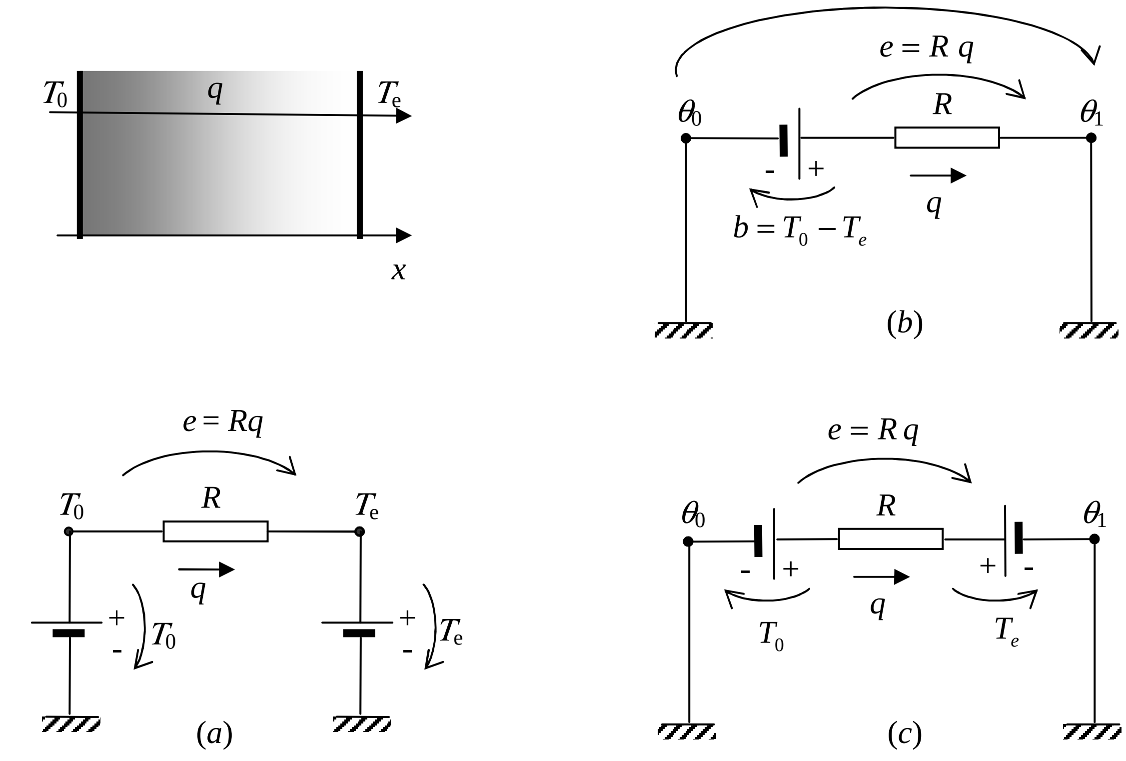
Exo 1 Mur soumis aux conditions limites de type Dirichelt

Considérons un mur d'épaisseur e et de surface S dont les faces $x=0$ et $x=e$ sont respectivement maintenues aux températures T_0 et T_e. On supposera que les transferts de chaleur sont monodimensionnels et en régime permanent, sans création de chaleur interne, et que la conductivité du matériau est constante.

Figurer le circuit thermique. Donner l'expression de la distribution de température $T(x)$, de la densité de flux $\varphi\,[\mathrm{W/m^2}]$ et du flux traversant $q\,[\mathrm{W}]$ le mur.

A.N. $T_0 = -5\ °\mathrm{C}$, $T_e = 25\ °\mathrm{C}$, $\lambda = 0{,}8\ \mathrm{W/m\cdot K}$, $e = 0.1\ \mathrm{m}$, $S = 15\ \mathrm{m^2}$



Approche basée sur l'équation de la chaleur

Equation de la chaleur :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = div(\lambda\,\mathbf{grad}T) + p$$

ou

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + p\,.$$

En régime permanant, sans sources de chaleur, avec conductivité homogène :

$div(\mathbf{grad}T) = 0$ ou $\Delta T = 0$.

Dans une dimension :

$\dfrac{d^2T}{dx^2} = 0$;

en intégrant : $\dfrac{dT}{dx} = c_1$;

en intégrant : $T = c_1 x + c_2$

En utilisant les conditions aux limites pour trouver les constantes d'intégration :

$x = 0$, $T(0) = T_0$; $c_2 = T_0$

$x = e$, $T(e) = T_e$; $c_1 = \dfrac{T_e - T_0}{e}$

La distribution de la température :

$$\boxed{T(x) = \frac{T_e - T_0}{e} x + T_0}$$

$T(x) = 300x - 5\,[°\mathrm{C}]$

Densité de flux :

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi &= -\lambda\, \mathbf{grad}\, T \\ &= -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda c_1 \\ &= -\lambda \frac{T_e - T_0}{e} \\ &= \frac{\lambda}{e}(T_0 - T_e) \end{aligned}}$$

$\varphi = -240\,[\mathrm{W/m^2}]$ de T_0 vers T_e,

c. à d. une densité de flux de $240\,[\mathrm{W/m^2}]$ dans le sens opposée de l'axe *x*.

$q = \varphi S = -240 \dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} \times 15\,\mathrm{m^2} = -360\,\mathrm{W}$ (le flux est dans le sens opposé de la flèche)

Approche basée sur le circuit thermique

En utilisant la résistance thermique de la paroi plane,

$$R = \frac{e}{\lambda S} = \frac{0{,}1\ \mathrm{m}}{0{,}8\ \mathrm{W/mK} \cdot 15\ \mathrm{m^2}} = 0{,}0083\ \mathrm{K/W}$$

le flux du circuit *a* est :

$$q = \frac{1}{R}(T_0 - T_1) = -3600\ \mathrm{W}.$$

Pour le circuit (*b*), on prend T_e comme température de référence ce qui implique que toutes les températures seront diminue avec T_e. Alors,

$\theta_0 - \theta_1 = e - (T_0 - T_e)$;

En notant :

$b \equiv T_0 - T_1$

on obtient :

$\theta_0 - \theta_1 = e - b$

La résistance est soumise à une différence de température :

$e = b + \theta_0 - \theta_1$.

Comme $\theta_0 = \theta_1 = 0$, $e = b = T_0 - T_1$.

Le flux à travers la résistance est :

$$q = \frac{1}{R} e = \frac{1}{R}(T_0 - T_1) = -3600\ \mathrm{W}.$$

Si on considère les deux sources (circuit (*c*)), alors :

$\theta_0 - \theta_1 = e - T_0 + T_1$

Et on retrouve

$e = b + \theta_0 - \theta_1$, où $b = T_0 - T_1$.

Exo 2 Mur en régime permanant avec création interne de chaleur

On considère une vitre d'épaisseur e et de conductivité thermique constante λ_v séparant deux milieux à température parfaitement régulée $T(0) = T_0$ à l'extérieure et $T(e) = T_e$ à l'intérieure. Cette vitre, supposée infinie dans les deux autres directions, reçoit un ensoleillement E dont elle absorbe uniformément une partie en fonction de son coefficient d'absorption α. On considère le régime permanant.

1. Déterminer l'expression analytique de la répartition de la température dans la vitre.
2. Donner l'expression de la densité de flux de chaleur traversant la vitre et vérifier que la somme algébrique des flux sortants par les deux faces est égale au flux absorbé.
3. En utilisant cette expression, calculer la valeur maximale atteinte par la température dans la vitre et sa position géométrique.
4. Pour le cas où $T_0 = 20\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$, traiter les mêmes problèmes dans une approche numérique en discrétisant la vitre en 1, 3 et 5 couches. Donner le schéma du circuit thermique et les valeurs des températures dans les nœuds. Comparer ces valeurs avec les valeurs obtenues analytiquement. Trouver les flux thermiques traversant la surface de la vitre et vérifier que la somme des flux sortants par les deux faces est égale au flux absorbé. Comparer les valeurs des flux sortants obtenues numériquement et analytiquement.
5. Le même problème pour le cas où $T_0 = 10\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$, traité pour une discrétisation en 5 couches.

A. N. $E = 800\ \mathrm{W/m^2}$, $\alpha = 0.5$, $e = 0.5\ \mathrm{cm}$, $\lambda_v = 1\ \mathrm{W/m \cdot K}$

Cas a) $T_0 = 20\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$ b) $T_0 = 10\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$

1. Expression analytique de la répartition de température

L'énergie absorbée se transforme en chaleur dans la vitre ; on la considère une source interne de chaleur, $p\ [\mathrm{W/m^3}]$. Pour une surface $S = 1\ \mathrm{m^2}$,

$\alpha E S = \int_0^e p\, S\, dx$, ou $\alpha E = \int_0^e p\, dx$, ou, comme $p(x) = \mathrm{ct.}$, $\alpha E = p\, e$.

D'où :

$$p = \frac{\alpha E}{e}\ [\mathrm{W/m^3}]$$

L'équation de Poisson (régime stationnaire avec sources internes, conductivité homogène) :

$$\lambda\, div(\mathbf{grad} T) + p = 0$$

Pour une dimension,

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} + p = 0 \text{ ou } \lambda \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\alpha E}{e} = 0 \text{ ou } \frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\alpha E}{\lambda e}$$

En intégrant :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\alpha E}{\lambda e} x + c_1 \text{ et } T = -\frac{\alpha E}{2\lambda e} x^2 + c_1 x + c_2$$

On détermine les constants c_1 et c_2 en utilisant les conditions aux limites :

$$T\big|_{x=0} = T_0 \Rightarrow c_2 = T_0$$

$$T\big|_{x=e} = T_e \Rightarrow T_e = -\frac{\alpha E}{2\lambda e} e^2 + c_1 e + T_0$$

$$c_1 = \frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}$$

L'équation de la distribution de température :

$$\boxed{T(x) = -\frac{\alpha E}{2\lambda e} x^2 + \left(\frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}\right) x + T_0}$$

2. La densité de flux traversant la paroi et bilan des flux

$$\boxed{\varphi(x) = -\lambda\, \mathbf{grad} T = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda\left(-\frac{\alpha E}{\lambda e} x + c_1\right) = \frac{\alpha E}{e} x - \left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right)}$$

Flux sortant :

Cas a) $T_0 = 20$ °C , $T_e = 20$ °C

$$\varphi(0) = -\left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right) = -\frac{\alpha E}{2} = -200 \text{ W/m}^2$$, le flux sort (direction opposée à x)

$$\varphi(e) = \frac{\alpha E}{e} e - \left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right) = \frac{\alpha E}{2} = 200 \text{ W/m}^2$$, le flux sort (dans la direction x)

$$-\varphi(0) + \varphi(e) = \alpha E = 400 \text{ W/m}^2$$

Cas b) $T_0 = 10\ °\text{C}$, $T_e = 20\ °\text{C}$

$$\varphi(0) = -\left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right) = -2200\ \text{W/m}^2$$

$$\varphi(e) = \frac{\alpha E}{e} e - \left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right) = -1800\ \text{W/m}^2$$

$$-\varphi(0) + \varphi(e) = \alpha E = 400\ \text{W/m}^2$$

3. La valeur maximale de la température interne et sa position géométrique

$\frac{dT}{dx} = -\frac{\alpha E}{\lambda e} x + c_1$, donc $\frac{dT}{dx} = -\frac{\alpha E}{e\lambda} x + \left(\frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}\right)$

ou

$$\varphi(x) = -\lambda\, \mathbf{grad} T = 0,\ -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{\alpha E}{e} x - \left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right),$$

donc $\frac{dT}{dx} = -\frac{\alpha E}{e\lambda} x + \left(\frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}\right)$

Position du maximum : trouver x où $\frac{dT}{dx} = 0$

$$-\frac{\alpha E}{e\lambda} x + \left(\frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}\right) = 0$$

$$\boxed{x = \lambda \frac{T_e - T_0}{\alpha E} + \frac{e}{2}}$$

Cas a) $T_0 = 20\ °\text{C}$, $T_e = 20\ °\text{C}$ ➔ $\boxed{x = e/2 = 0{,}25\ \text{cm}}$

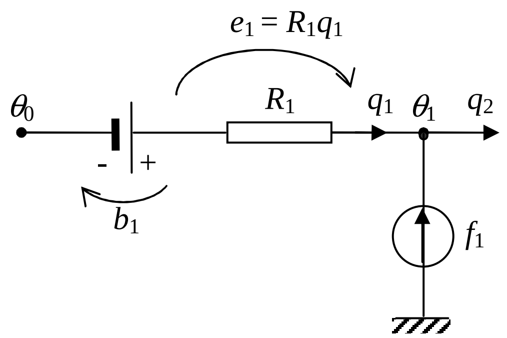
$$\boxed{T\big|_{x=e/2} = -\frac{\alpha E}{2\lambda e} x^2 + \left(\frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}\right) x + T_0 = 0{,}25 + 20 = 20{,}25\ °\text{C}}$$

Cas b) $T_0 = 10\ °\text{C}$, $T_e = 20\ °\text{C}$ ➔ $x = 0{,}0275\ \text{m} = 2{,}75\ \text{cm}$ c. à d. à l'extérieure de la vitre, donc un résultat qui n'est pas physique.

➔ la valeur maximale est à l'extrémité de la paroi : $\boxed{x = e = 0{,}5\ \text{cm}}$ où la température est $\boxed{\text{imposée à } T_e = 20\ °\text{C}}$

4. Traiter les mêmes problèmes dans une approche numérique en discrétisant en 1, 3 et 5 couches. Donner le schéma du circuit thermique et les valeurs des températures dans les nœuds. Comparer ces valeurs avec les valeurs obtenues analytiquement.

Circuit thermique pour une maille dans le cas de la conduction en régime stationnaire avec sources internes (voir cours l'analogie électrique pour un tube de courant avec sources internes).



$$f_1 = \int_{s_0}^{s_1} pS\,ds \;\; ; \;\; b_1 = -r(s_1)\int_{s_0}^{s_1} pS\,ds + \int_{s_0}^{s_1} pSr\,ds \;\; ; \;\; R_1 = \frac{s_1 - s_0}{\lambda S}$$

Pour le cas unidimensionnel, on considère la surface S constante, $S = 1\ \mathrm{m}^2$

$$dr = \frac{ds}{\lambda S} \text{ et } r = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\lambda S} = \frac{1}{\lambda S}\int_{s_0}^{s_1} ds = \frac{s_1 - s_0}{\lambda S} = \frac{e}{\lambda S}$$

donc : $b_1 = -r(s_1)\int_{s_0}^{s_1} pS\,ds + \int_{s_0}^{s_1} pSr\,ds = -rpS\int_{s_0}^{s_1} ds + rpS\int_{s_0}^{s_1} ds = 0$

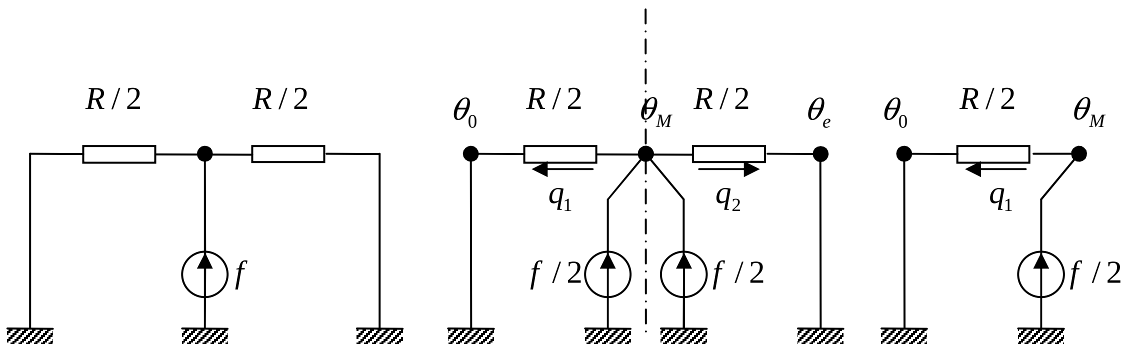
$$p = \frac{\alpha E}{e}\ [\mathrm{W/m^3}]$$

donc : $f_1 = \int_{s_0}^{s_1} pS\,ds = pS(s_1 - s_0) = \alpha E S\,\frac{s_1 - s_0}{e}$

a. Discrétisation dans une couche, cas a) $T_0 = 20\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$.

On considère $T_0 = 20\ °\mathrm{C}$ la température de référence.

La résistance pour l'unité de surface, $S = 1\ \mathrm{m}^2$, est $R = \dfrac{e}{\lambda S} = 0.005\ \mathrm{K/W}$.



Note : les sources de flux s'additionnent dans un nœud.

Température à l'intérieure

$$T_M - T_0 \equiv \theta_M = \frac{R}{2} q_1 = \frac{R}{2}\frac{\alpha E S}{2} = \frac{e}{2\lambda S}\frac{\alpha E S}{2} = \frac{\alpha E e}{4\lambda} = 0{,}5\ °\mathrm{C}$$

$T_M = \theta_M + T_0 = 20{,}5\ °\mathrm{C}$; solution numérique

Solution analytique :

$$T\big|_{x=e/2} = -\frac{\alpha E}{2\lambda e}x^2 + \left(\frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}\right)x + T_0 = 0{,}25 + 20 = 20{,}25\ °\mathrm{C}$$

Flux thermiques traversant la vitre

$$f = \alpha E S \frac{s_1 - s_0}{e}\Bigg|_{\substack{s_1 = e\\ s_0 = 0}} = \alpha E S$$

$$q_1 = \frac{1}{R/2}(\theta_M - \theta_0),\ q_2 = \frac{1}{R/2}(\theta_M - \theta_e),\ \theta_0 = \theta_e = 0,\ \Rightarrow\ q_1 = q_2$$

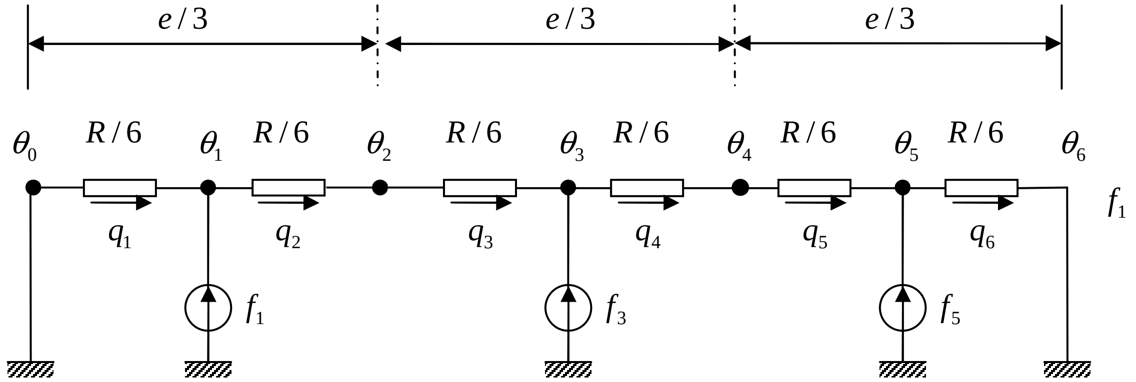
bilan des flux dans le nœud θ_M : $f = q_1 + q_2 \ \Rightarrow\ \boxed{q_1 = q_2 = f/2 = \dfrac{\alpha E}{2} = 200\ \mathrm{W}}$

$$q_1 = \varphi_1 S\ ;\ q_2 = \varphi_2 S \ \Rightarrow\ \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\alpha E}{2} = 200\ \mathrm{W/m^2}$$

Vérification que la somme des flux est égale au flux absorbé :

$\boxed{q_1 + q_2 = f}$

b. Discrétisation en trois couches, cas a) $T_0 = 20\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$.



$$\mathbf{A}_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{array} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{R/6}\mathbf{I}_{6\times 6} = \frac{R}{6}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ R = \frac{e}{\lambda S} = 0.005\ \mathrm{K/W}, \text{ pour } S = 1\ \mathrm{m}^2$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{3}\alpha E S [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T = \frac{1}{3} 0.5 \times 800 \times 1 \times [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T \ \mathrm{W}, \text{ pour } S = 1\ \mathrm{m}^2$$

On obtient la solution numérique :

$$\boldsymbol{\theta}_3 = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{f} = (R/6)(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{f} = [0{,}167 \quad 0{,}222 \quad 0{,}278 \quad 0{,}222 \quad 0{,}167]^T$$

dans les points de coordonnées :

$$\mathbf{x} = \frac{e}{6}[1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5]^T.$$

Note : L'avantage d'utiliser cette forme de la discrétisation est que la matrice $(\mathbf{A}^T\mathbf{GA})^{-1}$ devient $(R/6)(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$ (où $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ est la matrice Laplacian)

La solution analytique dans ces points (la distribution des températures en considérant la référence à 20 °C) est :

$$\boldsymbol{\theta}_{a3} = [0{,}139 \quad 0{,}222 \quad 0{,}250 \quad 0{,}222 \quad 0{,}139]^T$$

Le erreurs relatives, $\varepsilon = \dfrac{\theta_{numérique} - \theta_{analytique}}{\theta_{analytique}}$, sont :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [0.16 \quad 0 \quad 0.10 \quad 0 \quad 0.16]^T$$

Les flux qui sortent :

$$q_1 = \frac{1}{R/6}(\theta_0 - \theta_1) = \frac{-\theta_1}{R/6} = \frac{-\theta_1}{\frac{1}{6}\frac{e}{\lambda S}} = -200{,}4 \text{ W} \text{ pour } S = 1 \text{ m}^2 \text{, soit } \varphi_1 = -200{,}4 \text{ W/m}^2$$

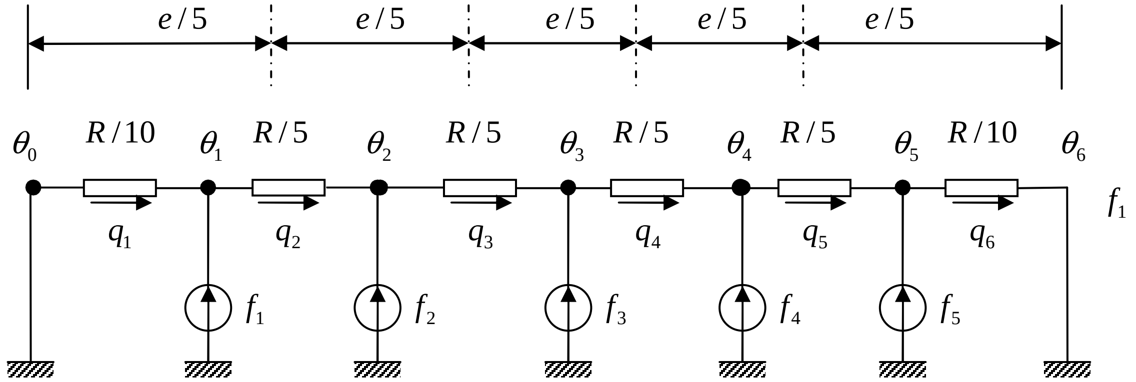
$$q_6 = \frac{1}{R/6}(\theta_5 - \theta_6) = \frac{\theta_5}{R/6} = \frac{\theta_5}{\frac{1}{6}\frac{e}{\lambda S}} = -200{,}4 \text{ W} \text{ pour } S = 1 \text{ m}^2 \text{, soit } \varphi_6 = 200{,}4 \text{ W/m}^2$$

$$-\varphi_1 + \varphi_2 = 400{,}4 \text{ W/m}^2$$

Erreur relative :

$$\frac{(-\varphi_1 + \varphi_2) - \alpha E}{\alpha E} = \frac{400{,}4 - 400}{400} = 0.001 \cong 0 \text{ (erreur d'arrondi)}$$

c. Discrétisation en cinq couches, cas a) $T_0 = 20\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$.



$$
\mathbf{A}_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4 & \theta_5 & \theta_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{array}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{G} = \frac{10}{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \ R = \frac{e}{\lambda S}
$$

$$
\mathbf{f} = \frac{1}{5}\alpha E[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T
$$

La solution numérique :

$$
\boldsymbol{\theta}_5 = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{f} = [0{,}10 \quad 0{,}22 \quad 0{,}26 \quad 0{,}22 \quad 0{,}10]^T
$$

dans les points de coordonnées :

$$
\mathbf{x} = \frac{e}{10}[1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9]^T.
$$

La solution analytique dans ces points :

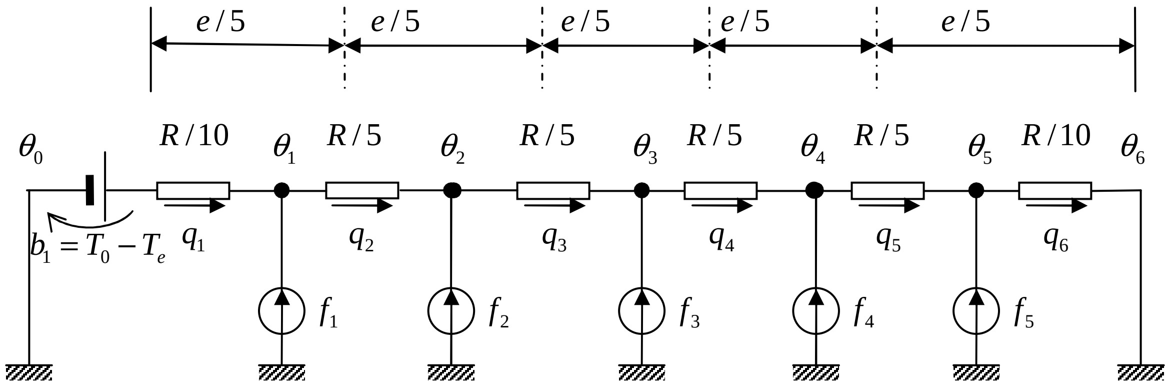
$$
\boldsymbol{\theta}_{a5} = [0{,}09 \quad 0{,}21 \quad 0{,}25 \quad 0{,}21 \quad 0{,}09]^T
$$

Les erreurs relatives, $\varepsilon = (\theta_{numérique} - \theta_{analytique}) / \theta_{analytique}$:

$$
\boldsymbol{\varepsilon} = [0.11 \quad 0.05 \quad 0.04 \quad 0.05 \quad 0.11]^T
$$

d. Discrétisation en cinq couches, cas b) $T_0 = 10\ °\mathrm{C}$, $T_e = 20\ °\mathrm{C}$.

Température de référence : $T_e = 20\ °\mathrm{C}$; il en résulte $b_1 = T_0 - T_e = -10\ °\mathrm{C}$.



$\mathbf{b} = [-10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

$\boldsymbol{\theta}_5 = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{b} + \mathbf{f}) = [-8{,}90 \quad -6{,}78 \quad -4{,}74 \quad -2{,}78 \quad -0{,}90]^T$

$\mathbf{T}_5 = \boldsymbol{\theta}_5 + T_e = \boldsymbol{\theta}_5 + 20\ °\mathrm{C} = [11{,}10 \quad 13{,}22 \quad 15{,}26 \quad 17{,}22 \quad 19{,}10]^T$

Solution analytique :

$\mathbf{T}_{a5} = [11{,}09 \quad 13{,}21 \quad 15{,}25 \quad 17{,}21 \quad 19{,}09]^T$

Erreur $\varepsilon_i = \dfrac{\theta_i - (T_{ai} - 20)}{T_{ai} - 20}$, $i = 1,...,5$, $\boldsymbol{\varepsilon} = [0.0011 \quad 0.0015 \quad 0.0021 \quad 0.0036 \quad 0.0110]^T$

Les flux sortants :

Solution numérique :

$$q_1 = \frac{1}{R/10}(b_1 + \theta_0 - \theta_1) = \frac{b_1 - \theta_1}{R/10} = \frac{b_1 - \theta_1}{\dfrac{1}{10}\dfrac{e}{\lambda S}} = -2200\ \mathrm{W}\ \text{pour}\ S = 1\ \mathrm{m}^2\ ;$$

soit $\varphi_1 = -2200\ \mathrm{W/m^2}$

$$q_5 = \frac{1}{R/10}(b_5 + \theta_5 - \theta_6) = \frac{\theta_5}{R/10} = \frac{\theta_5}{\dfrac{1}{10}\dfrac{e}{\lambda S}} = -1800\ \mathrm{W}\ \text{pour}\ S = 1\ \mathrm{m}^2\ ;$$

Soit $\varphi_5 = -1800\ \mathrm{W/m^2}$

$\varphi_5 - \varphi_1 = 400\ \mathrm{W/m^2} = \alpha E$

Solution analytique :

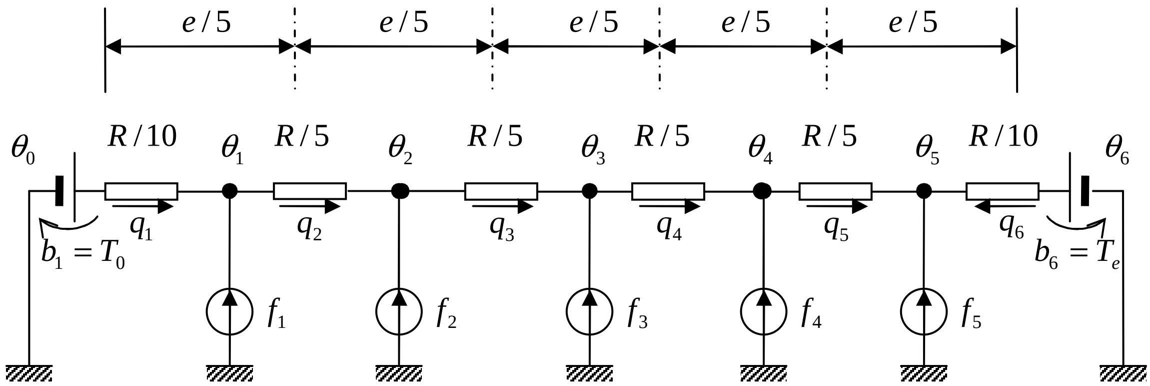
$$\varphi(0) = -\left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right) = -2200 \text{ W/m}^2$$, le flux sort (direction opposée à x)

$$\varphi(e) = \frac{\alpha E}{e} e - \left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2}\right) = -1800 \text{ W/m}^2$$, le flux sort (dans la direction x)

$\varphi(e) - \varphi(0) = 400 \text{ W/m}^2 = \alpha E$.

e. Discrétisation en cinq couches, cas b) $T_0 = 10\ °\text{C}$, $T_e = 20\ °\text{C}$.

Note : les directions de q_1 *et de* q_6 *sont choisies dans le sens « source » -> « résistance »*



$E = 800\ \text{W/m}^2$, $\alpha = 0.5$, $e = 0.5\ \text{cm}$, $\lambda_v = 1\ \text{W/m}\cdot\text{K}$, $T_0 = 10\ °\text{C}$, $T_e = 20\ °\text{C}$

$R = \dfrac{e}{\lambda S} = 0.005\ \text{K/W}$, pour $S = 1\ \text{m}^2$; $R_1 = R_6 = R/10$; $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R/5$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_6 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f} = \dfrac{1}{5}\alpha E[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$

$\mathbf{b} = [T_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad T_e]^T$

$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{b} + \mathbf{f}) = [11{,}10 \quad 13{,}22 \quad 15{,}26 \quad 17{,}22 \quad 19{,}10]^T$

A comparer avec :

$\mathbf{T}_5 = \boldsymbol{\theta}_5 + T_e = \boldsymbol{\theta}_5 + 20\ °\text{C} = [11{,}10 \quad 13{,}22 \quad 15{,}26 \quad 17{,}22 \quad 19{,}10]^T$

et la solution analytique :

$\mathbf{T}_{a5} = [11{,}09 \quad 13{,}21 \quad 15{,}25 \quad 17{,}21 \quad 19{,}09]^T$

Les flux sortants :

Solution numérique :

$$q_1 = \frac{1}{R/10}e_1 = \frac{1}{R/10}(b_1 + \theta_0 - \theta_1) = \frac{b_1 - \theta_1}{R/10} = \frac{b_1 - \theta_1}{\frac{1}{10}\frac{e}{\lambda S}} = -2200\ \text{W} \text{ pour } S = 1\ \text{m}^2 \ ;$$

soit $\varphi_1 = -2200 \text{ W/m}^2$ (le flux est sortant).

$$q_6 = \frac{1}{R/10} e_6 = \frac{1}{R/10}(b_6 + \theta_6 - \theta_5) = \frac{T_e - \theta_5}{R/10} = \frac{T_e - \theta_5}{\frac{1}{10}\frac{e}{\lambda S}} = \frac{20 - 19{,}10}{\frac{1}{10}\frac{0{,}005}{1\times 1}} = 1800 \text{ W pour}$$

$S = 1 \text{ m}^2$;

Soit $\varphi_6 = 1800 \text{ W/m}^2$ (le flux entre dans la paroi).

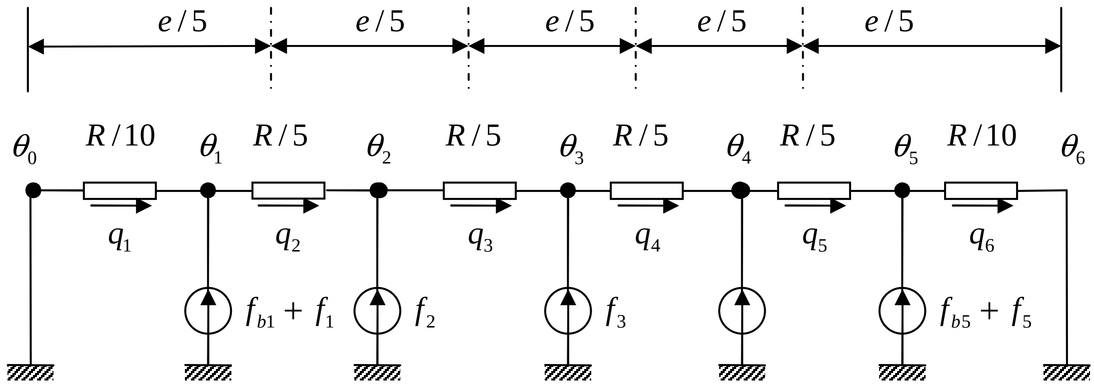
Le bilan d'énergie sur la paroi :

$\varphi_1 + \varphi_6 + \alpha E = -2200 + 1800 - 400 = 0 \text{ [W/m}^2\text{]}$

Note :

Dans l'expression de la température, $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f})$, le terme $\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f}$ représente un flux.

$\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} \equiv \mathbf{f}_b \equiv [f_{b1} \quad f_{b2} \quad f_{b3} \quad f_{b4} \quad f_{b5}]^T = [20000 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 40000]^T$ sont les flux injectés dans les nœuds due à la transformation des sources de température en sources de flux équivalentes (théorème de Norton). On peut construire un circuit équivalent contenant que des sources de flux.



Solution analytique :

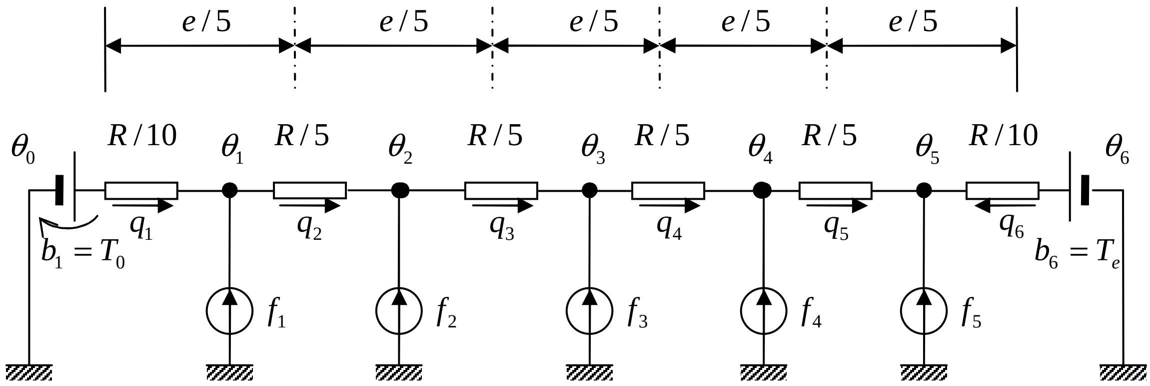
$$\varphi(0) = -\left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2} \right) = -2200 \text{ W/m}^2, \text{ le flux sort (direction opposée à } x\text{)}$$

$$\varphi(e) = \frac{\alpha E}{e} e - \left(\frac{T_e - T_0}{\frac{e}{\lambda}} + \frac{\alpha E}{2} \right) = -1800 \text{ W/m}^2, \text{ le flux sort (dans la direction } x\text{)}$$

$\varphi(e) - \varphi(0) = 400 \text{ W/m}^2 = \alpha E$.

f. Discrétisation en cinq couches, cas b) $T_0 = 10$ °C, $T_e = 20$ °C.

Note : les directions de q_1 *et de* q_6 *sont choisies dans le sens indifférent (de gauche à droite)*



$E = 800$ W/m^2, $\alpha = 0.5$, $e = 0.5$ cm, $\lambda_v = 1$ W/m·K, $T_0 = 10$ °C, $T_e = 20$ °C

$R = \dfrac{e}{\lambda S} = 0.005$ K/W, pour $S = 1$ m^2 ; $R_1 = R_6 = R/10$; $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R/5$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_6 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f} = \dfrac{1}{5}\alpha E[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$

$\mathbf{b} = [T_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad T_e]^T$

$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{b} + \mathbf{f}) = [11{,}10 \quad 13{,}22 \quad 15{,}26 \quad 17{,}22 \quad 19{,}10]^T$

A comparer avec :

$\mathbf{T}_5 = \boldsymbol{\theta}_5 + T_e = \boldsymbol{\theta}_5 + 20$ °C $= [11{,}10 \quad 13{,}22 \quad 15{,}26 \quad 17{,}22 \quad 19{,}10]^T$

et la solution analytique :

$\mathbf{T}_{a5} = [11{,}09 \quad 13{,}21 \quad 15{,}25 \quad 17{,}21 \quad 19{,}09]^T$

Calcul matriciel : http://www.calculator-grapher.com/matrix-calculator.html