Exo 2 Mur en régime permanant avec création interne de chaleur

On considère une vitre d'épaisseur e et de conductivité thermique constante λ_v séparant deux milieux à température parfaitement régulée $T(0) = T_0$ à l'extérieure et $T(e) = T_e$ à l'intérieure. Cette vitre, supposée infinie dans les deux autres directions, reçoit un ensoleillement E dont elle absorbe uniformément une partie en fonction de son coefficient d'absorption α. On considère le régime permanant.

1. Déterminer l'expression analytique de la répartition de la température dans la vitre.
2. Donner l'expression de la densité de flux de chaleur traversant la vitre et vérifier que la somme algébrique des flux sortants par les deux faces est égale au flux absorbé.
3. En utilisant cette expression, calculer la valeur maximale atteinte par la température dans la vitre et sa position géométrique.
4. Pour le cas où $T_0 = 20\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$, traiter les mêmes problèmes dans une approche numérique en discrétisant la vitre en 1, 3 et 5 couches. Donner le schéma du circuit thermique et les valeurs des températures dans les nœuds. Comparer ces valeurs avec les valeurs obtenues analytiquement. Trouver les flux thermiques traversant la surface de la vitre et vérifier que la somme des flux sortants par les deux faces est égale au flux absorbé. Comparer les valeurs des flux sortants obtenues numériquement et analytiquement.
5. Le même problème pour le cas où $T_0 = 10\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$, traité pour une discrétisation en 5 couches.

A. N. $E = 800\ \mathrm{W/m^2}$, $\alpha = 0.5$, $e = 0.5\ \mathrm{cm}$, $\lambda_v = 1\ \mathrm{W/m \cdot K}$

Cas a) $T_0 = 20\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$ b) $T_0 = 10\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$

1. Expression analytique de la répartition de température

L'énergie absorbée se transforme en chaleur dans la vitre ; on la considère une source interne de chaleur, $p\ [\mathrm{W/m^3}]$. Pour une surface $S = 1\ \mathrm{m^2}$,

$\alpha E S = \int_0^e p S\, dx$, ou $\alpha E = \int_0^e p\, dx$, ou, comme $p(x) = \text{ct.}$, $\alpha E = p e$.

D'où :

$$p = \frac{\alpha E}{e}\ [\mathrm{W/m^3}]$$

L'équation de Poisson (régime stationnaire avec sources internes, conductivité homogène) :

$\lambda\, div(\mathbf{grad} T) + p = 0$

Pour une dimension,

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} + p = 0 \text{ ou } \lambda \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\alpha E}{e} = 0 \text{ ou } \frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\alpha E}{\lambda e}$$

En intégrant :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\alpha E}{\lambda e} x + c_1 \text{ et } T = -\frac{\alpha E}{2\lambda e} x^2 + c_1 x + c_2$$

On détermine les constants c_1 et c_2 en utilisant les conditions aux limites :

$$T\big|_{x=0} = T_0 \Rightarrow c_2 = T_0$$

$$T\big|_{x=e} = T_e \Rightarrow T_e = -\frac{\alpha E}{2\lambda e} e^2 + c_1 e + T_0$$

$$c_1 = \frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}$$

L'équation de la distribution de température :

$$\boxed{T(x) = -\frac{\alpha E}{2\lambda e} x^2 + \left(\frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}\right) x + T_0}$$

2. La densité de flux traversant la paroi et bilan des flux

$$\boxed{\varphi(x) = -\lambda\, \mathbf{grad} T = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda\left(-\frac{\alpha E}{\lambda e} x + c_1\right) = \frac{\alpha E}{e} x - \left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right)}$$

Flux sortant :

Cas a) $T_0 = 20$ °C , $T_e = 20$ °C

$$\varphi(0) = -\left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right) = -\frac{\alpha E}{2} = -200 \text{ W/m}^2$$, le flux sort (direction opposée à *x*)

$$\varphi(e) = \frac{\alpha E}{e} e - \left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right) = \frac{\alpha E}{2} = 200 \text{ W/m}^2$$, le flux sort (dans la direction *x*)

$$-\varphi(0) + \varphi(e) = \alpha E = 400 \text{ W/m}^2$$

Cas b) $T_0 = 10\ °\text{C}$, $T_e = 20\ °\text{C}$

$$\varphi(0) = -\left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right) = -2200\ \text{W/m}^2$$

$$\varphi(e) = \frac{\alpha E}{e}e - \left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right) = -1800\ \text{W/m}^2$$

$$-\varphi(0) + \varphi(e) = \alpha E = 400\ \text{W/m}^2$$

3. La valeur maximale de la température interne et sa position géométrique

$\dfrac{dT}{dx} = -\dfrac{\alpha\, E}{\lambda\, e}x + c_1$, donc $\dfrac{dT}{dx} = -\dfrac{\alpha E}{e\lambda}x + \left(\dfrac{T_e - T_0}{e} + \dfrac{\alpha E}{2\lambda}\right)$

ou

$\varphi(x) = -\lambda\, \textbf{grad}T = 0$, $-\lambda\dfrac{dT}{dx} = \dfrac{\alpha E}{e}x - \left(\dfrac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \dfrac{\alpha E}{2}\right)$,

donc $\dfrac{dT}{dx} = -\dfrac{\alpha E}{e\lambda}x + \left(\dfrac{T_e - T_0}{e} + \dfrac{\alpha E}{2\lambda}\right)$

Position du maximum : trouver x où $\dfrac{dT}{dx} = 0$

$$-\frac{\alpha E}{e\lambda}x + \left(\frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}\right) = 0$$

$$\boxed{x = \lambda\frac{T_e - T_0}{\alpha E} + \frac{e}{2}}$$

Cas a) $T_0 = 20\ °\text{C}$, $T_e = 20\ °\text{C}$ ➔ $\boxed{x = e/2 = 0{,}25\ \text{cm}}$

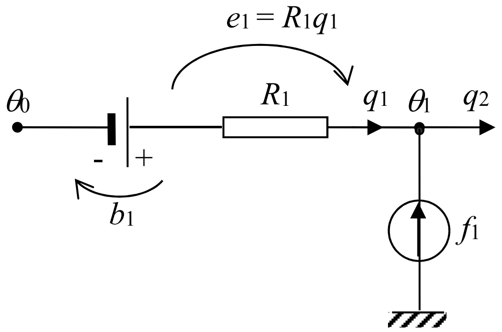
$$\boxed{T\big|_{x=e/2} = -\frac{\alpha E}{2\lambda e}x^2 + \left(\frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}\right)x + T_0 = 0{,}25 + 20 = 20{,}25\ °\text{C}}$$

Cas b) $T_0 = 10\ °\text{C}$, $T_e = 20\ °\text{C}$ ➔ $x = 0{,}0275\ \text{m} = 2{,}75\ \text{cm}$ c. à d. à l'extérieure de la vitre, donc un résultat qui n'est pas physique.

➔ la valeur maximale est à l'extrémité de la paroi : $\boxed{x = e = 0{,}5\ \text{cm}}$ où la température est $\boxed{\text{imposée à } T_e = 20\ °\text{C}}$

4. Traiter les mêmes problèmes dans une approche numérique en discrétisant en 1, 3 et 5 couches. Donner le schéma du circuit thermique et les valeurs des températures dans les nœuds. Comparer ces valeurs avec les valeurs obtenues analytiquement.

Circuit thermique pour une maille dans le cas de la conduction en régime stationnaire avec sources internes (voir cours l'analogie électrique pour un tube de courant avec sources internes).



$$f_1 = \int_{s_0}^{s_1} pS\,ds \;\; ; \;\; b_1 = -r(s_1)\int_{s_0}^{s_1} pS\,ds + \int_{s_0}^{s_1} pSr\,ds \;\; ; \;\; R_1 = \frac{s_1 - s_0}{\lambda S}$$

Pour le cas unidimensionnel, on considère la surface S constante, $S = 1\ \text{m}^2$

$$dr = \frac{ds}{\lambda S} \text{ et } r = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\lambda S} = \frac{1}{\lambda S}\int_{s_0}^{s_1} ds = \frac{s_1 - s_0}{\lambda S} = \frac{e}{\lambda S}$$

donc : $b_1 = -r(s_1)\int_{s_0}^{s_1} pS\,ds + \int_{s_0}^{s_1} pSr\,ds = -rpS\int_{s_0}^{s_1} ds + rpS\int_{s_0}^{s_1} ds = 0$

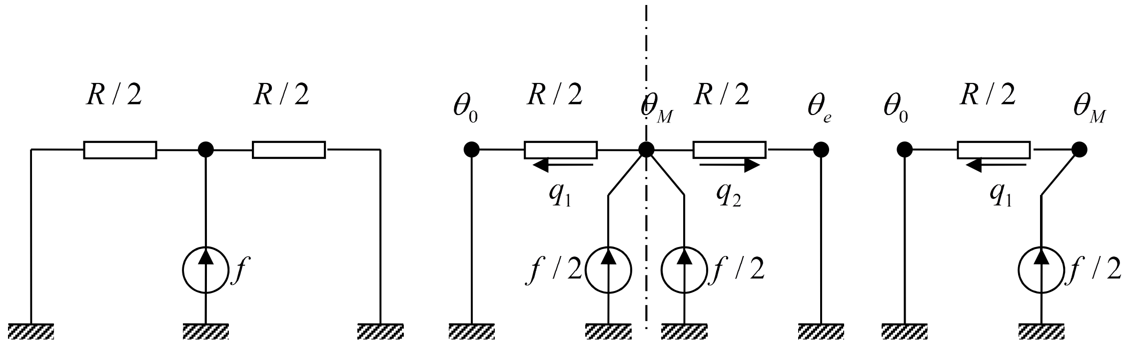
$$p = \frac{\alpha E}{e}\ [\text{W/m}^3]$$

donc : $f_1 = \int_{s_0}^{s_1} pS\,ds = pS(s_1 - s_0) = \alpha ES\,\dfrac{s_1 - s_0}{e}$

a. Discrétisation dans une couche, cas a) $T_0 = 20\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$.

On considère $T_0 = 20\ °\mathrm{C}$ la température de référence.

La résistance pour l'unité de surface, $S = 1\ \mathrm{m}^2$, est $R = \dfrac{e}{\lambda S} = 0.005\ \mathrm{K/W}$.



Note : les sources de flux s'additionnent dans un nœud.

Température à l'intérieure

$$T_M - T_0 \equiv \theta_M = \frac{R}{2} q_1 = \frac{R}{2}\frac{\alpha E S}{2} = \frac{e}{2\lambda S}\frac{\alpha E S}{2} = \frac{\alpha E e}{4\lambda} = 0{,}5\ °\mathrm{C}$$

$T_M = \theta_M + T_0 = 20{,}5\ °\mathrm{C}$; solution numérique

Solution analytique :

$$T\big|_{x=e/2} = -\frac{\alpha E}{2\lambda e} x^2 + \left(\frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}\right) x + T_0 = 0{,}25 + 20 = 20{,}25\ °\mathrm{C}$$

Flux thermiques absorbé par la vitre

$$f = \alpha E S \frac{s_1 - s_0}{e}\bigg|_{\substack{s_1 = e \\ s_0 = 0}} = \alpha E S$$

$$q_1 = \frac{1}{R/2}(\theta_M - \theta_0),\ q_2 = \frac{1}{R/2}(\theta_M - \theta_e),\ \theta_0 = \theta_e = 0,\ \Rightarrow\ q_1 = q_2$$

bilan des flux dans le nœud θ_M : $f = q_1 + q_2 \ \Rightarrow\ \boxed{q_1 = q_2 = f/2 = \dfrac{\alpha E}{2} = 200\ \mathrm{W}}$

$$q_1 = \varphi_1 S\ ;\ q_2 = \varphi_2 S \ \Rightarrow\ \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\alpha E}{2} = 200\ \mathrm{W/m^2}$$

Vérification que la somme des flux est égale au flux absorbé :

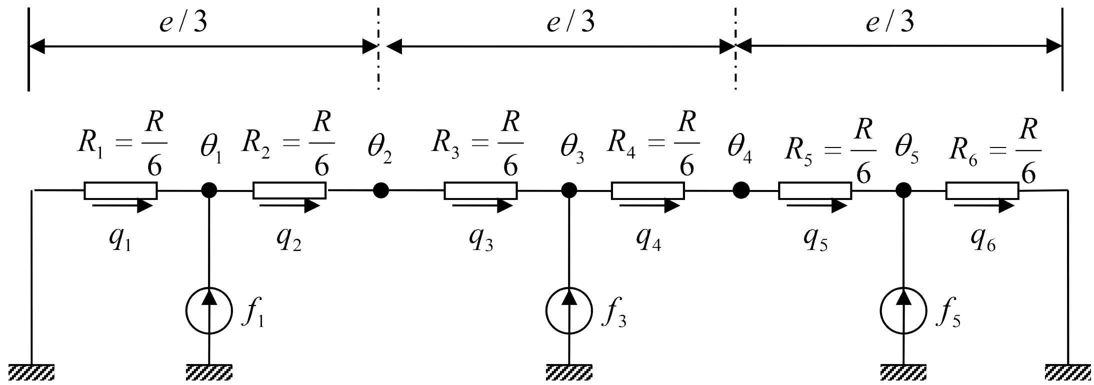
$\boxed{q_1 + q_2 = f}$

b. Discrétisation en trois couches, cas a) $T_0 = 20\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$.

Pour $S = 1\ \mathrm{m}^2$, la résistance thermique de la vitre est $R = \dfrac{e}{\lambda S} = 0.005\ \mathrm{K/W}$

Les couches ont les mêmes épaisseurs, donc leurs résistances sont égales à $R/3$.

Chaque couche à deux résistance qui correspondent à la résistance de la moitié de la couche, $R/6$. Les sources ont les valeurs $f_1 = f_3 = f_5 = \dfrac{1}{3}\alpha E S$.



Le circuit est décrit par :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{array} \end{array} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6^{-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [\ f_1 \quad 0 \quad f_3 \quad 0 \quad f_5]^T$$

Note : il n'y a pas des sources de température, donc $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

La matrice des conductances peut être écrite comme :

$$\mathbf{G} = \frac{6}{R} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{R/6} \mathbf{I}_{6\times 6};$$

Le vecteur des sources des flux, $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\alpha E S & 0 & \frac{1}{3}\alpha E S & 0 & \frac{1}{3}\alpha E S \end{bmatrix}^T$, peut être écrit comme :

$$\mathbf{f} = \frac{1}{3}\alpha E S \cdot [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T = \frac{1}{3} 0.5 \times 800 \times 1 \times [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T \text{ W, pour } S = 1 \text{ m}^2$$

Les différences de températures pour chaque résistance sont :

$$\mathbf{e} - \mathbf{b} = -\mathbf{A\theta}$$

Les flux dans les résistances sont :

$$\mathbf{q} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}$$

Le bilan de flux pour chaque nœud :

$$\mathbf{f} = -\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{q}$$

D'où :

$$\mathbf{f} = -\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{q} = -\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot (-\mathbf{A\theta} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot (\mathbf{A\theta} - \mathbf{b})$$

Le système des équations devient :

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{\theta} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{f}$$

avec la solution

$$\mathbf{\theta} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f}).$$

La matrice laplacien est : $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

On obtient la solution numérique :

$$\mathbf{\theta}_3 = (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{f} = (6/R)(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{f} = [0{,}167 \quad 0{,}222 \quad 0{,}278 \quad 0{,}222 \quad 0{,}167]^T$$

dans les points de coordonnées : $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{e}{6} & 2\frac{e}{6} & 3\frac{e}{6} & 4\frac{e}{6} & 5\frac{e}{6} \end{bmatrix}^T = \frac{e}{6} \cdot [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5]^T$.

Note : L'avantage d'utiliser cette forme de la discrétisation est que la matrice $(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1}$ devient $(6/R)(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ (où $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ est la matrice laplacien).

La solution analytique dans ces points (la distribution des températures en considérant la référence à 20 °C) est :

$$\boldsymbol{\theta}_{a3} = [0{,}139 \quad 0{,}222 \quad 0{,}250 \quad 0{,}222 \quad 0{,}139]^T$$

Le erreurs relatives, $\varepsilon = \dfrac{\theta_{numérique} - \theta_{analytique}}{\theta_{analytique}}$, sont : $\boldsymbol{\varepsilon} = [0.16 \quad 0 \quad 0.10 \quad 0 \quad 0.16]^T$

Les flux qui sortent :

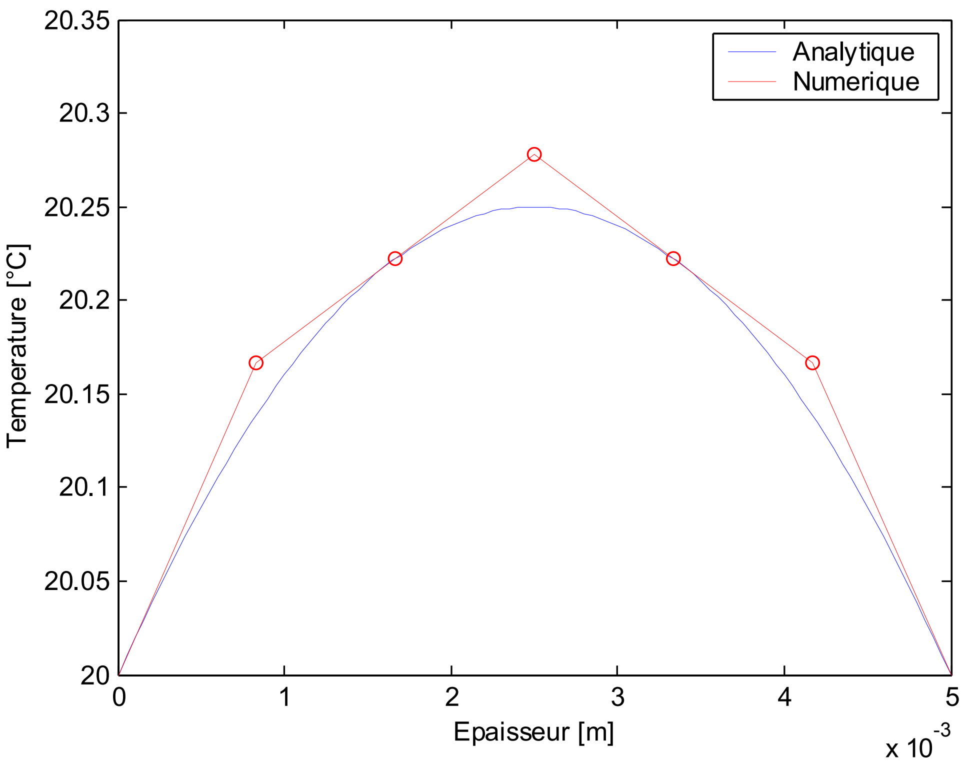
$$q_1 = \frac{1}{R/6}(\theta_0 - \theta_1) = \frac{-\theta_1}{R/6} = \frac{-\theta_1}{\frac{1}{6}\frac{e}{\lambda S}} = -200{,}4 \text{ W} \text{ pour } S = 1 \text{ m}^2 \text{, soit } \varphi_1 = -200{,}4 \text{ W/m}^2$$

$$q_6 = \frac{1}{R/6}(\theta_5 - \theta_6) = \frac{\theta_5}{R/6} = \frac{\theta_5}{\frac{1}{6}\frac{e}{\lambda S}} = -200{,}4 \text{ W} \text{ pour } S = 1 \text{ m}^2 \text{, soit } \varphi_6 = 200{,}4 \text{ W/m}^2$$

$$-\varphi_1 + \varphi_2 = 400{,}4 \text{ W/m}^2$$

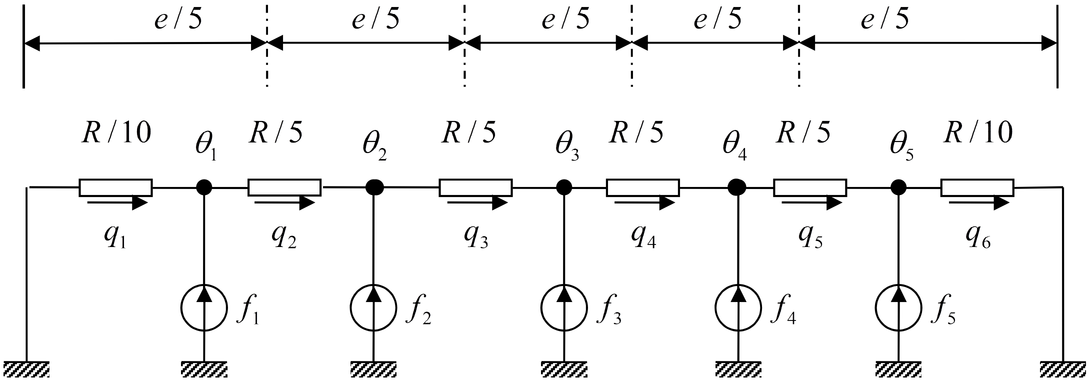
Erreur relative : $\dfrac{(-\varphi_1 + \varphi_2) - \alpha E}{\alpha E} = \dfrac{400{,}4 - 400}{400} = 0.001 \cong 0$

```
clear all, clc
alpha = 0.5; e = 5e-3; lambda = 1; E = 800;
T0 = 20; Te = 20;

% solution analytique
x = [0:e/100:e];
T = -(alpha*E)/(2*e*lambda)*x.^2 + ((Te - T0)/e + alpha*E/(2*lambda))*x + T0;
plot(x,T,'-'), hold on

% solution numerique
x = [0:e/6:e]'; % discretisation spatiale
R = 1/6*e/lambda;
G = 1/R*eye(6,6);
f = alpha*E/3*[1 0 1 0 1]';
A = [1 0 0 0 0; -1 1 0 0 0; 0 -1 1 0 0; 0 0 -1 1 0; 0 0 0 -1 1; 0 0 0 0 -1];
% A = -diff(eye(5+1,6))'; % A' = -div et A = grad ;
theta3 = inv(A'*G*A)*f; % -A'*A*theta = div(grad(theta))

% comparaison solution analytique et numérique
% graphique
plot(x, [T0 ; theta3 + Te ; Te],'-r'), plot(x(2:end-1), theta3 + Te,'or')
xlabel('Epaisseur [m]'), ylabel('Temperature [°C]')
legend('Analytique','Numerique')

% tableau resultats :
T = -(alpha*E)/(2*e*lambda)*x.^2 + ((Te - T0)/e + alpha*E/(2*lambda))*x + T0;
['Analytique   Numérique   Erreur']
[theta3 (T(2:end-1)-20) (theta3 - (T(2:end-1)-20))./theta3]
```



Analytique	Numérique	Erreur = (Analytique - Numérique)/Analytique
1.6667e-001	1.3889e-001	1.6667e-001
2.2222e-001	2.2222e-001	3.4972e-015
2.7778e-001	2.5000e-001	1.0000e-001
2.2222e-001	2.2222e-001	3.4972e-015
1.6667e-001	1.3889e-001	1.6667e-001

c. Discrétisation en cinq couches, cas a) $T_0 = 20\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$.



Le circuit est décrit par :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{array} ; \quad \mathbf{G} = \frac{5}{R}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [\, f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5]^T$$

où :

$$R = \frac{e}{\lambda S} \quad \text{et} \quad \mathbf{f} = \frac{1}{5}\alpha E[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

La solution numérique :

$$\boldsymbol{\theta}_5 = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{f} = [0{,}10 \quad 0{,}22 \quad 0{,}26 \quad 0{,}22 \quad 0{,}10]^T$$

dans les points de coordonnées :

$$\mathbf{x} = \frac{e}{10}[1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9]^T.$$

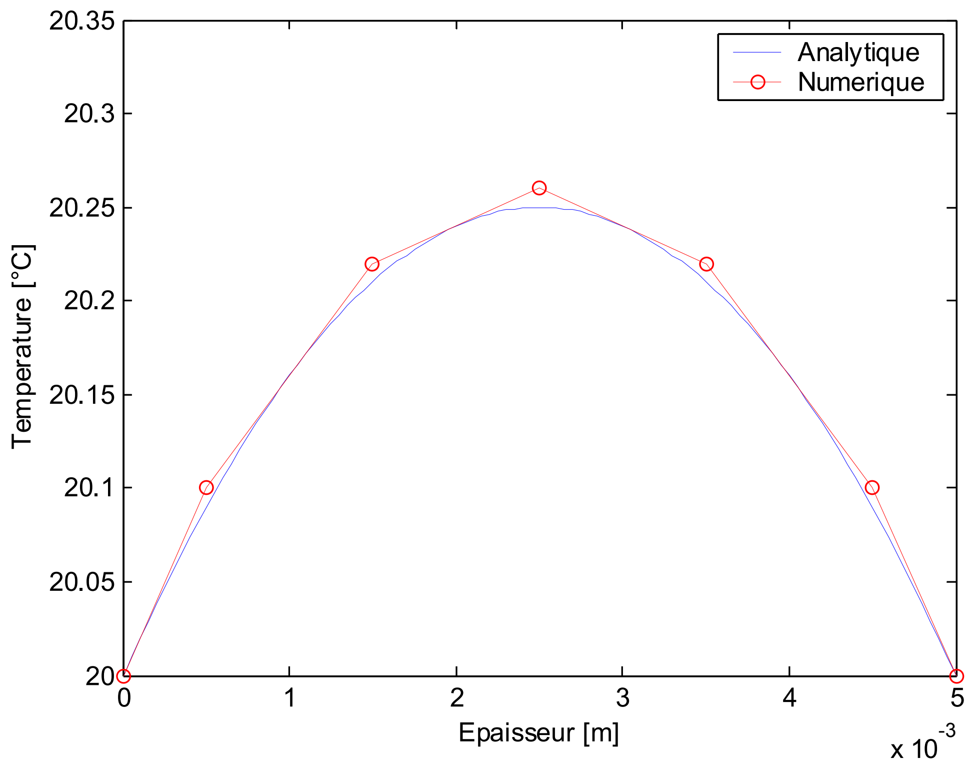
La solution analytique dans ces points :

$$\boldsymbol{\theta}_{a5} = [0{,}09 \quad 0{,}21 \quad 0{,}25 \quad 0{,}21 \quad 0{,}09]^T$$

Les erreurs relatives, $\varepsilon = (\theta_{numérique} - \theta_{analytique}) / \theta_{analytique}$:

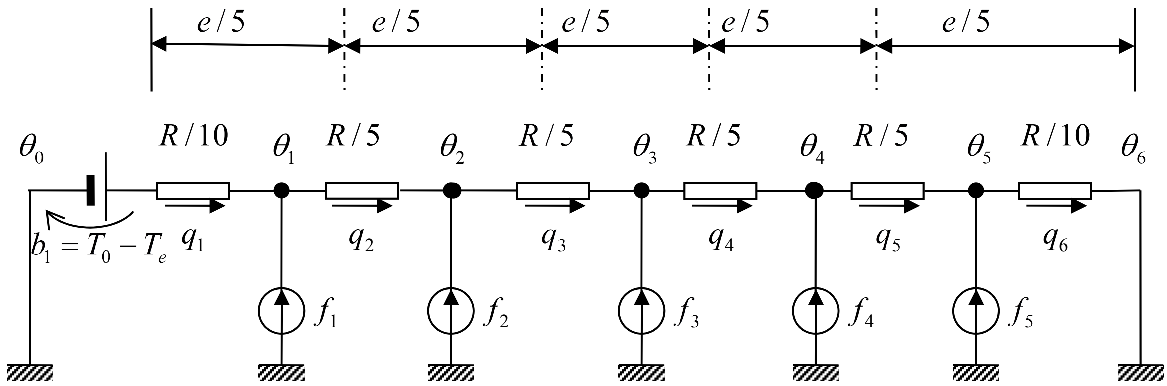
$$\boldsymbol{\varepsilon} = [0.11 \quad 0.05 \quad 0.04 \quad 0.05 \quad 0.11]^T$$

```
clear all, clc
alpha = 0.5; e = 5e-3; lambda = 1; E = 800;
T0 = 20; Te = 20;

% solution analytique
x = [0:e/100:e];
T = -(alpha*E)/(2*e*lambda)*x.^2 + ((Te - T0)/e + alpha*E/(2*lambda))*x + T0;
plot(x,T,'-'), hold on

% solution numerique
x = [0:e/10:e]';
A = [1 0 0 0 0; -1 1 0 0 0; 0 -1 1 0 0; 0 0 -1 1 0; 0 0 0 -1 1; 0 0 0 0 -1];
R1 = e/5/2/(lambda);
R2 = 2*R1;
f = alpha*E/5*[1 1 1 1 1]';
C = [1/R1 0 0 0 0 0; 0 1/R2 0 0 0 0; 0 0 1/R2 0 0 0; 0 0 0 1/R2 0 0; 0 0 0 0 1/R2 0;
0 0 0 0 0 1/R1];
theta10 = inv((A'*C*A))*f;

% comparaison solution analytique et numérique
% graphique
xa = x([2 4 6 8 10]);
plot([x(1); xa; x(end)],[T0; theta10 + Te; Te],'o-r')% numerique
xlabel('Epaisseur [m]'), ylabel('Temperature [°C]')
legend('Analytique','Numerique')

% tableau resultats :
T = -(alpha*E)/(2*e*lambda)*xa.^2 + ((Te - T0)/e + alpha*E/(2*lambda))*xa + T0;
disp(['Analytique   Numérique   Erreur'])
disp([theta10  T-20  (theta10 - (T-20))./theta10])
```



d. Discrétisation en cinq couches, cas b) $T_0 = 10\ °\text{C}$, $T_e = 20\ °\text{C}$.

Température de référence : $T_e = 20\ °\text{C}$; il en résulte $b_1 = T_0 - T_e = -10\ °\text{C}$.



Le circuit est décrit par :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{array} \; ; \; \mathbf{G} = \frac{5}{R} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [\, f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5]^T$$

où :

$b_1 = T_0 - T_1 = -10$, donc $\mathbf{b} = [-10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

La solution numérique (pour la température de référence $T_e = 20\ °\text{C}$) est :

$$\boldsymbol{\theta}_5 = (\mathbf{A}^T\mathbf{GA})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{Gb} + \mathbf{f}) = [-8{,}90 \quad -6{,}78 \quad -4{,}74 \quad -2{,}78 \quad -0{,}90]^T$$

Les valeurs des températures sont :

$$\mathbf{T}_5 = \boldsymbol{\theta}_5 + T_e = \boldsymbol{\theta}_5 + 20\ °\text{C} = [11{,}10 \quad 13{,}22 \quad 15{,}26 \quad 17{,}22 \quad 19{,}10]^T$$

Solution analytique :

$$\mathbf{T}_{a5} = [11{,}09 \quad 13{,}21 \quad 15{,}25 \quad 17{,}21 \quad 19{,}09]^T$$

Erreur $\varepsilon_i = \dfrac{\theta_i - (T_{ai} - 20)}{T_{ai} - 20}$, $i = 1,...,5$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix}0.0011 & 0.0015 & 0.0021 & 0.0036 & 0.0110\end{bmatrix}^T$

Les flux sortants :

Solution numérique :

$$q_1 = \frac{1}{R/10}(b_1 + \theta_0 - \theta_1) = \frac{b_1 - \theta_1}{R/10} = \frac{b_1 - \theta_1}{\frac{1}{10}\frac{e}{\lambda S}} = -2200 \text{ W pour } S = 1 \text{ m}^2 \ ;$$

soit $\varphi_1 = -2200$ W/m^2

$$q_5 = \frac{1}{R/10}(b_5 + \theta_5 - \theta_6) = \frac{\theta_5}{R/10} = \frac{\theta_5}{\frac{1}{10}\frac{e}{\lambda S}} = -1800 \text{ W pour } S = 1 \text{ m}^2 \ ;$$

Soit $\varphi_5 = -1800$ W/m^2

$\varphi_5 - \varphi_1 = 400 \text{ W/m}^2 = \alpha E$

Solution analytique :

$$\varphi(0) = -\left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right) = -2200 \text{ W/m}^2$$, le flux sort (direction opposée à x)

$$\varphi(e) = \frac{\alpha E}{e} e - \left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right) = -1800 \text{ W/m}^2$$, le flux sort (dans la direction x)

$\varphi(e) - \varphi(0) = 400 \text{ W/m}^2 = \alpha E$.

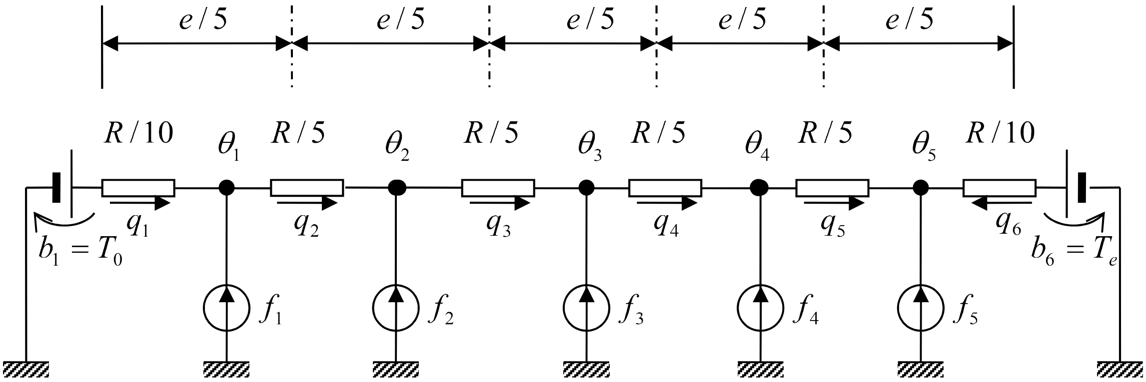
e. Discrétisation en cinq couches, cas b) $T_0 = 10\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$.

Note : les directions de q_1 et de q_6 sont choisies dans le sens « source » vers « résistance »

$E = 800\ \mathrm{W/m^2}$, $\alpha = 0.5$, $e = 0.5\ \mathrm{cm}$, $\lambda_v = 1\ \mathrm{W/m\cdot K}$, $T_0 = 10\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$

pour $S = 1\ \mathrm{m}^2$, $\quad R = \dfrac{e}{\lambda S} = 0.005\ \mathrm{K/W}$; $R_1 = R_6 = R/10$; $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R/5$

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = \frac{1}{5}\alpha E S$$



Le circuit est décrit par :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{matrix} \; ; \; \mathbf{G} = \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6^{-1} \end{bmatrix} \; ; \; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_e \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f} = [\,f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5\,]^T$

Note : la direction de q_6 implique que $a_{65} = 1$

Toutes les sources de flux sont égaux : $\mathbf{f} = \dfrac{1}{5}\alpha E S [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$

La solution numérique est :

$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{b} + \mathbf{f}) = [11{,}10 \quad 13{,}22 \quad 15{,}26 \quad 17{,}22 \quad 19{,}10]^T$

A comparer avec :

$\mathbf{T}_5 = \boldsymbol{\theta}_5 + T_e = \boldsymbol{\theta}_5 + 20\ °\mathrm{C} = [11{,}10 \quad 13{,}22 \quad 15{,}26 \quad 17{,}22 \quad 19{,}10]^T$

et la solution analytique :

$\mathbf{T}_{a5} = [11{,}09 \quad 13{,}21 \quad 15{,}25 \quad 17{,}21 \quad 19{,}09]^T$

```
alpha = 0.5; e = 5e-3; lambda = 1; E = 800;
T0 = 10; Te = 20;
R1 = e/5/2/(lambda);
R2 = 2*R1;
A = [1 0 0 0 0; -1 1 0 0 0; 0 -1 1 0 0; 0 0 -1 1 0; 0 0 0 -1 1; 0 0 0 0 1];
C = [1/R1 0 0 0 0 0; 0 1/R2 0 0 0 0; 0 0 1/R2 0 0 0; 0 0 0 1/R2 0 0; 0 0 0 0 1/R2 0;
0 0 0 0 0 1/R1];
f = alpha*E/5*[1 1 1 1 1]';
b = [T0 0 0 0 0 Te]';
theta11 = inv((A'*C*A))*(A'*C*b + f)
```

Les flux sortants :

Solution numérique :

Pour $S = 1\ \text{m}^2$,

$$q_1 = \frac{1}{R/10} e_1 = \frac{1}{R/10}(b_1 + \theta_0 - \theta_1) = \frac{b_1 - \theta_1}{R/10} = \frac{b_1 - \theta_1}{\dfrac{1}{10}\dfrac{e}{\lambda S}} = -2200\ \text{W} \text{ pour } S = 1\ \text{m}^2\ ;$$

soit $\varphi_1 = -2200\ \text{W/m}^2$ (le flux est sortant).

$$q_6 = \frac{1}{R/10} e_6 = \frac{1}{R/10}(b_6 + \theta_6 - \theta_5) = \frac{T_e - \theta_5}{R/10} = \frac{T_e - \theta_5}{\dfrac{1}{10}\dfrac{e}{\lambda S}} = \frac{20 - 19{,}10}{\dfrac{1}{10}\dfrac{0{,}005}{1 \times 1}} = 1800\ \text{W}$$

soit $\varphi_6 = 1800\ \text{W/m}^2$ (le flux entre dans la paroi).

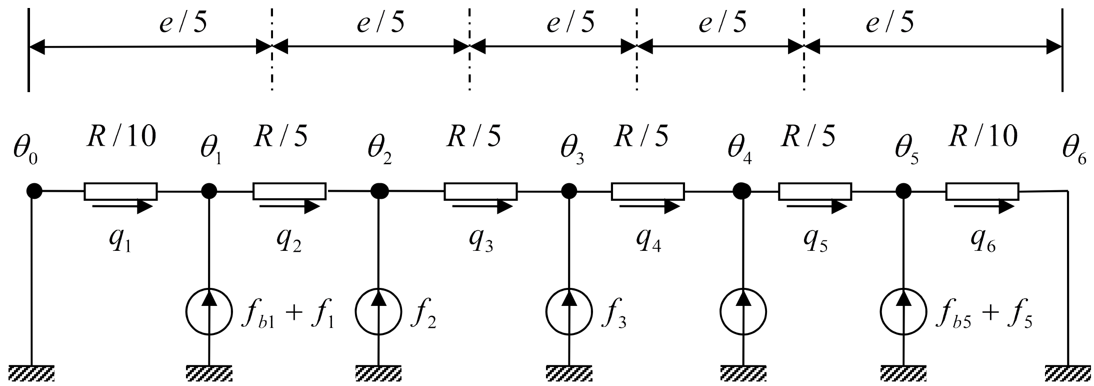
Le bilan d'énergie sur la paroi :

$$\varphi_1 + \varphi_6 + \alpha E = -2200 + 1800 - 400 = 0\ [\text{W/m}^2]$$

Note :

Dans l'expression de la température, $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{b} + \mathbf{f})$, le terme $\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{b} + \mathbf{f}$ représente un flux.

Les flux $\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{b} \equiv \mathbf{f}_b \equiv [f_{b1} \quad f_{b2} \quad f_{b3} \quad f_{b4} \quad f_{b5}]^T = [20000 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 40000]^T$ sont injectés dans les nœuds dus à la transformation des sources de température en sources de flux équivalentes (théorème de Norton). On peut construire un circuit équivalent contenant que des sources de flux.



Solution analytique :

$$\varphi(0) = -\left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2} \right) = -2200 \text{ W/m}^2$$, le flux sort (direction opposée à x)

$$\varphi(e) = \frac{\alpha E}{e} e - \left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2} \right) = -1800 \text{ W/m}^2$$, le flux sort (dans la direction x)

$\varphi(e) - \varphi(0) = 400 \text{ W/m}^2 = \alpha E$.

f. Discrétisation en cinq couches, cas b) $T_0 = 10\ °\text{C}$, $T_e = 20\ °\text{C}$.

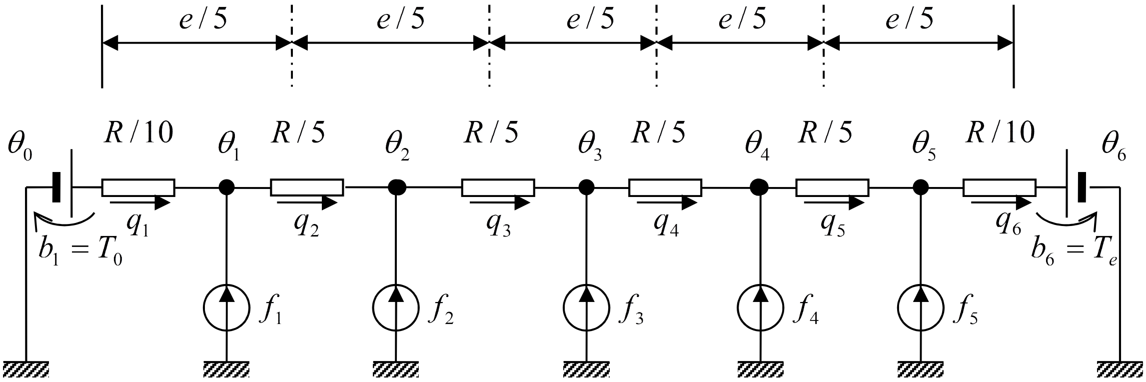
Note : les directions de q_1 *et de* q_6 *sont choisies dans le sens indifférent (de gauche à droite)*

$E = 800\ \text{W/m}^2$, $\alpha = 0.5$, $e = 0.5\ \text{cm}$, $\lambda_v = 1\ \text{W/m}\cdot\text{K}$,

$T_0 = 10\ °\text{C}$, $T_e = 20\ °\text{C}$

pour $S = 1\ \text{m}^2$: $R = \dfrac{e}{\lambda S} = 0.005\ \text{K/W}$; $R_1 = R_6 = R/10$; $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R/5$

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = \frac{1}{5}\alpha E S$$



Le circuit est décrit par :

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{array} ; \ \mathbf{G} = \begin{bmatrix} R_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6^{-1} \end{bmatrix} ; \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -T_e \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f} = [\, f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_5]^T$

La solution est :

$\boldsymbol{\theta} = [11{,}10 \quad 13{,}22 \quad 15{,}26 \quad 17{,}22 \quad 19{,}10]^T$

obtenue avec : $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{b} + \mathbf{f})$

A comparer avec : $\mathbf{T}_5 = \boldsymbol{\theta}_5 + T_e = \boldsymbol{\theta}_5 + 20\ °\text{C} = [11{,}10 \quad 13{,}22 \quad 15{,}26 \quad 17{,}22 \quad 19{,}10]^T$

et la solution analytique : $\mathbf{T}_{a5} = [11{,}09 \quad 13{,}21 \quad 15{,}25 \quad 17{,}21 \quad 19{,}09]^T$

Calcul matriciel : http://www.calculator-grapher.com/matrix-calculator.html