathrm{m}^2$.

Les résistances thermiques sont les mêmes, mais l'ordre est différente (v. fig.)



Les résistances thermiques :

$$R_e \equiv R_1 = \frac{1}{h_e S} = \frac{1}{16.7}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}} = 0.06\ \mathrm{K/W}, \qquad \text{convection à l'extérieure ;}$$

$$R_{en} \equiv R_2 = \frac{e_{an}}{\lambda_{an} S} = \frac{1.5 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}{1.5\ \mathrm{W/mK} \cdot 1\ \mathrm{m}^2} = 0.01\ \mathrm{K/W}, \quad \text{enduit ;}$$

$$R_{is} \equiv R_3 = \frac{e_{is}}{\lambda_{is} S} = \frac{4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}{0.04\ \mathrm{W/mK} \cdot 1\ \mathrm{m}^2} = 1\ \mathrm{K/W}, \qquad \text{isolant ;}$$

$$R_{be} \equiv R_4 = \frac{e_{be}}{\lambda_{be} S} = \frac{15 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}}{1.5\ \mathrm{W/mK} \cdot 1\ \mathrm{m}^2} = 0.1\ \mathrm{K/W}, \qquad \text{béton ;}$$

$$R_i \equiv R_5 = \frac{1}{h_i S} = \frac{1}{9.1}\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}} = 0.11\ \mathrm{K/W}, \qquad \text{convection à l'intérieure.}$$

La résistance totale,

$R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 = 1.279\ \mathrm{K/W}$ (pour une surface $S = 1\ \mathrm{m}^2$).

et le flux total pour $S = 1\ \mathrm{m}^2$,

$$q = q_1 = ... = q_5 = \frac{T_e - T_i}{R_{tot}} = \frac{-5 - 20}{1.279}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = -19.53\ \mathrm{W},$$

et la densité de flux,

$$\varphi = \frac{1}{S}\frac{T_i - T_e}{R_{tot}} = \frac{-5-20}{1.279}\frac{\text{W}}{\text{m}^2} = -19.53\ \text{W/m}^2$$

La distribution de la température à l'intérieure :

$$T_1 = T_e - R_1 q_1 = -5 - 0.06 \times (-19.53) = -3.83\ °\text{C}$$
$$T_2 = T_1 - R_2 q_2 = -3.83 - 0.01 \times (-19.53) = -3.63\ °\text{C}$$
$$T_3 = T_2 - R_3 q_3 = -3.63 - 1 \times (-19.53) = 15.90\ °\text{C}$$
$$T_4 = T_3 - R_4 q_4 = 15.90 - 0.1 \times (-19.53) = 17.84\ °\text{C}$$
$$T_i = T_4 - R_5 q_5 = 17.84 - 0.11 \times (-19.53) = 20\ °\text{C}$$

En utilisant la méthode nodale (matricielle)

Dans la matrice $\mathbf{G}$, on change les valeurs des résistances R_2, R_3 et R_4.
On obtient :

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{b} + \mathbf{f}) = [-23.83 \quad -23.63 \quad -4.10 \quad -2.14]^T \quad °\text{C}$$
$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\theta} + T_i = \boldsymbol{\theta} + 20\ °\text{C} = [-3.83 \quad -3.63 \quad 15.90 \quad 17.85]^T \quad °\text{C}$$

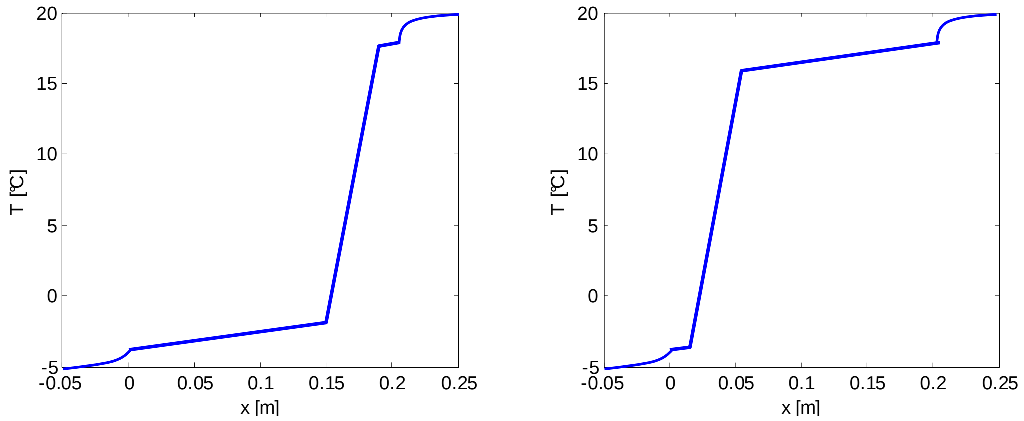


Figure 1 Distribution de la température dans la paroi : *a*) isolation à l'intérieure ; *b*) isolation à l'extérieure.

Notez la chute de température dans chaque couche.

---

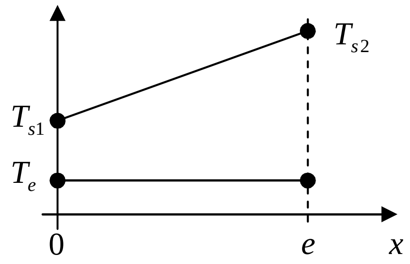
c. Le volant thermique (c. à d. la quantité de chaleur accumulée dans la paroi)

Considérons une température initiale de référence, T_r. Pour une surface $S = 1\ \text{m}^2$, la quantité de chaleur accumulée dans une couche d'épaisseur dx est :

$$dQ = dm\, c(T(x) - T_e) = \rho\, c\, S\, (T(x) - T_e)\, dx$$

Pour matériaux homogènes, sans source internes, la distribution de la température en régime stationnaire dans une paroi plane est :

$$T(x) = \frac{T_{s2} - T_{s1}}{e} x + T_{s1}$$



La quantité de chaleur accumulée dans le matériau est :

$$Q = \int_0^e dQ = \rho c S \int_0^e (T(x) - T_r)dx$$

qui est la surface du trapèze multipliée par $\rho c S$:

$$Q = \rho c S \cdot \frac{1}{2}\left[(T_{s1} - T_r) + (T_{s2} - T_r)\right]e = \rho c S e\left(\frac{T_{s1} + T_{s2}}{2} - T_r\right)$$

ou

$$Q = \int_0^e dQ = \rho c S \int_0^e (T(x) - T_r)dx = \rho c S \int_0^e \left(\frac{T_{s2} - T_{s1}}{e} x + T_{s1} - T_r\right)dx$$

$$= \rho c S\left[\frac{T_{s2} - T_{s1}}{e}\frac{x^2}{2} + (T_{s1} - T_r)x\right]_0^e = \rho c S\left[\frac{T_{s2} - T_{s1}}{2} e + (T_{s1} - T_r)e\right]$$

$$= \rho c S e\left(\frac{T_{s2} + T_{s1}}{2} - T_r\right)$$

Le volant thermique :

$$Q = \sum_{i=2}^{4} \rho_i c_i e_i S\left(\frac{T_{s2i} + T_{s1i}}{2} - T_r\right)$$

Tableau 1 Volant thermique

	Température de référence	
Isolation	T_e	T_i
à l'extérieure	$8.229 \cdot 10^6$ J	$-2.086 \cdot 10^6$ J
à l'intérieure	$1.683 \cdot 10^6$ J	$-8.632 \cdot 10^6$ J
Différence	$6.546 \cdot 10^6$ J	$6.546 \cdot 10^6$ J