Exo 3 Mur en régime permanent avec conductivité variable

Pour de nombreux matériaux soumis à des écarts de température importants, il faut prendre en compte la variation de la conductivité avec la température. Cette variation est donnée généralement par une loi linéaire

$$\lambda = \lambda_0[1+\alpha(T-T_0)]$$

On considère une plaque d'épaisseur e soumise sur ses deux faces à un contact parfait avec deux milieux de températures $T(0)=T_0$ et $T(e)=T_e$.

En supposant que la conductivité du matériau constitutif de la plaque varie linéairement avec la température, déterminer la répartition interne des températures dans quatre points équidistantes à l'intérieure du matériau, ainsi que la valeur du flux de chaleur traversant cette paroi. Utilisez une approche analytique et une approche numérique ; comparez les résultats.

A. N. $e = 5\text{ cm}$, $\lambda_0 = 1\text{ W/m}\cdot\text{K}$, $\alpha = 2\cdot 10^{-3}\text{ K}^{-1}$, $T_0 = 50\text{ °C}$, $T_e = 550\text{ °C}$

L'équation de la chaleur,

$$div(\lambda\ \mathbf{grad}\ T) + p = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

devient :

$$div(\lambda\ \mathbf{grad}\ T) = 0$$

ou

$$\lambda\ \mathbf{grad}\ T = A \text{ (constant)}$$

Dans le cas unidimensionnel :

$$\lambda \frac{dT}{dx} = A \text{ ou } \lambda_0[1+\alpha(T-T_0)]\frac{dT}{dx} = A.$$

En changeant de zéro, $\theta \equiv T - T_0$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{dT}{dx} \text{ et } \lambda_0(1+\alpha\theta)\frac{d\theta}{dx} = A$$

Séparation des variables :

$$\lambda_0 d\theta + \lambda_0\alpha\theta\, d\theta = A\,dx$$

En intégrant :

$$\lambda_0\theta + \lambda_0\alpha\frac{\theta^2}{2} = Ax + B$$

$$\theta + \alpha\frac{\theta^2}{2} = \frac{A}{\lambda_0}x + \frac{B}{\lambda_0} \;;$$

$$\theta + \alpha\frac{\theta^2}{2} = Cx + D$$

En appliquant les conditions aux limites :

$$x = 0 \;;\; T = T_0 \;;\; \theta = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$x = e \;;\; T = T_e \;;\; \theta = T_e - T_0$$

$$(T_e - T_0) + \alpha\frac{(T_e-T_0)^2}{2} = Ce$$

$$C = \frac{1}{e}(T_e-T_0)\left[1+\frac{\alpha}{2}(T_e-T_0)\right]$$

Densité de flux :

$$\boxed{\varphi = -\lambda\ \mathbf{grad}\ T = -A = -\lambda_0 C}$$

A.N. : $C = 15000\text{ K/m}$

$\varphi = -15000\text{ W/m}^2$

Distribution de la température :

$$\boxed{\theta + \alpha\frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{e}(T_e-T_0)\left[1+\frac{\alpha}{2}(T_e-T_0)\right]x}$$

$$\theta + \alpha\frac{\theta^2}{2} = Cx$$

$$\theta^2 + \frac{2}{\alpha}\theta - \frac{2}{\alpha}Cx = 0$$

Deux solutions :

$$\theta_{1;2} = -\frac{1}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{2}{\alpha}Cx}$$

La solution

$\theta = -\frac{1}{\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{2}{\alpha}Cx}$ implique que

$$\theta < 0 \;\Rightarrow\; T - T_0 < 0 \;\Rightarrow\; T < T_0$$

or, comme il n'y a pas des sources internes, de point de vue physique $T_0 \le T \le T_e$.

La solution avec du sens physique est :

$$\theta = -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{2}{\alpha}Cx}$$

$$\boxed{T = \theta + T_0 = -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{2}{\alpha}Cx} + T_0}$$

En utilisant ce résultat, on obtient la distribution de la température dans la plaque, $T(x)$. Les résultats pour $\mathbf{x} = [0.00 \quad 0.01 \quad 0.02 \quad 0.03 \quad 0.04 \quad 0.05]^T$

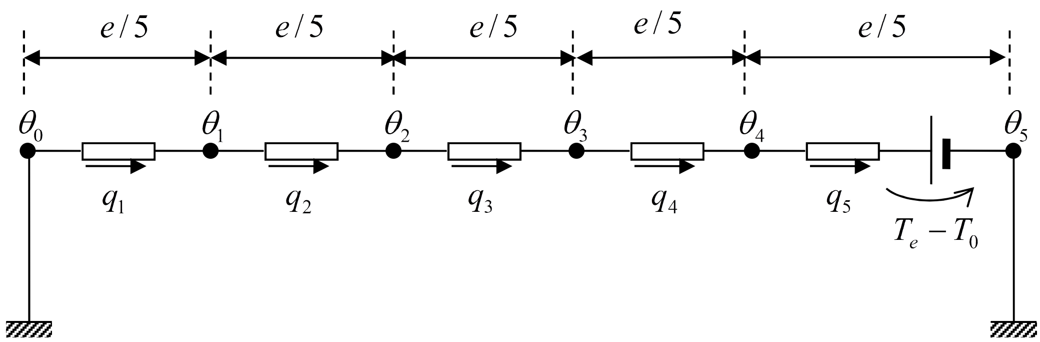
sont donnés dans le tableau suivant.

x [m]	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
θ [°C]	0	132.45	241.62	336.66	421.95	500.00
T [°C]	50.00	182.45	291.62	386.66	471.95	550.00

Méthode nodale

On considère T_0 comme température de référence. On discrétise dans un nombre de couches (par exemple en 5 couches).

Le modèle est non-linéaire. Une solution numérique peut être trouvée par des itérations successives.



$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{array} & \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \mathbf{G} = \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(T_e - T_0) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}]^{\mathrm{T}}$$

Attention au signe de la source de température (convention sources).

Résistances :

$$R_1^{-1} = \frac{\lambda}{e/5}(1 + \alpha\bar{\theta}_1) = \frac{\lambda}{e/5}\left(1 + \alpha\frac{\theta_0 + \theta_1}{2}\right)$$

$$R_2^{-1} = \frac{\lambda}{e/5}(1 + \alpha\bar{\theta}_2) = \frac{\lambda}{e/5}\left(1 + \alpha\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$$

$$R_1^{-1} = \frac{\lambda}{e/5}(1 + \alpha\bar{\theta}_3) = \frac{\lambda}{e/5}\left(1 + \alpha\frac{\theta_2 + \theta_3}{2}\right)$$

$$R_1^{-1} = \frac{\lambda}{e/5}(1 + \alpha\bar{\theta}_4) = \frac{\lambda}{e/5}\left(1 + \alpha\frac{\theta_3 + \theta_4}{2}\right)$$

$$R_1^{-1} = \frac{\lambda}{e/5}(1 + \alpha\bar{\theta}_5) = \frac{\lambda}{e/5}\left(1 + \alpha\frac{\theta_4 + \theta_5}{2}\right)$$

$$\mathbf{G} = \frac{\lambda_0}{e/5}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. +\alpha\begin{bmatrix}\theta_1/2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (\theta_1+\theta_2)/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (\theta_2+\theta_3)/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (\theta_3+\theta_4)/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\theta_4+(T_e-T_0))/2\end{bmatrix}\right)$$

Si on note :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix}\theta_1/2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (\theta_1+\theta_2)/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & (\theta_2+\theta_3)/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (\theta_3+\theta_4)/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\theta, +(T_e-T_0))/2\end{bmatrix}$$

alors :

$$\mathbf{G} = \frac{\lambda_0}{e/5}(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{\Theta})$$

Le calcul itératif :

- Supposer une distribution initiale de la température, par exemple : $\boldsymbol{\theta}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ ou $\boldsymbol{\theta}_0 = [100 \quad 200 \quad 300 \quad 400]^T$
- **Répéter**
  - Calculer la matrice $\mathbf{G} = \frac{\lambda_0}{e/5}(\mathbf{I} + \alpha\mathbf{\Theta})$ en fonction de $\boldsymbol{\theta}$;
  - Estimer les températures $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{b} + \mathbf{f})$;
- **jusqu'à quand** les températures estimées ne diffèrent pas significativement des valeurs antérieures.

Résultats

Distribution initiale des températures : $\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

		x [m]	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
		θ [°C]	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
Itération 0	$\boldsymbol{\theta}_0$ [°C]		0	0	0	0	0	500
Itération 1	$\boldsymbol{\theta}_1$ [°C]		0	107.14	214.28	321.42	428.57	500
Itération 2	$\boldsymbol{\theta}_2$ [°C]		0	132.78	244.04	339.75	423.77	500
Itération 3	$\boldsymbol{\theta}_3$ [°C]		0	132.44	241.60	336.63	421.94	500
Solution analytique	θ [°C]		0	132.45	241.62	336.66	421.95	500
Flux traversant $\mathbf{q} = \mathbf{G}(-\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b})$	[W/m²]		-15000	-15000	-15000	-15000	-15000	

Calcul flux :
Pour $R_5^{-1} = 192.19$ W/K m² ,
On obtient : $q_5 = R_5^{-1}(\theta_4 - \theta_5) = 192.19 \cdot (421.94 - 500) = -15000$ W/m² ;

Distribution initiale des températures : $\boldsymbol{\theta}_0 = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 300 & 400 \end{bmatrix}^T$

		x [m]	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
		θ [°C]	θ_0	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5
Itération 0	$\boldsymbol{\theta}_0$ [°C]		0	100	200	300	400	500
Itération 1	$\boldsymbol{\theta}_1$ [°C]		0	131.38	242.56	338.91	423.93	500
Itération 2	$\boldsymbol{\theta}_2$ [°C]		0	132.67	241.92	336.83	421.98	500
Itération 3	$\boldsymbol{\theta}_3$ [°C]		0	132.45	241.62	336.64	421.94	500
Solution analytique	θ [°C]		0	132.45	241.62	336.66	421.95	500
Flux traversant $\mathbf{q} = \mathbf{G}(-\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b})$	[W/m²]		-15000	-15000	-15000	-15000	-15000	

- Supposer une distribution initiale de la température, par exemple : $\boldsymbol{\theta}_0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ ou $\boldsymbol{\theta}_0 = [100 \quad 200 \quad 300 \quad 400]^T$
- **Répéter**
  - Calculer la matrice $\mathbf{G} = \frac{\lambda_0}{e/5}(\mathbf{I} + \alpha\boldsymbol{\Theta})$ en fonction de $\boldsymbol{\theta}_0$;
  - Estimer les températures $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{b} + \mathbf{f})$;
- **jusqu'à quand** les températures estimées ne diffèrent pas significativement des valeurs antérieures.

Implémentation MATLAB / OCTAVE à exécuter sur :
http://lavica.fesb.hr/octave/octave-on-line_en.php

```
clear all, clc
T0 = 50; Te = 550;
alpha = 2e-3; lambda0 = 1;
e = 0.05;

A = [1 0 0 0; -1 1 0 0; 0 -1 1 0; 0 0 -1 1; 0 0 0 -1]; %A = -diff(eye(4+1,5))'
b = [0 0 0 0 -(Te -T0)]';
f = [0 0 0 0]';

%valeurs initiale pour la distribution des temperatures
theta0 = ((Te - T0)/5)*[1 2 3 4]' % ou theta0 = [0 0 0 0]'

repeat = true; eps = 0.1; %erreure admise
while repeat
    %calculer G = f(theta0)
    THETA = [theta0(1)/2 0 0 0 0; ...
            0 (theta0(1)+theta0(2))/2 0 0 0;...
            0 0 (theta0(2)+theta0(3))/2 0 0;...
            0 0 0 (theta0(3)+theta0(4))/2 0;...
            0 0 0 0 (theta0(4) + (Te - T0))/2];

    G = lambda0/(e/5)*(eye(5) + alpha*THETA);

    %estimer la temperature
    theta = inv((A'*G*A))*(A'*G*b + f)

    %verifier que la plus grande diff. de temp' < erreur admise
    repeat = max(abs(theta0 - theta))>eps

    theta0 = theta;
end

q = G*(-A*theta + b)
```