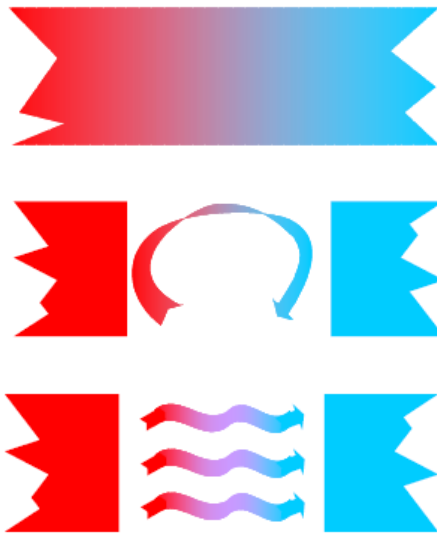


# Transferts de chaleur



Christian Ghiaus

2020 – 2021



# Sommaire

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>7</b>
1.1	Bilan d'énergie thermique.....	8
1.2	Lois constitutives.....	11
<b>2</b>	<b>CONDUCTION – NOTIONS GENERALES .....</b>	<b>21</b>
2.1	Loi constitutive : loi de Fourier .....	21
2.2	Equation générale de diffusion de la chaleur .....	24
2.3	Formes particulières de l'équation de la chaleur.....	27
2.3.1	Système de coordonnées cartésien, cylindrique et sphérique .....	27
2.3.2	Matériel homogène et isotrope de conductivité constante .....	29
2.3.3	Matériel homogène en régime stationnaire : équation de Poisson.....	29
2.3.4	Matériel homogène en régime stationnaire sans sources internes : équation de Laplace.....	30
2.4	Conditions aux limites pour la résolution de l'équation de la chaleur.....	30
<b>3</b>	<b>CONDUCTION UNIDIMENSIONNELLE EN REGIME PERMANENT .....</b>	<b>33</b>
3.1	Conduction unidimensionnelle sans sources internes.....	33
3.1.1	Mur plan .....	33
3.1.2	Cylindre .....	36
3.1.3	Sphère .....	38
3.1.4	Résistance thermique de conduction.....	39
3.2	Conduction unidimensionnelle avec sources internes .....	41
3.3	Circuits thermique.....	43
3.3.1	Résistances de convection et de rayonnement .....	44
3.3.2	Circuits thermiques.....	44
3.3.3	Circuit équivalent du mur multicouche.....	45
3.3.4	Résistance de contact.....	47
3.3.5	Sources de flux et de température.....	48
3.3.6	Théorèmes de Thévenin et de Norton.....	49
3.4	Résolution numériques des problèmes directs .....	51
3.4.1	Types de problèmes .....	51
3.4.2	Problèmes directe en conduction stationnaire.....	52
3.4.2.1	Conditions de type Dirichlet aux deux limites .....	52
3.4.2.2	Conditions de type Dirichlet avec des valeurs différentes aux limites .....	56
3.4.2.3	Condition de type Dirichlet et de type Neumann .....	62
3.4.2.4	Conditions de type Neumann .....	64

<b>4</b>	<b>CONDUCTION BI-DIMENSIONNELLE EN REGIME PERMANANT .....</b>	<b>67</b>
4.1	Résolution analytique par la séparation des variables.....	67
4.2	Résolution numérique des problèmes directs.....	70
4.3	Algorithme pour la résolution des problèmes linéaires d'équilibre thermique....	76
<b>5</b>	<b>CONDUCTION EN REGIME DYNAMIQUE.....</b>	<b>79</b>
<b>5.1</b>	<b>Homogénéité spatiale de la température .....</b>	<b>79</b>
5.1.1	Chauffage instantané.....	79
5.1.2	Validité de l'hypothèse d'homogénéité.....	81
<b>5.2</b>	<b>Variation unidimensionnelle de la température .....</b>	<b>82</b>
5.2.1	Chauffage périodique d'un espace semi-infini .....	82
5.2.2	Chauffage instantané d'un espace semi-infini.....	86
<b>5.3</b>	<b>Application de la transformée de Laplace.....</b>	<b>90</b>
5.3.1	Transformée de Laplace .....	90
5.3.2	Homogénéité spatiale de la température.....	96
5.3.3	Chauffage instantané d'un espace semi-infini.....	97
<b>5.4</b>	<b>Résolution numérique des problèmes directs.....</b>	<b>98</b>
5.4.1	Système des équations différentielles – algébriques (DAE).....	98
5.4.2	Représentation d'état.....	101
5.4.3	Méthode explicite.....	102
5.4.4	Méthode implicite .....	103
<b>6</b>	<b>CONVECTION .....</b>	<b>104</b>
<b>6.1</b>	<b>Température caractéristique .....</b>	<b>105</b>
<b>6.2</b>	<b>Coefficient d'échange convectif .....</b>	<b>106</b>
6.2.1	Analyse dimensionnelle et similitude.....	107
6.2.2	Interprétation des nombres adimensionnels .....	108
<b>6.3</b>	<b>Convection forcée.....</b>	<b>109</b>
6.3.1	Convection forcée dans un tube .....	109
6.3.2	Convection forcée entre un fluide et une plaque .....	110
6.3.3	Propriétés des fluides .....	111
<b>6.4</b>	<b>Convection naturelle.....</b>	<b>112</b>
<b>7</b>	<b>RAYONNEMENT.....</b>	<b>115</b>
<b>7.1</b>	<b>Photométrie énergétique ; transmission de l'énergie .....</b>	<b>117</b>
7.1.1	Grandeurs spectrales et spatiales.....	117
7.1.2	Angle solide et l'aire vue.....	118
7.1.3	Flux rayonné.....	119
7.1.4	Emittance ou excitance d'une source.....	119
7.1.5	Intensité d'une source .....	119
7.1.6	Luminance d'une source .....	120
7.1.7	Loi de Lambert.....	121
7.1.8	Éclairement énergétique d'une surface réceptrice .....	123

7.1.9	Relation entre les grandeurs d'émission et celles de réception.....	123
<b>7.2</b>	<b>Émission et réception du corps noir .....</b>	<b>124</b>
7.2.1	Loi de Planck .....	124
7.2.2	Lois de Wien.....	126
7.2.3	Loi de Stefan-Boltzmann .....	127
7.2.4	Domaine utile du rayonnement.....	127
<b>7.3</b>	<b>Émission du corps gris.....</b>	<b>130</b>
<b>7.4</b>	<b>Réception du corps gris .....</b>	<b>133</b>
7.4.1	Réflexion .....	133
7.4.2	Absorption et transmission .....	133
7.4.2.1	Types de milieux .....	133
7.4.2.2	Absorption sélective.....	135
<b>7.5</b>	<b>Relation entre absorption et émission : loi de Kirchhoff .....</b>	<b>135</b>
<b>7.6</b>	<b>Effet de serre : conséquence pratique de la variation des propriétés radiatives en fonction de la longueur d'onde .....</b>	<b>136</b>
<b>7.7</b>	<b>Échanges radiatifs entre des surfaces séparées par un milieu transparent.....</b>	<b>138</b>
7.7.1	Échanges radiatifs entre surfaces noires .....	138
7.7.1.1	Facteurs de forme.....	138
7.7.1.2	Relations entre les facteurs de forme .....	139
7.7.1.3	Estimations des facteurs de forme.....	140
7.7.2	Échanges radiatifs dans une enceinte noire : flux net .....	154
7.7.3	Analogie électrique.....	156
<b>7.8</b>	<b>Échanges radiatifs entre surfaces grises opaques et diffusantes séparées par un milieu transparent.....</b>	<b>157</b>
7.8.1	Radiosité .....	157
7.8.2	Surface isotherme dans une enceinte fermée .....	159
7.8.3	Surface à flux net imposé dans une enceinte fermée .....	159
7.8.4	Analogie électrique.....	160
<b>8</b>	<b>ECHANGES COUPLEES .....</b>	<b>162</b>
<b>8.1</b>	<b>Modèle d'état.....</b>	<b>162</b>
<b>8.2</b>	<b>Linéarisation du rayonnement .....</b>	<b>168</b>
<b>9</b>	<b>EXERCICES .....</b>	<b>170</b>
<b>9.1</b>	<b>Mur soumis aux conditions limites de type Dirichelt .....</b>	<b>170</b>
<b>9.2</b>	<b>Mur en régime permanent avec création interne de chaleur .....</b>	<b>170</b>
<b>9.3</b>	<b>Mur en régime permanent avec conductivité variable.....</b>	<b>171</b>
<b>9.4</b>	<b>Mur soumis aux échanges superficiels.....</b>	<b>171</b>
<b>9.5</b>	<b>Mur multicouche en régime permanent .....</b>	<b>171</b>
<b>9.6</b>	<b>Etude en régime permanent d'un chauffage électrique par plancher .....</b>	<b>172</b>

---

<b>9.7</b>	<b>Isolation thermique des tubes cylindriques.....</b>	<b>173</b>
<b>9.8</b>	<b>Création de chaleur en coordonnées cylindriques .....</b>	<b>174</b>
<b>9.9</b>	<b>Trempe d'une bille métallique (régime dynamique) .....</b>	<b>174</b>
<b>9.10</b>	<b>Oscillation thermique dans le sol.....</b>	<b>175</b>
<b>9.11</b>	<b>Estimation des coefficients d'échange superficiel .....</b>	<b>175</b>
<b>9.12</b>	<b>Ailette de refroidissement .....</b>	<b>177</b>
<b>9.13</b>	<b>Le doigt de gant.....</b>	<b>178</b>
<b>9.14</b>	<b>Eclairage à la surface de la terre .....</b>	<b>179</b>
<b>9.15</b>	<b>Rayonnement d'un disque .....</b>	<b>179</b>
<b>9.16</b>	<b>Effet de serre .....</b>	<b>179</b>
<b>9.17</b>	<b>Facteur de forme.....</b>	<b>181</b>
<b>9.18</b>	<b>Echanges radiatifs dans un local de forme cubique .....</b>	<b>182</b>
<b>9.19</b>	<b>Estimation de la température de la voûte céleste .....</b>	<b>183</b>
<b>9.20</b>	<b>Echanges radiatifs entre surfaces noires et grises .....</b>	<b>184</b>
<b>10</b>	<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>186</b>

## Notations et symboles

<i>Symbole</i>	<i>Signification(s)</i>	<i>Unité de mesure</i>
$c$	- chaleur massique	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}$
	- vitesse de la lumière, la célérité	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$h$	- coefficient global d'échange surfacique	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
$h_c$	- coefficient d'échange convectif	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
$h_r$	- coefficient de transfert par rayonnement	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
$m$	- masse	kg
$p$	- taux de production d'énergie par unité de volume	$\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$
$q$	- flux	W
$r$	- rayon	m
$s$	- abscisse curviligne sur la ligne de courant	m
	- variable de Laplace, $s = \sigma + j\omega$	$\text{s}^{-1}$
$t$	- temps	s
$v$	- vitesse	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
$A$	- surface	$\text{m}^2$
$E$	- énergie	J
	- éclairement	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
$F$	- facteur de forme	-
$H$	- enthalpie	J
$I$	- intensité d'une source	$\text{W} \cdot \text{sr}^{-1}$
$J$	- radiosité	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
$L$	- luminance	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
$M$	- émittance ou excitance	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
$Q$	- quantité de chaleur	J
$R$	- résistance thermique	$\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$
$S$	- surface	$\text{m}^2$
$T$	- température	K ; °C
$U$	- coefficient global de transfert de chaleur	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
$V$	- volume	$\text{m}^3$

---

**Symboles grecs**


---

$\alpha$	- coefficient d'absorption	-
	- diffusivité thermique	$\text{m}^2 / \text{s}$
$\varepsilon$	- emmissivité	-
$\varphi$	- densité de flux thermique <i>ou</i> flux thermique par unité de surface	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
$\lambda$	- conductivité thermique	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
	- longueur d'onde	m
$\nu$	- fréquence	$\text{s}^{-1}$ ; Hz
$\rho$	- masse volumique	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
	- coefficient de réflexion	-
$\sigma$	- constante de Stefan-Boltzmann	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
$\theta$	- température	K ; °C
	- angle	rad
$\tau$	- coefficient de transmission	-
$\Delta$	- différence	
$\Phi$	- flux émis ou reçu par rayonnement	W
$\Omega$	- angle solide	sr

**Conventions pour les notations**


---

$a, \dots, z$	- variables
$\mathbf{a}, \dots, \mathbf{z}$	- vecteurs
$\mathbf{A}, \dots, \mathbf{Z}$	- matrices
$[\ ]^T$	- transposée d'un vecteur ou d'une matrice



# 1 Introduction

Le *transfert de chaleur* est la transmission de l'énergie thermique due à une différence spatiale de température. Conformément au premier principe de la thermodynamique, l'énergie se conserve dans le processus de transfert de chaleur. Conformément au deuxième principe de la thermodynamique, le transfert thermique s'est produit du corps ou partie du corps plus chaud vers le corps ou partie plus froid jusque quand les températures deviennent égales.

Dans les domaines de température et de dimensions spatiales spécifiques pour la thermique du bâtiment, on distingue trois modes classiques de transmission qui mettent en jeu la *variation de la température*, ou de la *chaleur sensible* : la conduction, la convection et le rayonnement (Figure 1.1). La *conduction* est le mode de transfert par *diffusion* à l'intérieur d'un corps ou entre des corps en contact sans déplacement appréciable de ses molécules. La *convection* est le transfert de chaleur par *diffusion convective* des molécules en mouvement au sein d'une masse fluide (gaz ou liquide). Le *rayonnement* est le transfert de chaleur par *ondes électromagnétiques* entre des surfaces sans contact entre eux.

La *chaleur latente* est mise en jeu lors des *changements de phase* d'un corps. Dans le bâtiment, c'est typiquement le cas de l'eau et de sa vapeur. Les différents modes de transfert de chaleur peuvent se produire simultanément.

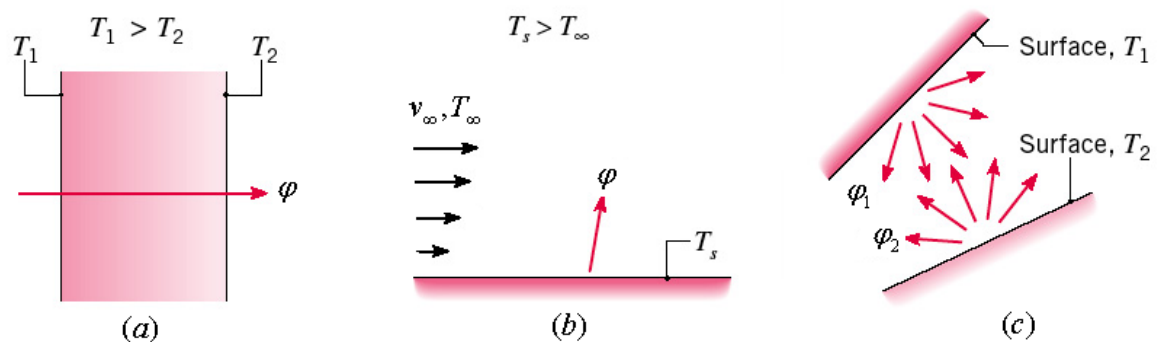


Figure 1.1 Les trois modes de transfert de chaleur : a) *conduction* à travers un corps solide ou un fluide sans mouvement ; b) *convection* dans un fluide en mouvement ; c) *rayonnement* entre deux surfaces sans contact (adaptée d'après Incropera et al., 2007).

Le transfert de chaleur fait partie du groupe de *phénomènes de transfert ou de transport* qui inclut le transfert de masse, le transfert de quantité de mouvement et la conduction électrique. Les phénomènes de transfert sont décrits par des équations avec une forme similaire (Figure 1.2). L'espace est caractérisé dans chaque point par une grandeur nommée potentiel,  $u$ . Certains points de l'espace sont connectés entre eux. La différence de potentiel entre les points qui sont reliés,  $e$ , génère un flux,  $w$ , décrit par une loi physique spécifique (par exemple la loi de Fourier pour le transfert thermique, la loi de Fick pour le transfert de masse par diffusion, la loi d'Ohm pour la conduction électrique). Dans chaque point, le bilan des flux générés par les différences de potentiel,  $w$ , et des flux externes,  $f$ , doit être nul. Dans le transfert de chaleur, *le potentiel est la température et le flux est le flux de chaleur*. Le transfert de chaleur, de masse et de quantité de mouvement sont souvent traités ensemble dû à leur similarité et interconnexions. La similarité des équations permet d'utiliser l'analogie électrique dans l'étude de ces phénomènes. Ce cours présente les principes de base

du transfert de chaleur monophasique avec l'accent sur les applications dans le domaine du bâtiment.

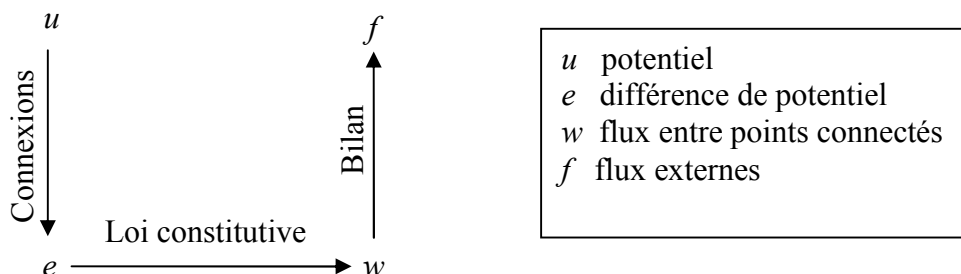


Figure 1.2 Principe de la modélisation des phénomènes de transfert

## 1.1 Bilan d'énergie thermique

Le **premier principe de la thermodynamique** stipule que l'énergie totale d'un système fermé se conserve lors de toute transformation. La variation de l'énergie totale d'un système est due aux échanges avec le milieu extérieur. L'énergie totale consiste de l'énergie mécanique (cinétique et potentielle) et de l'énergie interne (thermique, chimique, nucléaire).

Le premier principe peut s'appliquer aussi à un **volume de contrôle** (système ouvert) qui représente une région de l'espace délimité par une *surface de contrôle*. La masse qui entre et qui sort de ce volume transporte de l'énergie par *advection*. Le volume de contrôle peut être *fini*, en résultant une expression caractérisant tout le volume, ou *différentiel* (*infinitésimal petit*), en résultant une équation différentielle caractérisant chaque point de l'espace.

L'étude des phénomènes de transfert de chaleur se concentre sur l'énergie thermique et mécanique. Leur somme ne se conserve pas parce qu'il y a des conversions entre l'énergie thermique et les autres formes d'énergie. On peut considérer que la conservation de l'énergie totale a comme résultat la *génération d'énergie thermique*. Dans ce cas, le premier principe de la thermodynamique s'exprime comme le bilan d'énergie pour un intervalle de temps  $\Delta t$  :

$$\Delta E_{st} = E_e - E_s + E_g \quad (1.1)$$

où

$\Delta E_{st}$  est la variation de l'énergie thermique et mécanique stockée, [J] ;

$E_e$  - énergie thermique et mécanique qui entre, [J] ;

$E_s$  - énergie thermique et mécanique qui sort, [J] ;

$E_g$  - énergie thermique et mécanique générée, [J].

L'équation de bilan (1.1) peut être écrite pour un instant de temps en exprimant *le bilan des flux* dans un volume de contrôle (Figure 1.3) :

$$\dot{E}_{st} \equiv \frac{d E_{st}}{d t} = \dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g \quad (1.2)$$

où

$\dot{E}_{st} \equiv d E_{st} / d t$  est le taux de variation de l'énergie thermique et mécanique stockée au moment  $t$ , [W] ;

$\dot{E}_e$  - flux d'énergie thermique et mécanique qui entre, [W] ;

$\dot{E}_s$  - flux d'énergie thermique et mécanique qui sort, [W] ;

$\dot{E}_g$  - taux de variation de l'énergie thermique et mécanique générée, [W].

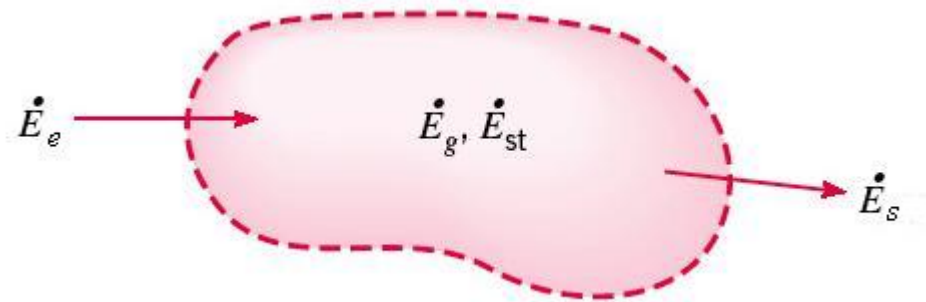


Figure 1.3 Conservation de l'énergie pour un volume de contrôle (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

L'application du premier principe de la thermodynamique doit commencer avec la définition du volume de contrôle pour lequel on fait le bilan d'énergie et de sa surface de contrôle à travers laquelle se fait le transfert d'énergie. En suite, on doit décider si l'analyse est faite pour un intervalle de temps  $\Delta t$  (bilan d'énergie) ou pour un instant  $t$  (bilan de flux). Puis, on identifie les termes énergétiques  $E_e$ ,  $E_s$ ,  $E_g$  ou les flux  $\dot{E}_e$ ,  $\dot{E}_s$ ,  $\dot{E}_g$  qui intervient.

L'énergie stockée dans le volume consiste de l'énergie mécanique (cinétique et potentielle) et de l'énergie interne. Dans les problèmes de transfert de chaleur, fréquemment la variation de l'énergie mécanique est faible et on la néglige. L'énergie interne consiste de la *chaleur sensible*,  $Q$  [J], qui change l'agitation moléculaire et de la *chaleur latente* qui changes la phase entre les états solide, liquide et gazeuse. La quantité de chaleur sensible,  $Q$ , échangée par un corps qui passe d'une température  $T_1$  à une température  $T_2$  est :

$$Q = mc(T_2 - T_1) \quad (1.3)$$

où  $m$  [kg],  $m = \rho V$ , est la masse du corps,  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] est la masse volumique,  $V$  [m<sup>3</sup>] est le volume et  $c$  [J/(kg·K)] est la *chaleur massique du corps*. La masse volumique et la chaleur spécifique sont des propriétés spécifiques du matériau (Tableau 1.1).

L'énergie générée est le résultat du *phénomène volumique* de conversion d'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, électromagnétique, nucléaire) en énergie thermique. Les effets chimiques, électriques ou nucléaires sont traités comme des *sources* ou des *puits* d'énergie thermique.

L'énergie qui entre et qui sort représente des phénomènes de *surface* exprimés sur la surface de contrôle. Dans le cas où la surface de contrôle est traversée par des débits massiques, les termes  $E_e$ ,  $E_s$  ou  $\dot{E}_e$ ,  $\dot{E}_s$  contient aussi l'énergie transportée par *advection*.

Le premier principe peut s'appliquer aussi à une **surface de contrôle**. Dans ce cas spécial, les surfaces de contrôle sont de chaque côté d'une surface physique et ne contiennent pas de masse ou de volume (Figure 1.4). Dans ce cas, le bilan d'énergie (ou des flux d'énergie) est :

$$E_e - E_s = 0 \text{ ou } \dot{E}_e - \dot{E}_s = 0 \quad (1.4)$$

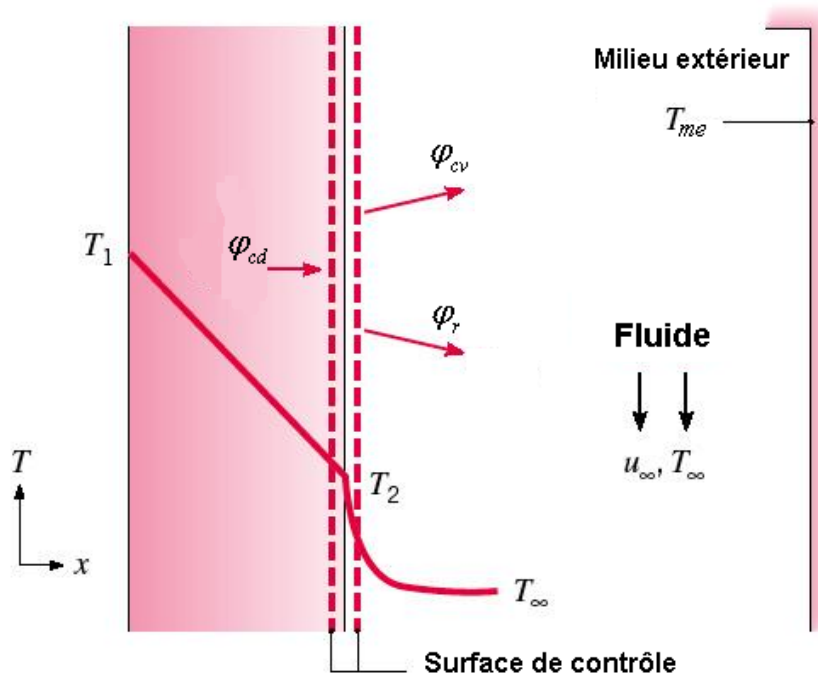


Figure 1.4 Le bilan d'énergie pour une surface de contrôle (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

Même s'il y a des sources d'énergie dans le volume, elles n'affectent pas le bilan sur la surface. Cette équation est valable pour le régime stationnaire et dynamique.

Les termes d'énergie entrante et sortante incluent le transfert de chaleur (conductif, convectif ou radiatif) et travail à la frontière du domaine (par exemple le déplacement de la frontière, les effets électromagnétiques, etc.). Si on considère que la forme prédominante d'énergie qui traverse la surface est de nature thermique,  $Q$  [J], alors :

$$E_e = Q_e; E_s = Q_s \quad (1.5)$$

et les flux d'énergie devient des *flux de chaleur*,  $\Phi$  [W] :

$$\dot{E}_e = \dot{Q}_e \equiv \Phi_e; \dot{E}_s = \dot{Q}_s \equiv \Phi_s \quad (1.6)$$

Les flux de chaleur traversant la surface peuvent être exprimés relatif à l'unité de surface sous la forme de *densité de flux*,  $\varphi$  [W/m<sup>2</sup>] :

$$\varphi \equiv \frac{d\Phi}{dS} \quad (1.7)$$

## 1.2 Lois constitutives

Une loi de la conduction est une équation spécifique pour un matériau ou phénomène qui relie la densité de flux thermique à la différence de température. Les lois constitutives ne sont pas obtenues directement de lois physiques fondamentales mais elles sont dérivées des études phénoménologiques qui font appel à la mesure expérimentale des paramètres<sup>1</sup>. Les lois de la conduction sont utilisées avec les lois fondamentales pour résoudre les problèmes physiques.

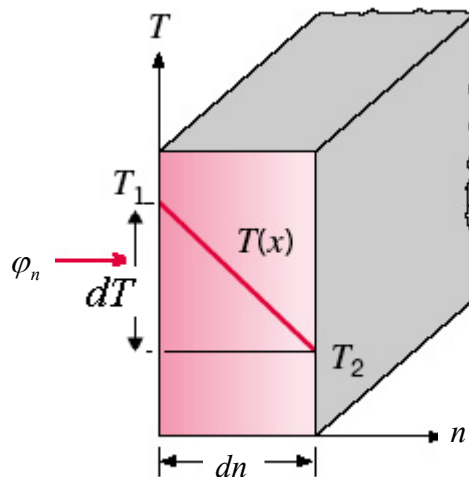


Figure 1.5 Transfert monodimensionnelle de chaleur par conduction (diffusion thermique)  
(adaptée d'après Incropera et al., 2007)

<sup>1</sup> En physique, une relation s'obtient à partir de lois fondamentales si sa déduction ne fait pas appel à une détermination empirique des paramètres du model.

La **conduction** thermique est la *diffusion* de la chaleur sans qu'il y ait un mouvement du milieu ou que ce mouvement intervienne dans la transmission. Ce mode de transmission a lieu dans les solides ou entre les corps solides en contact. La conduction intervient aussi dans les liquides et les gaz, mais son effet est négligeable par rapport à celui de la convection, à l'exception des liquides très visqueux ou des gaz enfermés dans les pores des matériaux.

La loi constitutive de la conduction est la *loi de Fourier* qui relie en chaque point la *densité de flux thermique*,  $\varphi$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ], et le *gradient de température*,  $dT/dn$ . Dans le cas unidimensionnel, stationnaire, la densité de flux dans la direction  $n$ ,  $\varphi_n$ , est (Figure 1.5) :

$$\varphi_n = -\lambda \frac{dT}{dn} \quad (1.8)$$

La *conductivité thermique*,  $\lambda$  [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ], est une propriété du matériel qui caractérise le phénomène de *transport de chaleur par diffusion* (Tableau 1.1).

Tableau 1.1 Valeurs typiques des propriétés des matériaux (Lefebvre, 1994)

Matériau	Masse volumique, $\rho$ [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ]	Capacité thermique massique, $c$ [ $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ]	Conductivité thermique, $\lambda$ [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ]
Isolants	50 à 200	700	0.004
Bois	500	1250	0.2
Verre	1000	1000	1.2
Béton	1000 à 2000	1000	1.7
Pierre	2000	1000	2.0

La **convection** est un mode de transfert de chaleur formée de deux mécanismes : *diffusion* thermique, c. à d. l'agitation aléatoire des molécules, et *mouvement* macroscopique du fluide, c. à d. le déplacement collective d'un nombre important de molécules. Comme les molécules du volume qui se déplace gardent leur agitation moléculaire, le transfert de chaleur est une superposition du transport rendu par l'agitation moléculaire et par le déplacement de fluide. Le terme *convection* est utilisée pour décrire ce type de transport combiné (Figure 1.6 a) ; le terme *advection* décrit le transport dû au déplacement du fluide provoqué par un gradient de pression imposé (Figure 1.6 b). Pour un fluide de débit massique  $\dot{m}$  en écoulement dans un tuyau, pour le volume de contrôle de la Figure 1.6 (b), le bilan de flux,

$$\dot{m} c_p \theta_e - \dot{m} c_p \theta_s - q = 0 \quad (1.9)$$

met en évidence le flux qui entre par advection,  $\dot{m} c_p \theta_e$ , le flux qui sort par advection,  $\dot{m} c_p \theta_s$ , et le flux perdu par la surface latérale du volume de contrôle,  $q$ ,

$$q = \dot{m} c_p (\theta_e - \theta_s) \quad (1.10)$$

ou, en tenant compte que  $\dot{m} = \rho S v$ , où  $v$  est la vitesse du fluide,

$$q = \rho S v c_p (\theta_e - \theta_s) \quad (1.11)$$

où  $\theta_e$  et  $\theta_s$  sont les températures à l'entrée et à la sortie, respectivement, [°C]

$c_p$  - la chaleur massique (ou chaleur spécifique) à pression constante, [J/kg°C]

$\rho$  - la masse volumique, [kg/m<sup>3</sup>]

$S$  - la surface de la section de passage, [m<sup>2</sup>]

$v$  - la vitesse du fluide, [m/s].

Pour un volume de contrôle de longueur infinitésimale,  $dx$ , la variation de la température dans la direction  $x$  est :

$$\theta_e - \theta_s = \theta_x - \theta_{x+dx} = -d\theta \quad (1.12)$$

En divisant l'équation (1.11) par le volume  $S dx$  on obtient l'équation différentielle :

$$q = -\rho v c_p \frac{d\theta}{dx} \quad (1.13)$$

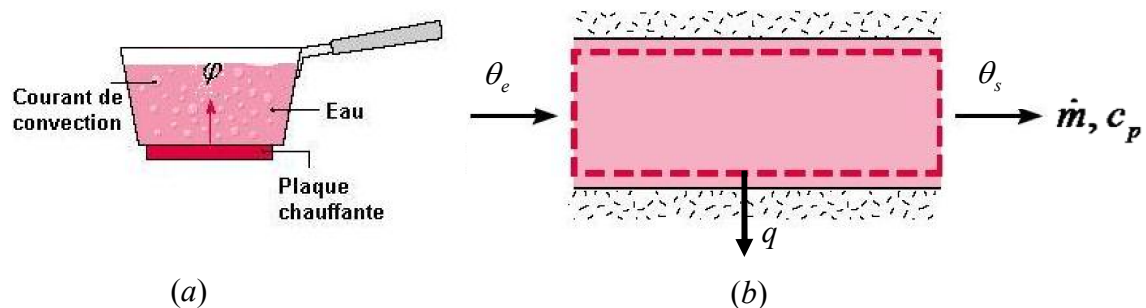


Figure 1.6 Transport d'énergie dans les fluides : a) convection ; b) advection (adaptée d'après Incropera et al., 2007).

D'un intérêt particulier est le transfert de *chaleur sensible* entre un fluide en mouvement et une surface limitrophe, quand les deux sont aux températures différentes. Dans la *convection forcée*, le mouvement du fluide est provoqué par un gradient de pression imposé (Figure 1.7 a). Dans la *convection naturelle*, le mouvement du fluide résulte uniquement des différences de masse volumiques causées par le gradient de température (force ascensionnelle ou poussée d'Archimède, Figure 1.7 b). La *convection mixte* est le résultat de ces deux phénomènes combinés.

En plus du transfert de chaleur sensible, la convection peut transférer de la *chaleur latente* par *ébullition* et par *condensation* (Figure 1.8).

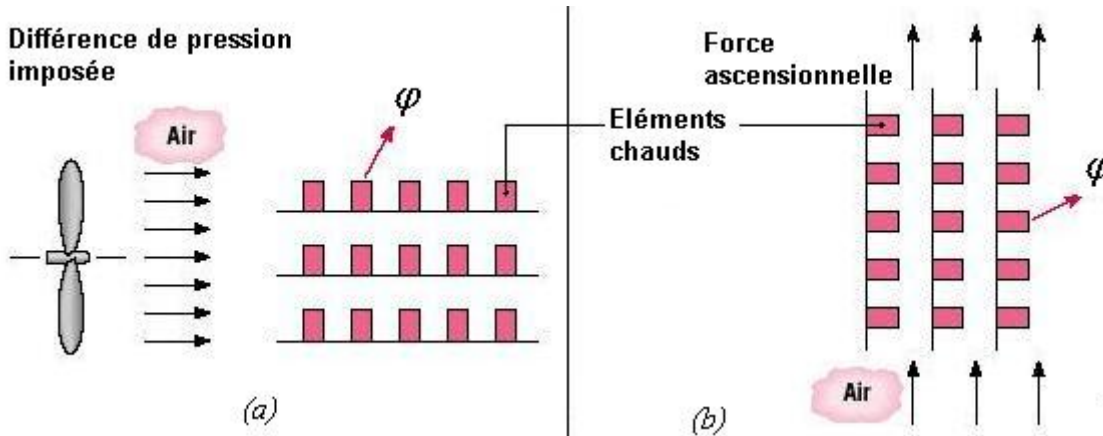


Figure 1.7 Transfert de chaleur sensible par convection entre un fluide et une surface : a) convection forcée ; b) convection naturelle (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

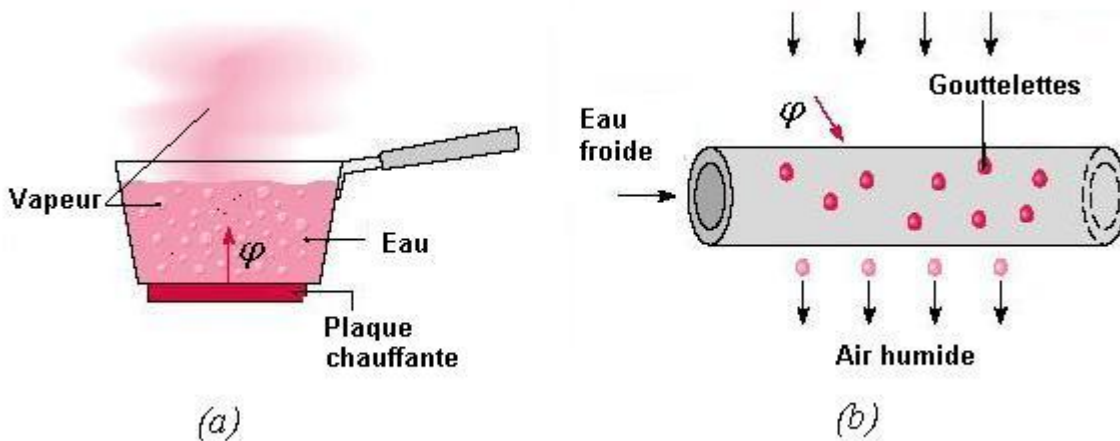


Figure 1.8 Transfert de chaleur latente par convection : a) ébullition ; b) condensation (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

La loi constitutive de la convection est la *loi de Newton* qui relie la *densité de flux thermique* échangé entre la surface du solide et le fluide,  $\varphi$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ], et l'écart de température entre la surface du solide,  $T_S$ , et la température moyenne (au loin) du fluide,  $T_\infty$  :

$$\varphi = h_c (T_S - T_\infty) \quad (1.14)$$



Le paramètre  $h_c$  [ $\text{W}/\text{m}^2\text{K}$ ], nommé *coefficient d'échange convectif*, dépend des conditions dans la couche limite (

Tableau 1.2).

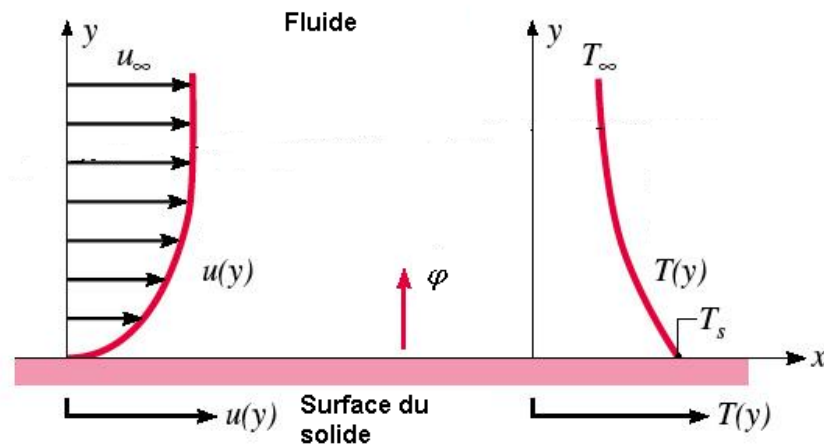


Figure 1.9 Transfert par convection (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

Tableau 1.2 Valeurs typiques du coefficient d'échange convectif (Incropera et al. 2007)

Type de convection	Coefficient d'échange convectif, $h_c$ [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ]
<i>Convection naturelle</i>	
Gaz	2 à 25
Liquides	50 à 1000
<i>Convection forcée</i>	
Gaz	25 à 250
Liquides	100 à 20000
<i>Convection avec changement de phase</i>	2500 à 100000

La chaleur peut être transportée par **advection** qui implique le déplacement de la matière (Figure 1.6 b) ; c'est le cas, par exemple, des systèmes de chauffage à l'eau. Pour le volume de contrôle de la Figure 1.6 (b) le bilan de flux,

$$\dot{m} c_p \theta_e - \dot{m} c_p \theta_s - q = 0 \quad (1.15)$$

met en évidence le flux qui entre par advection,  $\dot{m} c_p \theta_e$ , le flux qui sort par advection,  $\dot{m} c_p \theta_s$ , et le flux perdu par la surface latérale du volume de contrôle,  $q$ ,

$$q = \dot{m} c_p (\theta_e - \theta_s) \quad (1.16)$$

ou, en tenant compte que  $\dot{m} = \rho S v$ , où  $v$  est la vitesse du fluide,

$$q = \rho S v c_p (\theta_e - \theta_s) \quad (1.17)$$

Pour un volume de contrôle de longueur infinitésimale,  $dx$ , la variation de la température dans la direction  $x$  est :

$$\theta_e - \theta_s = \theta_x - \theta_{x+dx} = -d\theta \quad (1.18)$$

En divisant l'équation (1.17) par le volume  $S dx$  on obtient l'équation différentielle :

$$q = -\rho v c_p \frac{d\theta}{dx} \quad (1.19)$$

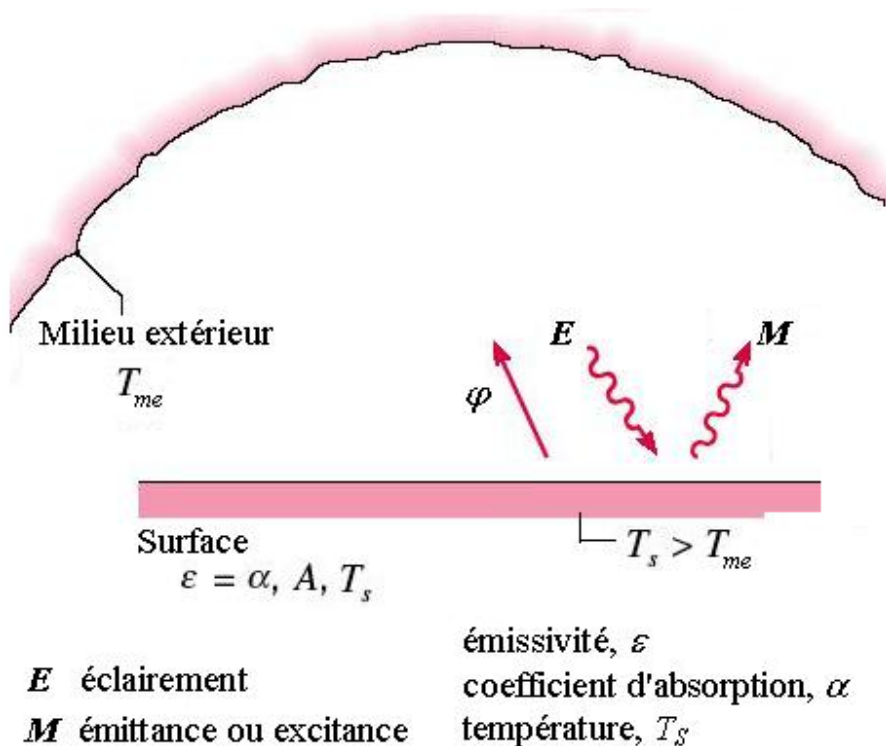


Figure 1.10 Transfert par rayonnement entre surfaces (adaptée d'après Incropera et al., 2007).

Le **rayonnement** est le mode de transfert thermique par des *ondes électromagnétiques* émises par tout corps ayant une température différente de 0 K et qui se propagent en ligne

droite sans aucun support de matière. La densité de flux thermique émis par une surface, l'*émittance* ou l'*excitance*  $M$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ], dépend de sa température,  $T_s$  (Figure 1.10 a). Sa valeur maximale,  $M^\circ$ , correspondant à un corps noir, est donnée par la loi de *Stefan-Boltzmann* :

$$M^\circ = \sigma T_s^4 \quad (1.20)$$

où  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4$  est la *constante de Stefan-Boltzmann*. L'émittance d'un corps réel est inférieure à celle d'un corps noir à la même température,

$$\varphi_{em} \equiv M = \varepsilon \sigma T_s^4 \quad (1.21)$$

où l'*émissivité*,  $\varepsilon$ ,  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , est une propriété caractéristique de la surface (Tableau 1.3).

Tableau 1.3 Valeurs typiques de l'émissivité

Matériau	Emissivité, $\varepsilon$
Aluminium	0.06
Zinc galvanisé	0.20 – 0.30
Bois	0.75 – 0.95
Brique ordinaire	0.93

L'*éclairage* d'une surface,  $E$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ], est la densité de flux thermique reçu par rayonnement (Figure 1.10 a). Une fraction ou toute cette énergie peut être absorbée par la surface en augmentant la température du corps,

$$\varphi_{abs} = \alpha E \quad (1.22)$$

où le *coefficient d'absorption*  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , est une propriété caractéristique de la surface. Si la surface est considérée *grise*, alors  $\alpha = \varepsilon$ .

Une situation spéciale est le transfert par rayonnement entre une surface de température  $T_s$  et son milieu extérieur isotherme de température  $T_{me}$ , qui l'entoure complètement (Figure 1.10 b). Dans ce cas, l'éclairage peut être considéré

$$E = \sigma T_{me}^4 \quad (1.23)$$

Le flux radiatif net émis par la surface,  $\varphi$ , est la différence entre le flux radiatif émis par la surface et le flux absorbé par la surface :

$$\varphi = \varphi_{em} - \varphi_{abs} = \varepsilon M^\circ - \alpha E = \varepsilon \sigma (T_S^4 - T_{me}^4) \quad (1.24)$$

L'équation (1.24) est non-linéaire. Il est convenable de l'exprimer sous une forme linéaire,

$$\varphi = h_r (T_S - T_{me}) \quad (1.25)$$

similaire à l'équation de la convection (1.14) où le *coefficient de transfert par rayonnement* est :

$$h_r \equiv \varepsilon \sigma (T_S + T_{me})(T_S^2 + T_{me}^2) \quad (1.26)$$

Notons que le coefficient de transfert par rayonnement,  $h_r$ , dépend fortement de la température alors que, généralement, le coefficient de transfert convective,  $h_c$ , dépend peu de la température. Lorsque les températures  $T_S$  et  $T_{me}$  sont voisines, la forme linéaire de l'équation (1.24) peut être obtenue en développant la fonction  $T_S^4$  en série de Taylor autour de la valeur constante  $T_{me}$  et en gardant le premier terme de la série :

$$T_S^4 \Big|_{T_S \approx T_{me}} = T_{me}^4 + 4T_{me}^3 (T_S - T_{me}) \quad (1.27)$$

ou,

$$T_S^4 - T_{me}^4 = 4T_{me}^3 (T_S - T_{me}) \quad (1.28)$$

On obtient le coefficient de transfert par rayonnement :

$$h_r = 4\varepsilon \sigma T_{me}^3 \quad (1.29)$$

qui est indépendant de  $T_S$ .

Une surface peut transférer simultanément de la chaleur par convection et par rayonnement. La *densité de flux émis* par la surface est la somme des flux convectifs et radiatifs :

$$\varphi = \varphi_{cv} + \varphi_r = h_c (T_S - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T_S^4 - T_{me}^4) \quad (1.30)$$

Si la température du fluide,  $T_\infty$ , et du milieu extérieure,  $T_{me}$ , sont égales et voisines à la température de la surface,  $T_S$ , l'équation (1.30) devient :

$$\varphi = h(T_S - T_{me}) \quad (1.31)$$

où le *coefficient globale d'échange*  $h$  est :

$$h = h_c + h_r \quad (1.32)$$

avec  $h_r$  donné par les équations (1.26) ou (1.29).

Tableau 1.4 Lois constitutives du transfert de chaleur

<b>Mode</b>	<b>Mécanisme</b>	<b>Loi</b>	<b>Coefficient caractéristique</b>
Conduction	Diffusion	Fourier $\varphi_n = -\lambda \frac{dT}{dx}$	Conductivité thermique $\lambda$ [W/m · K]
Convection	Diffusion et transport de masse	Newton $\varphi = h_c (T_S - T_\infty)$	Coefficient d'échange convectif $h_c$ [W/m <sup>2</sup> · K]
Rayonnement	Ondes électromagnétiques	Dérivée de Stefan-Boltzmann $\varphi = \varepsilon \sigma (T_S^4 - T_{me}^4)$ $\varphi = h_r (T_S - T_{me})$	Emissivité $\varepsilon$ [-] Coefficient d'échange radiatif $h_r$ [W/m <sup>2</sup> · K]
Advection	Transport de masse	$\dot{Q} = \dot{m} c_p (T_o - T_i)$	$\dot{m} c_p$



## 2 Conduction – notions générales

Le transfert de chaleur par conduction se fait par la *diffusion*, dans la direction du gradient de température, de l'énergie d'agitation moléculaire d'une particule à l'autre mais sans déplacement macroscopique. C'est le phénomène de transfert d'énergie dans un milieu solide homogène, mais qui a lieu aussi dans les fluides immobiles, soumis à une différence de température. La conduction est le mode privilégié rencontré dans les parois du bâtiment et dans le sol.

Le *problème direct (simulation)* dans le transfert de chaleur par conduction est de trouver la distribution spatiale de la température pour un domaine avec des caractéristiques données (conductivité thermique, distribution des sources internes) qui résulte de conditions imposées aux limites du domaine. Quand la distribution de la température est connue, le flux de chaleur dans le domaine et à travers la frontière du domaine peut être obtenu en appliquant la loi de Fourier. Les *problèmes inverses* sont ceux d'*identification des paramètres* (trouver les valeurs caractéristiques du domaine quand on connaît les conditions aux limites et la distribution de la température) et de *contrôle* (trouver les conditions aux limites nécessaires pour obtenir une distribution de température imposée dans un domaine de caractéristiques connues, Tableau 2.1).

Tableau 2.1 Types de problèmes dans la conduction de la chaleur

Problème	Conditions aux limites	Caractéristiques du volume	Distribution de la température
<b>Direct</b>			
Simulation	Données	Données	Demandée
<b>Inverse</b>			
Identification	Données	Demandées	Données
Contrôle	Demandées	Données	Donnée

### 2.1 Loi constitutive : loi de Fourier

La loi constitutive de la conduction, la *loi de Fourier*, qui relie la densité de flux,  $\varphi$ , à la différence de température, est une loi *phénoménologique*, c. à d. obtenue par l'expérience et non par une déduction à partir de principes fondamentaux. On constate expérimentalement que, *en régime stationnaire*, pour une barre de longueur  $\Delta x$  et de section transversale  $A$ , le flux de chaleur,  $q$  [W], est proportionnel à la différence de température entre les deux côtés de la barre et la section transversale et il est inverse proportionnel à la longueur. Le flux dépend aussi de matériel, caractérisé par sa *conductivité thermique*  $\lambda$  [W/m·K], qui est une *propriété de matériel* mesurée expérimentalement et qui ne peut pas être obtenue à partir des lois fondamentales. On obtient le flux thermique  $q_x$  [W] :

$$q_x = -\lambda A \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

ou la densité de flux thermique,  $\varphi \equiv \frac{q}{A}$  [W/m<sup>2</sup>],

$$\boldsymbol{\varphi} = -\lambda \frac{dT}{dx} \mathbf{x}. \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur unitaire le long de l'axe  $x$ . Le signe moins des équations (2.1) et (2.2) signifie que le transfert de chaleur a lieu de la température élevée vers la température basse. L'équation (2.2) indique que la densité de flux de chaleur est une grandeur vectorielle avec une direction toujours normale aux isothermes (Figure 2.1).

Considérons que la normale aux isothermes dans la direction de l'augmentation de la température est  $\mathbf{n}$  et que la densité de flux de chaleur est une variable vectorielle qui peut dépendre d'autre variable (le temps) ; l'équation (2.2) dévient *la loi de Fourier* :

$$\boldsymbol{\varphi} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \mathbf{n} \quad (2.3)$$

ou

$$\boldsymbol{\varphi} = -\lambda \mathbf{grad}T \quad (2.4)$$

Tableau 2.2 Gradient de température en différents types de systèmes de coordonnées

Type de système	Coordonnées	Gradient
Une seule dimension	$\mathbf{n}$	
Trois dimensions		
<i>Cartésiennes</i>	$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$	$\mathbf{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{x} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{y} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{z}$
<i>Cylindriques</i>	$\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{z}$	$\mathbf{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{z}$
<i>Sphériques</i>	$\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\omega}$	$\mathbf{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial r} \mathbf{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \omega} \boldsymbol{\omega}$

Le *gradient* de température dans la direction  $\mathbf{n}$ ,

$$\frac{\partial T}{\partial n} \mathbf{n} \equiv \mathbf{grad}T \equiv \nabla T \quad (2.5)$$



peut être exprimé dans ses composants en fonction du système de référence (Tableau 2.2). Notons que *le système cartésien est ortho-normal* alors que les systèmes cylindrique et sphérique n'en sont pas.

Dans le système cartésien, chaque composant de la densité de flux  $\boldsymbol{\varphi}$ , exprimé par la loi de Fourier, sera de la forme :

$$\boldsymbol{\varphi}_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{x} \quad (2.6)$$

Si le matériau est anisotrope, l'équation (2.4) dévient :

$$\boldsymbol{\varphi} = -\overline{\overline{\lambda}} \cdot \mathbf{grad} T \quad (2.7)$$

où  $\overline{\overline{\lambda}}$  représente un tenseur de second ordre :

$$\overline{\overline{\lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

et chaque composant de la densité de flux  $\boldsymbol{\varphi}$ , exprimé par la loi de Fourier, sera de la forme :

$$\varphi_x = -\left( \lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.9)$$

*La température est un scalaire* : chaque point est caractérisé par une seule valeur de température. Les points de l'espace qui ont la même température forment des *isothermes* (Figure 2.1).

*La densité de flux de chaleur est un vecteur* : dans chaque point la densité de flux a une *norme* (longueur ou module) et une *direction* (Figure 2.1). Les lignes de densité de flux constante sont perpendiculaires aux lignes de température constante (isothermes). Les lignes de densité de flux forment des *tubes de courant* dans lesquels le flux transporté est constant.

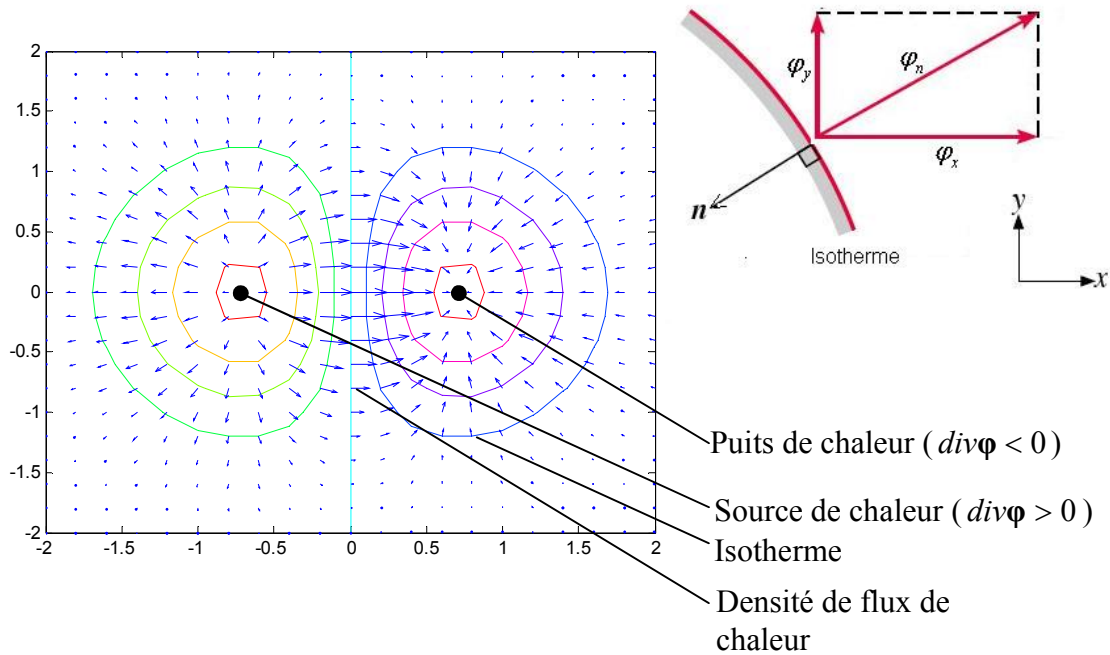


Figure 2.1 Contours de température et gradient de température

## 2.2 Equation générale de diffusion de la chaleur

L'équation de la chaleur permet de résoudre les problèmes (directs et inverses) de la conduction de la chaleur. Pour la déterminer, on applique la procédure indiquée dans la section 1.1 en effectuant le *bilan des flux* pour un *domaine de contrôle infinitésimal* à un instant de temps.

Les termes de l'équation (1.2) sont :

-  $\dot{E}_e$  flux entrant, [W] :  $\dot{E}_e = q_x + q_y + q_z$  ;

-  $\dot{E}_s$  flux sortant, [W] :  $\dot{E}_s = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}$ , où les valeurs des flux sortants s'obtient par développement en série de Taylor :

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz$$

-  $\dot{E}_g$  flux généré, [W] :  $\dot{E}_g = p \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ , où  $p$  est le *taux de production d'énergie par l'unité de volume*, [W/m<sup>3</sup>]. On rappelle que l'énergie générée,  $\dot{E}_g$ , représente la transformation d'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, nucléaire) en énergie thermique. La *chaleur*

*latente*, nécessaire pour la transformation de phase à température constante, peut être modélisée par ce terme.

-  $\dot{E}_{st}$  le taux de variation de l'énergie thermique représenté par la *chaleur sensible*,  $Q$  (v. équation (1.3)) stockée dans le volume  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ , [W]. En considérant que la masse volumique  $\rho$  et la capacité thermique massique  $c$  ne dépendent pas de temps,  $\dot{E}_{st} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx \cdot dy \cdot dz$ . La variation de la chaleur sensible  $\dot{E}_{st}$  a comme effet la modification de la température de la masse du volume  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  dans le temps.

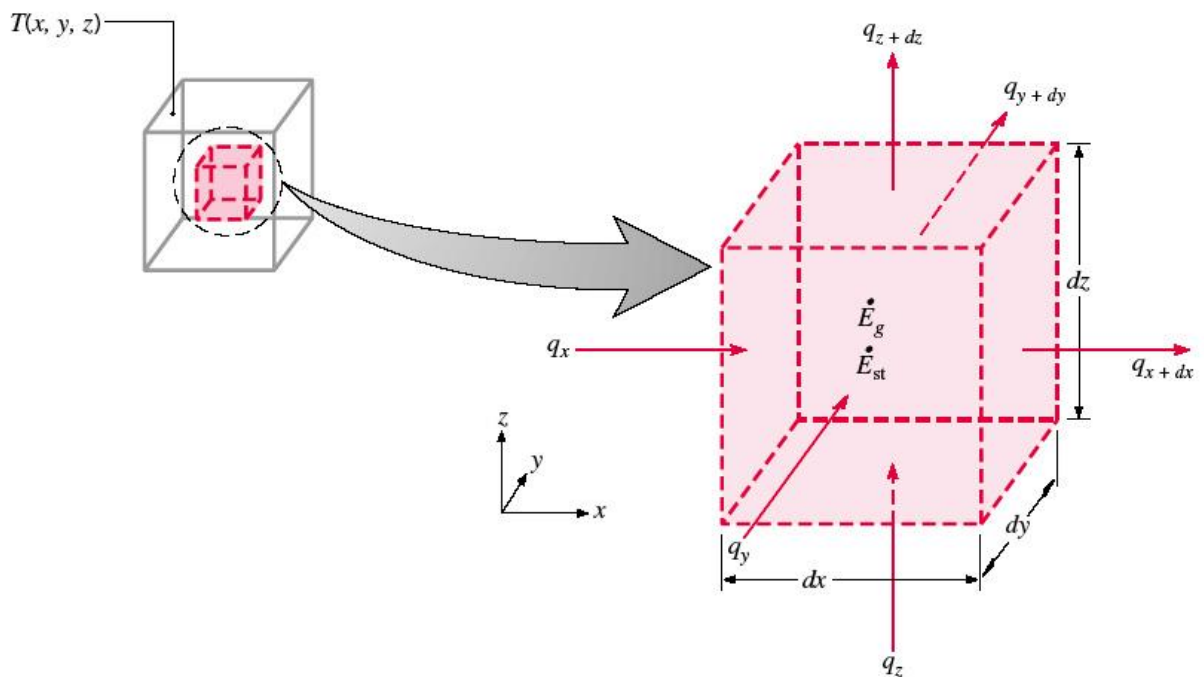


Figure 2.2 Volume de contrôle infinitésimal  $dx \cdot dy \cdot dz$  et les termes du bilan énergétique à un instant, en coordonnées cartésiennes (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

Avec ces termes, l'équation (1.2) dévient :

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + p dx dy dz = \rho c dx dy dz \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.10)$$

En divisant l'équation (2.10) par la *capacité thermique* (ou la *capacité calorifique*) du volume de contrôle,  $\rho c dx dy dz$ , on obtient :

$$-\frac{\partial \varphi_x}{\partial x \rho c} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial y \rho c} - \frac{\partial \varphi_z}{\partial z \rho c} + \frac{p}{\rho c} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.11)$$

où :

$$\varphi_x \equiv \frac{q_x}{dy dz} ; \varphi_y \equiv \frac{q_y}{dx dz} ; \varphi_z \equiv \frac{q_z}{dx dy} \quad (2.12)$$

On obtient l'équation de continuité :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\text{div}\boldsymbol{\varphi} + p \quad (2.13)$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \text{div}\left(\frac{\boldsymbol{\varphi}}{\rho c}\right) = \frac{p}{\rho c} \quad (2.14)$$

qui est la forme différentielle de l'équation (1.2), la loi fondamentale du *bilan des flux d'énergie*  $\dot{E}_{st} = \dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g$ . Dans l'équation (2.13),

$\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$  représente la chaleur sensible stockée dans le volume infinitésimal de contrôle,

$$\left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}_3} \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \frac{\text{K}}{\text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right] ;$$

$-\text{div}(\boldsymbol{\varphi})$  -la différence entre le flux entrant,  $\dot{E}_e = q_x + q_y + q_z$ , et le flux sortant,  $\dot{E}_s = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}$ , divisée par le volume de contrôle,  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ ,  $[\text{W}/\text{m}^3]$  ;

$p$  -le taux de production d'énergie par l'unité de volume,  $[\text{W}/\text{m}^3]$ .

En introduisant la loi empirique de Fourier, exprimée par l'équation (2.4), dans l'équation fondamentale de continuité, on obtient l'**équation générale de la diffusion de la chaleur**

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda \mathbf{grad}T) + p \quad (2.15)$$

ou

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + p \quad (2.16)$$

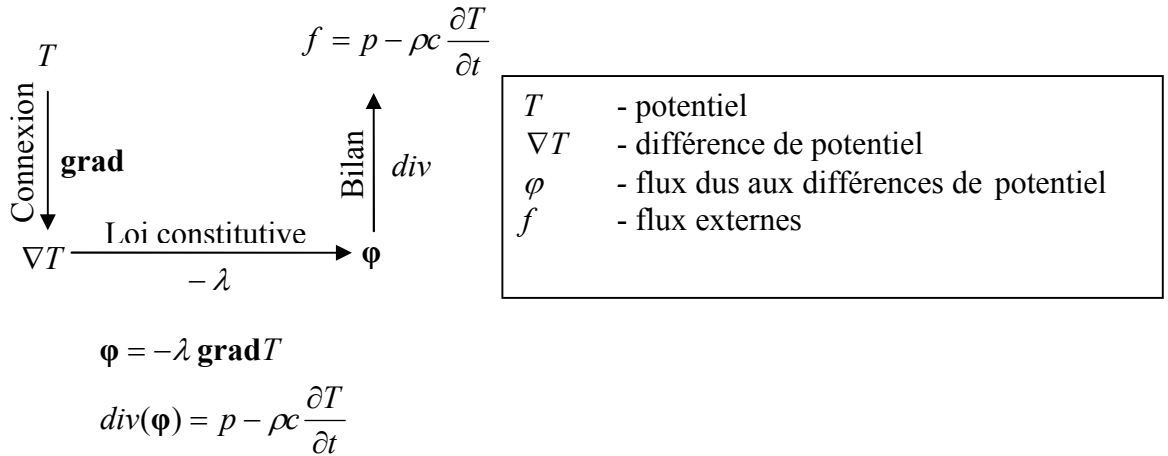


Figure 2.3 L'obtention de l'équation différentielle de la chaleur

Le raisonnement utilisé pour obtenir l'équation de la chaleur est montré dans la Figure 2.3. Il est obtenu en combinant le bilan d'énergie, représenté par l'équation de continuité (2.14), avec la relation entre le flux de chaleur et le gradient de température qui génère ce flux, représentée par la loi empirique de Fourier (2.4).

## 2.3 Formes particulières de l'équation de la chaleur

### 2.3.1 Système de coordonnées cartésien, cylindrique et sphérique

Dans un système de *coordonnées cartésiennes*, les équations (2.15) et (2.16) s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + p = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.17)$$

Dans un système de *coordonnées cylindriques* ou *sphériques*, en utilisant les formes de l'opérateur **grad** données dans le Tableau 2.2 et en effectuant le bilan d'énergie sur un volume infinitésimal formé par un secteur de cylindre (Figure 2.4) ou de sphère (Figure 2.5), on obtient l'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + p = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.18)$$

et sphériques :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + p = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.19)$$

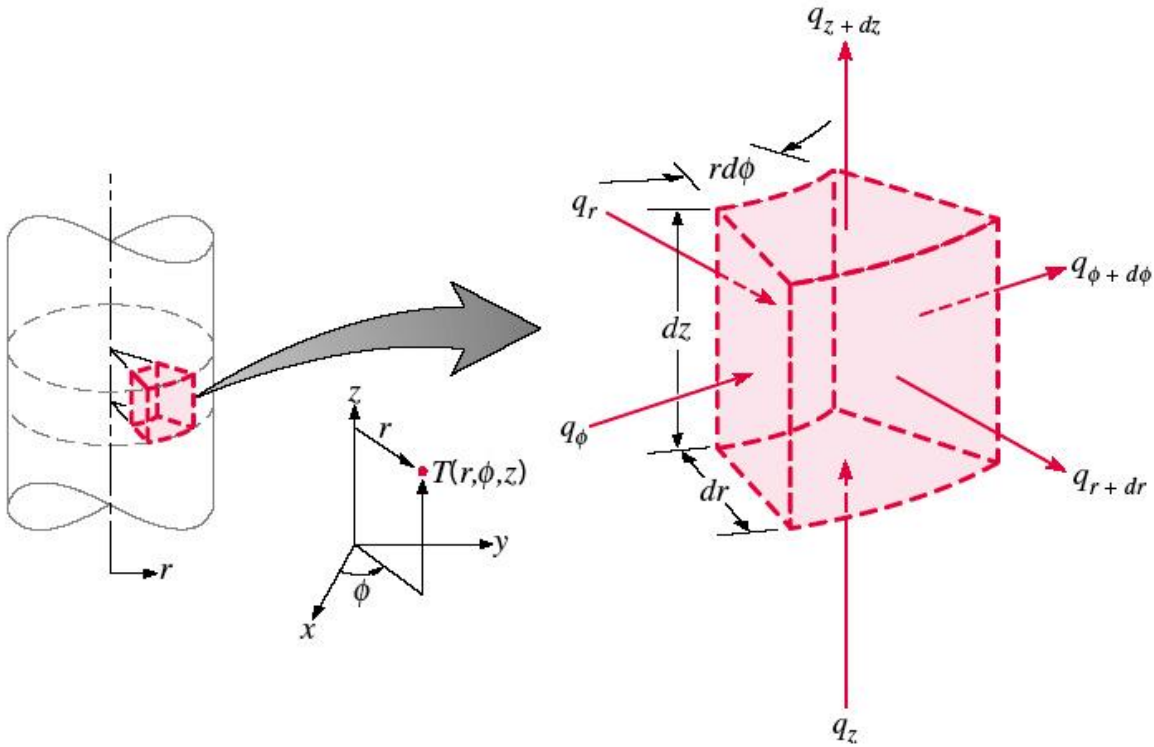


Figure 2.4 Volume de contrôle infinitésimal  $dr \cdot r d\phi \cdot dz$  et les termes du bilan énergétique à un instant en coordonnées cylindriques (Incropera et al., 2007)

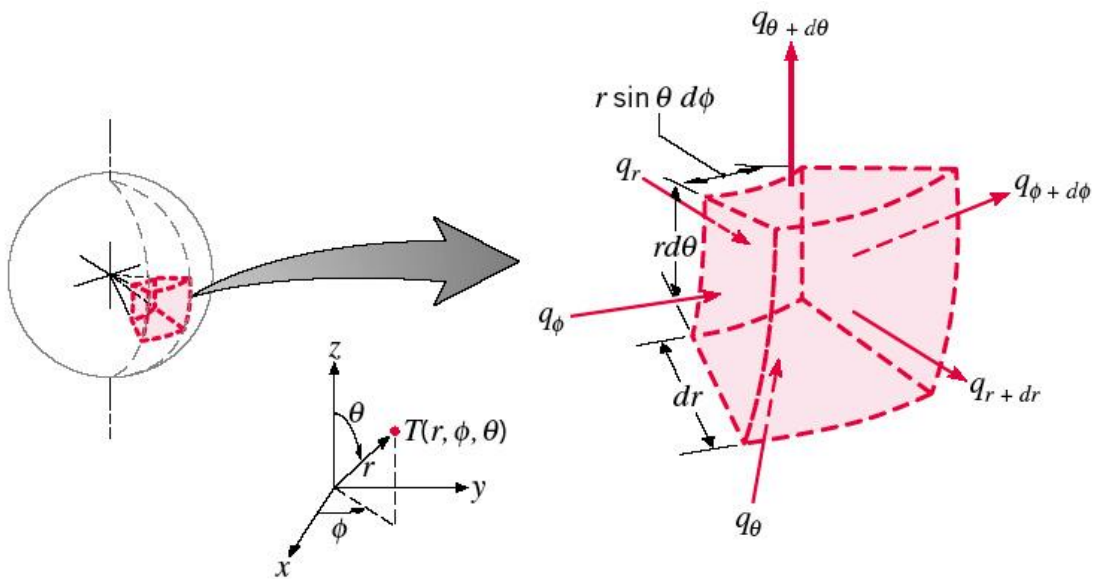


Figure 2.5 Volume de contrôle infinitésimal  $dr \cdot r \sin \theta d\phi \cdot r d\theta$  et les termes du bilan énergétique à un instant en coordonnées sphériques (Incropera et al., 2007)

### 2.3.2 Matériel homogène et isotrope de conductivité constante

Dans ce cas, la conductivité thermique  $\lambda$  a la même valeur dans tous les points. Les équations (2.17) et (2.15) deviennent :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \operatorname{div}(\mathbf{grad}T) + p \quad (2.20)$$

ou

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + p \quad (2.21)$$

où l'opérateur  $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\bullet)$  ou  $\Delta$  est nommé le *Laplacien* :

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}T) = \Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.22)$$

Les équations (2.20) et (2.21) peuvent être mises sous la forme :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\mathbf{grad}T) + \frac{p}{\lambda} \quad (2.23)$$

ou

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{p}{\lambda} \quad (2.24)$$

où la *diffusivité thermique*,  $\alpha$  [ $\text{m}^2/\text{s}$ ] :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (2.25)$$

est une propriété de matériel qui indique la vitesse à laquelle ceci change de température.

### 2.3.3 Matériel homogène en régime stationnaire : équation de Poisson

Dans ce cas, la température ne varie pas dans le temps. Les équations (2.17) et (2.15) deviennent :

$$\lambda \operatorname{div}(\mathbf{grad}T) + p = 0 \quad (2.26)$$

ou

$$\lambda \Delta T + p = 0 \quad (2.27)$$

qui représente l'équation de Poisson.

### 2.3.4 Matériel homogène en régime stationnaire sans sources internes : équation de Laplace

Dans le cas où le matériel est homogène, sans sources d'énergie à l'intérieur et le processus est stationnaire, les équations (2.17) et (2.15) deviennent :

$$\operatorname{div}(\mathbf{grad}T) = 0 \quad (2.28)$$

ou

$$\Delta T = 0 \quad (2.29)$$

qui représentent l'équation de Laplace.

## 2.4 Conditions aux limites pour la résolution de l'équation de la chaleur

La résolution de l'équation de la chaleur permet de déterminer la distribution spatio-temporelle de la température. La solution dépend des *conditions aux limites spatiales* du domaine et de la *condition au moment initial*. Parce que l'équation de la chaleur (2.15) est de premier ordre pour la variable temps et de deuxième ordre pour les variables spatiales, on a besoin d'une seule condition initiale et de deux conditions aux limites pour chaque variable spatiale.

La *condition initiale* est la distribution de la température dans le domaine au moment initial,

$$T|_{t=0} \equiv T_0 = f(x, y, z, 0) \quad (2.30)$$

Les *conditions aux limites* du domaine couramment utilisées sont illustrées dans le Tableau 2.3 pour la surface  $x = 0$  dans le cas unidimensionnel. Le flux de chaleur est dans la direction de  $x$  positif et la température dépend de la coordonnée spatiale et de temps,  $T = T(x, t)$ .

La première condition correspond à une température de surface,  $T_s$ , imposée, qui peut être constante ou variable dans le temps (*problème de Dirichlet* ou *condition de première espèce*).



La deuxième condition correspond à une densité de flux imposée sur la surface,  $\varphi_S$  (*problème de Neumann* ou *condition de deuxième espèce*). En appliquant la loi de Fourier (2.4) à la surface,  $x = 0$ , on obtient :

$$\varphi_S = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (2.31)$$

Un cas spécial de cette condition correspond à une *surface parfaitement isolée* (ou *adiabatique*) ou à une *surface de symétrie*, cas où la densité de flux à travers la surface est nulle.

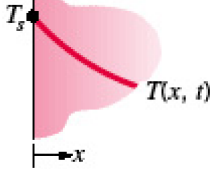
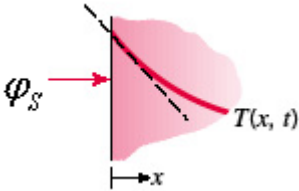
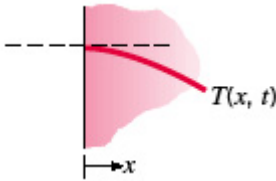
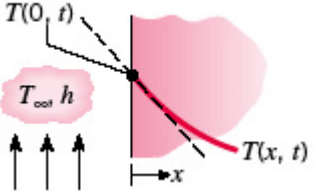
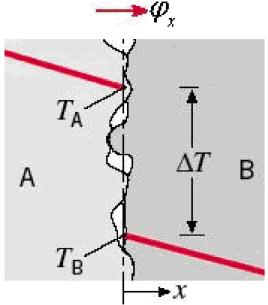
La troisième condition correspond à un flux convectif à la surface (*problème de Fourier* ou *condition mixte*). En effectuant le bilan d'énergie à la surface, on obtient que le flux conductif est égal au flux convectif,

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = h[T_\infty - T(0,t)] \quad (2.32)$$

Une autre condition correspond à un flux conductif à la surface en contact avec une autre surface de matériau de conductivité différente. Le bilan de densité de flux à la surface donne :

$$\lambda_A \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0^-} = \lambda_B \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0^+} \quad (2.33)$$

Tableau 2.3 Conditions aux limites de l'équation de la diffusion de la chaleur pour une surface ( $x = 0$ )

Type de condition	Equation	Variation de la température
1. Température imposée sur la surface (condition de Dirichlet)	$T(0, t) = T_S$	
2. Densité de flux imposée sur la surface (condition de Neumann)		
a. Densité de flux imposée	$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = \varphi_S$	
b. Surface adiabatique ou surface de symétrie	$\frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = 0$	
3. Surface avec convection (condition de Fourier)	$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)]$	
4. Surface en contact avec une autre surface de matériau différent	$\lambda_A \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0^-} = \lambda_B \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0^+}$	

### 3 Conduction unidimensionnelle en régime permanent

Dans un nombre important des problèmes pratiques, le gradient de la température varie selon une seule dimension spatiale et, en conséquence, le flux de chaleur est seulement dans cette direction ; le problème est *unidimensionnel*. Si la température ne dépend pas du temps, le régime est *permanent* ou *stationnaire*.

#### 3.1 Conduction unidimensionnelle sans sources internes

##### 3.1.1 Mur plan

Considérons un mur plan qui sépare deux fluides de températures différentes,  $T_{\infty,1}$  et  $T_{\infty,2}$  (Figure 3.1). La chaleur est transférée :

- par convection du fluide chaud de température  $T_{\infty,1}$  à la surface de la paroi de température  $T_{s,1}$  ;
- par conduction à travers la paroi de la surface de température  $T_{s,1}$  à la surface de température  $T_{s,2}$  ;
- par convection de la surface de la paroi de température  $T_{s,2}$  au fluide de température  $T_{\infty,2}$ .

La distribution de la température dans la paroi peut être obtenue en résolvant l'équation de la chaleur avec ses conditions aux limites. En régime permanent,  $\partial T / \partial t = 0$ , et sans sources internes de chaleur,  $p = 0$ , l'équation générale de la chaleur (2.15) devient :

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = 0 \quad (3.1)$$

En raison de la symétrie sur deux directions de l'espace (la paroi plane peut être translatée dans ces directions sans changer la distribution de la température), le gradient de température et la densité de flux sont nuls dans ces directions. L'équation (3.1) devient

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (3.2)$$

L'équation (3.2) montre que pour une paroi plane, en conditions stationnaires, sans sources internes, la densité du flux de chaleur est une constante indépendante de la direction  $x$ ,  $\varphi \equiv -\lambda dT / dx = \text{const.}$

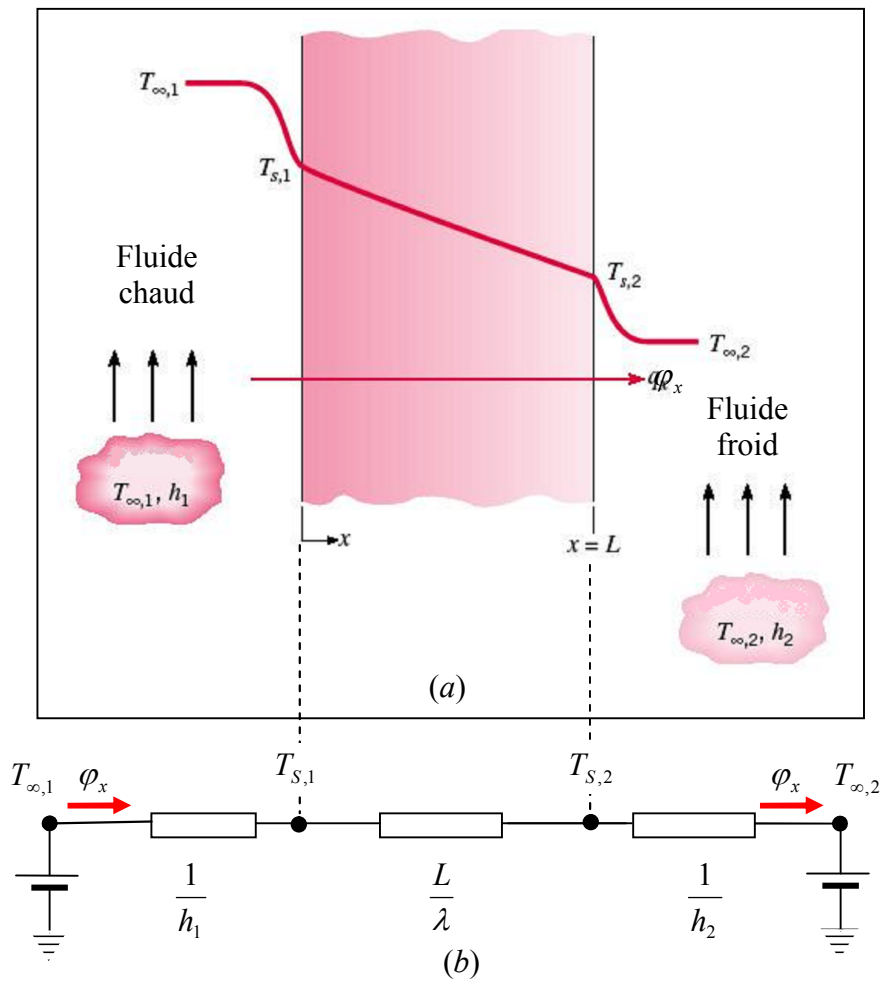


Figure 3.1 Transfer de chaleur à travers un mur plan sans sources internes : a) schéma et distribution des températures ; b) circuit thermique (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

La distribution de la température dans le mur plan résulte en résolvant l'équation différentielle (3.2) avec des conditions aux limites de type Dirichlet. Le problème aux valeurs limites devient,

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) = 0 \\ T(0) = T_{s1} \\ T(L) = T_{s2} \end{cases} \quad (3.3)$$

Si la conductivité thermique  $\lambda$  est constante, alors la solution générale de l'équation (3.2) est :

$$T(x) = C_1 x + C_2 \quad (3.4)$$

Les deux constantes d'intégration de l'équation (3.4) s'obtiennent en utilisant les conditions aux limites. En considérant des conditions aux limites de première espèce (problème de Dirichlet), sur les surfaces  $x = 0$  et  $x = L$  (Figure 3.1),

$$T(0) = T_{S1} \text{ et } T(L) = T_{S2} \quad (3.5)$$

on obtient

$$C_2 = T_{S1} \quad (3.6)$$

et

$$C_1 = \frac{T_{S2} - T_{S1}}{L} \quad (3.7)$$

En substituant  $C_1$  et  $C_2$  dans la solution générale (3.4), on obtient la distribution de la température :

$$T(x) = \frac{T_{S2} - T_{S1}}{L} x + T_{S1} \quad (3.8)$$

qui représente une variation linéaire avec la distance  $x$ . Les isothermes sont des plans parallèles aux faces du mur.

En utilisant la loi de Fourier, on obtient la densité de flux de chaleur,

$$\varphi_x = -\frac{\lambda}{L}(T_{S2} - T_{S1}) = \frac{\lambda}{L}(T_{S1} - T_{S2}) \quad (3.9)$$

et le flux de chaleur traversant la parois de surface  $A$ ,

$$q_x = A\varphi = \lambda \frac{A}{L}(T_{S1} - T_{S2}) \quad (3.10)$$

On remarque que la densité de flux et le flux de chaleur sont constants (indépendants de la coordonnées  $x$ ) : c'est un système à *densité de flux conservative*.

### 3.1.2 Cylindre

Les corps de géométrie cylindrique présentent souvent une variation radiale de la température. En régime stationnaire, sans source interne de chaleur, le problème du cylindre se réduit à une forme similaire à celle du mur plan.

Considérons un conduit cylindrique dans lequel et autour duquel circulent deux fluides de températures différentes (Figure 3.2). En régime stationnaire, sans sources de chaleur, en raison de la symétrie radiale (le cylindre peut être tourné autour de l'axe centrale sans changement du champ de la température), l'équation de la chaleur, exprimée en coordonnées cylindriques (2.18), devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.11)$$

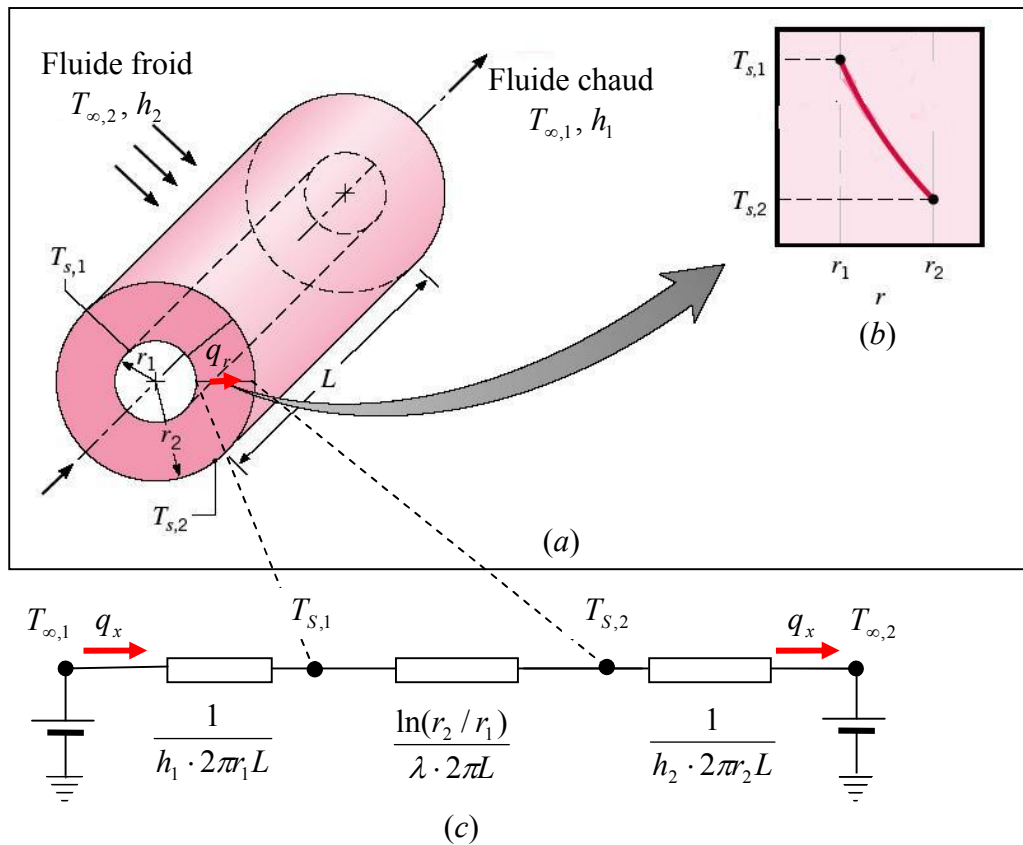


Figure 3.2 Transfer de chaleur à travers un cylindre sans sources internes : a) schéma ; b) distribution des températures ; c) circuit thermique (adaptée d'après Incropera et al., 2007).

L'équation (3.11) implique que la densité de flux,

$$\varphi = -\lambda \mathbf{grad} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \quad (3.12)$$

dépend du rayon  $r$  mais que la valeur  $\lambda r \cdot \partial T / \partial r$  est constante. En conséquence, le flux à travers une surface cylindrique de rayon  $r$ ,

$$q_r = A\phi = A(-\lambda \mathbf{grad}T) = -\lambda A \frac{dT}{dr} = -\lambda(2\pi rL) \frac{dT}{dr} \quad (3.13)$$

est constant dans la direction radiale.

La distribution de la température dans le cylindre résulte en résolvant l'équation différentielle (3.11) avec des conditions aux limites de type Dirichlet. Le problème aux valeurs limites devient :

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \lambda r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \\ T(r_1) = T_{s1} \\ T(r_2) = T_{s2} \end{cases} \quad (3.14)$$

En supposant la conductivité thermique,  $\lambda$ , constante, la solution générale s'obtient en intégrant deux fois l'équation différentielle (3.11),

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (3.15)$$

où les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$  s'obtient en utilisant les deux conditions aux limites,

$$C_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}}, \quad C_2 = \frac{T_2 \ln r_1 - T_1 \ln r_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \quad (3.16)$$

La distribution de la température a une forme logarithmique,

$$T(r) = T_{s1} - \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_1} = T_{s2} + \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_2} \quad (3.17)$$

En introduisant la dérivée de la température donnée par l'équation (3.17) dans l'équation (3.13), on obtient le flux de chaleur à travers une surface isotherme de forme cylindrique de rayon  $r$  :

$$q_r = \lambda \frac{2\pi L}{\ln(r_2 / r_1)} (T_{s1} - T_{s2}) \quad (3.18)$$

### 3.1.3 Sphère

Considérons un corps sphérique sans sources internes de chaleur (Figure 3.3). En raison de la symétrie sphérique, l'équation de la chaleur (2.19), exprimée en coordonnées sphériques, devient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.19)$$

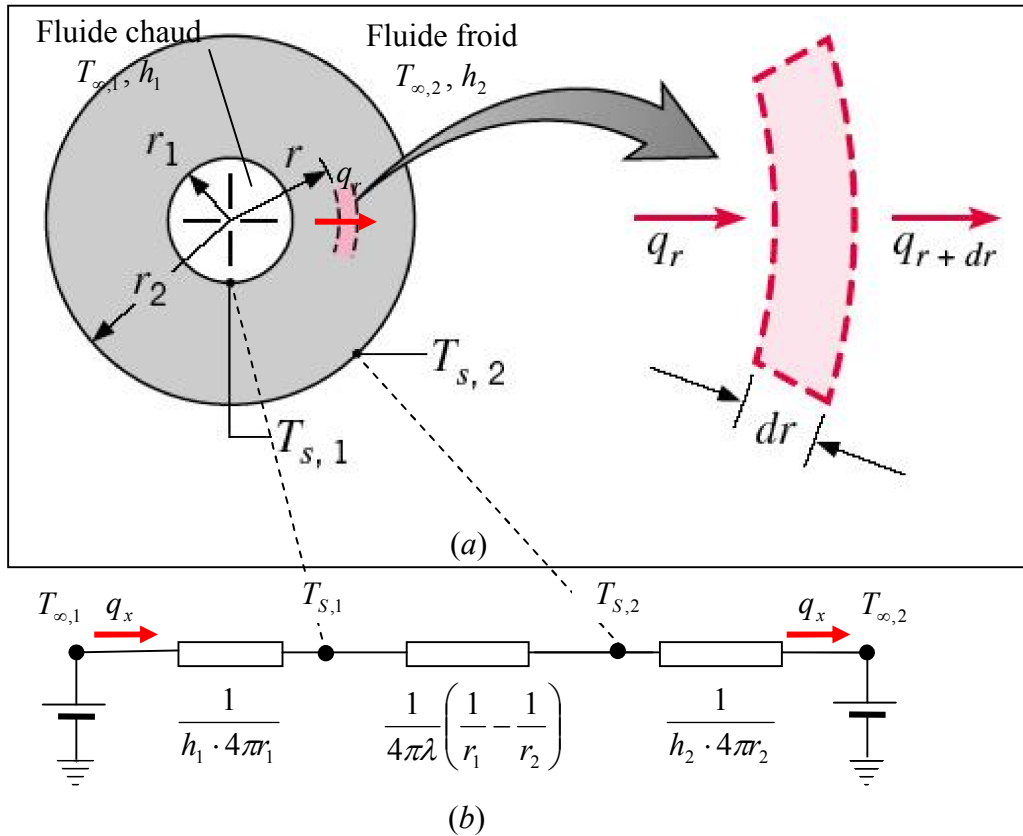


Figure 3.3 Transfert de chaleur à travers une sphère sans sources internes : a) schéma ; b) circuit thermique (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

La distribution de la température dans la sphère s'obtient en résolvant l'équation différentielle (3.19) avec des conditions aux limites de types Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \lambda r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \\ T(r_1) = T_{s1} \\ T(r_2) = T_{s2} \end{cases} \quad (3.20)$$



En supposant la conductivité thermique,  $\lambda$ , constante, la solution générale s'obtient en intégrant deux fois l'équation différentielle (3.19),

$$T(r) = C_1 / r + C_2 \quad (3.21)$$

où les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$  s'obtient en utilisant les deux conditions aux limites,

$$C_1 = \frac{r_1 r_2 (T_{s1} - T_{s2})}{(r_2 - r_1)}; C_2 = \frac{T_{s2} r_2 - T_{s1} r_1}{r_2 - r_1} \quad (3.22)$$

La distribution de la température a la forme :

$$T(r) = T_{s1} + \frac{r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_2 - r_1} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (3.23)$$

Le flux à travers une surface isotherme sphérique de rayon  $r$  est

$$q_r = \lambda \frac{4\pi}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} (T_{s1} - T_{s2}) \quad (3.24)$$

Comme pour le cylindre, dans le cas de la sphère le *flux est conservatif*.

### 3.1.4 Résistance thermique de conduction

Considérons un tube de flux de chaleur dans un matériau homogène et isotrope en *conduction stationnaire sans sources internes de chaleur* (Figure 3.4). Puisque le flux de chaleur,  $q$ , est conservatif, la loi de Fourier dans une section  $s$  de l'abscisse curviligne sur la ligne de courant donne :

$$q = S(s)\varphi = -S(s)\lambda(s) \frac{dT}{ds} \Big|_s \quad (3.25)$$

En séparant les variables, l'équation (3.25) devient :

$$q \frac{ds}{S(s)\lambda(s)} = -dT \quad (3.26)$$

En intégrant de l'équation (3.26) de  $s_0$  à  $s$ , on obtient la variation de la température avec la distance,

$$q \int_{s_0}^s \frac{ds}{S(s)\lambda(s)} = - \int_{T_0}^T dT \quad (3.27)$$

qui peut s'écrire :

$$qR = T_0 - T_1 \quad (3.28)$$

avec la résistance du tube de courant :

$$R = \int_{s_0}^s \frac{ds}{S(s)\lambda(s)} \quad (3.29)$$

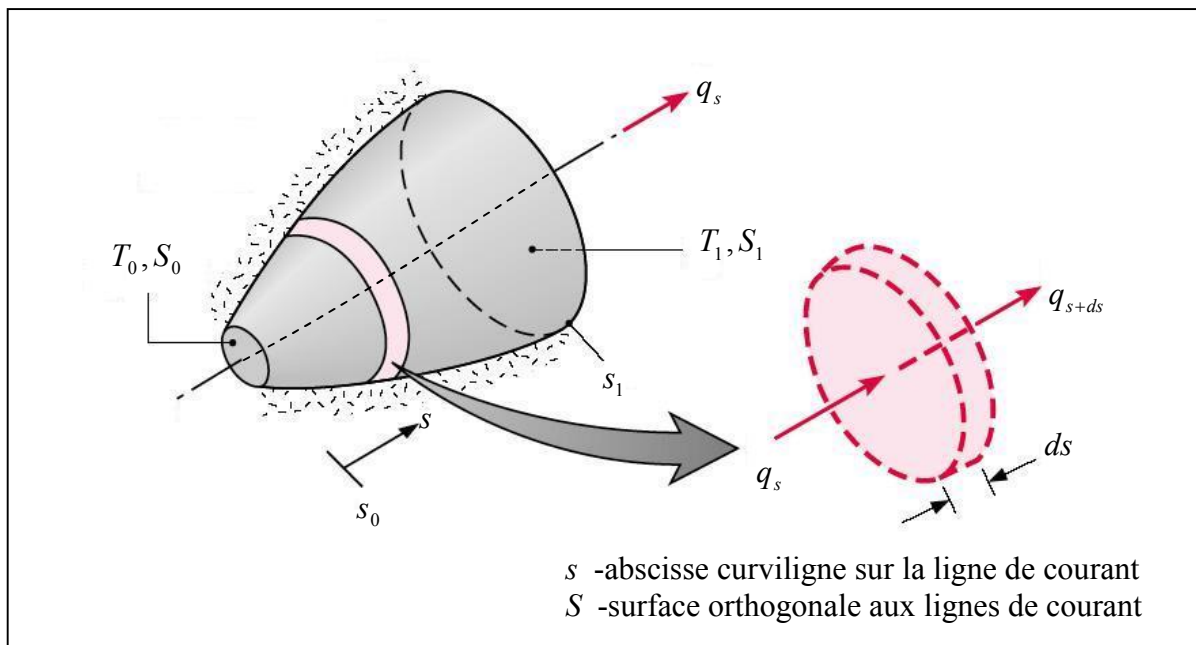


Figure 3.4 Tube de flux en conduction stationnaire sans sources internes (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

Si les températures sont connues aux extrémités du tube de flux,  $T_0 = T(s_0)$  et  $T_1 = T(s_1)$ , l'équation (3.27) permet le calcul du flux. Si la conductivité thermique ne dépend pas de la température, on retrouve les équations (3.10), (3.18) et (3.24). Ces équations ayant une forme analogue à la loi d'Ohm, il en résulte la résistance thermique de conduction :

$$R_{cd} \equiv \frac{T_0 - T_1}{q} \quad (3.30)$$

La relation (3.30), dans laquelle la conductivité thermique  $\lambda$  est analogue à la résistivité électrique  $\rho$ , devient

$$R_{cd} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{A} \quad (3.31)$$

pour le *mur plan*,

$$R_{cd} = \frac{1}{\lambda} \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2\pi L} \quad (3.32)$$

pour le *cylindre*,

$$R_{cd} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.33)$$

et pour la *sphère*.

### 3.2 Conduction unidimensionnelle avec sources internes

Pour un tube de courant, Figure 3.4,

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{ds} = \frac{q}{S} \quad (3.34)$$

et l'équation de Poisson de la conduction avec sources internes (2.26) devient :

$$\frac{d}{ds} \left( -\frac{q}{S} \right) + p = 0 \quad (3.35)$$

ou, en séparant les variables :

$$dq = p S ds \quad (3.36)$$

qui, par intégration,  $\int_{q_0}^q dq = \int_{s_0}^s p S ds$ , dévient :

$$q(s) = \int_{s_0}^s p S ds + q_0 \quad (3.37)$$

Le flux sortant par la surface  $S_1$  est

$$q_1 = \int_{s_0}^{s_1} p S ds + q_0 \quad (3.38)$$

où  $q_0$  est le flux entrant par la surface  $S_0$ . En reportant (3.37) en (3.25), on obtient après intégration :

$$T_1 = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\lambda S} \left( \int_{s_0}^s -p S ds' \right) ds - q_0 \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\lambda S} ds + T_0 \quad (3.39)$$

En tenant compte de l'équation (3.29)

$$R_0 = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\lambda S} ds \quad (3.40)$$

l'équation (3.39) devient :

$$T_1 = - \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\lambda S} \left( \int_{s_0}^s p S ds' \right) ds - R_0 q_0 + T_0 \quad (3.41)$$

Les relations (3.38) et (3.41) peuvent être représentées par le circuit équivalent de la Figure 3.5 où

$$f_1 = \int_{s_0}^{s_1} p S ds \quad (3.42)$$

est une source de courant, de sorte que la relation (3.38)  $q_1 = f_1 + q_0$  et

$$b_0 = - \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{\lambda S} \left( \int_{s_0}^s p S ds' \right) ds \quad (3.43)$$

est une source de tension.

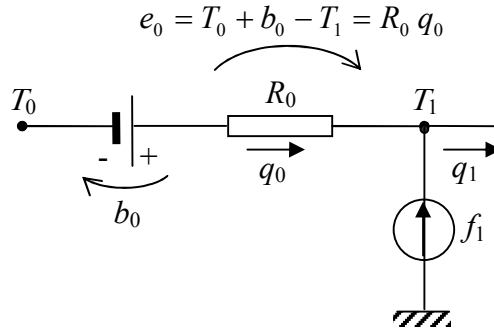


Figure 3.5 Analogie électrique pour un tube de courant avec source interne

Avec ces notations, l'équation (3.38) devient :

$$q_1 = q_0 + f_1 \quad (3.44)$$

et l'équation (3.41) devient

$$T_0 - T_1 + b_0 = R_0 q_0 \quad (3.45)$$

où

$$e_0 = T_0 + b_0 - T_1 \quad (3.46)$$

est la chute de température sur la résistance  $R_0$ .

### 3.3 Circuits thermique

Les équations du transfert de la chaleur étant formellement identiques aux celles caractérisant les circuits électriques, on peut réaliser une analogie électrique en considérant le flux thermique analogue au courant électrique et la différence de température analogue à la différence de potentiel.

### 3.3.1 Résistances de convection et de rayonnement

La définition de la résistance thermique de conduction, relation (3.30), suggère une définition analogue de la résistance thermique de convection à partir de la loi de Newton exprimée par l'équation (1.14) :

$$R_{cv} \equiv \frac{T_s - T_\infty}{q} = \frac{1}{h_{cv} A} \quad (3.47)$$

D'une manière analogue, on peut définir une résistance thermique de rayonnement à partir de l'équation (1.25) :

$$R_r \equiv \frac{T_s - T_{me}}{q} = \frac{1}{h_r A} \quad (3.48)$$

### 3.3.2 Circuits thermiques

Les résistances thermiques forment des *circuits analogues électriques*. La résistance totale équivalente,  $R$ , et la conductance équivalente,  $K \equiv 1/R$ , entre deux points est donnée par les réglés de connexion série,

$$R_{ser} = \sum_{i=1}^n R_i ; \frac{1}{K_{ser}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{K_i} \quad (3.49)$$

quand les surfaces de séparation de  $n$  systèmes sont des isothermes, et parallèle,

$$\frac{1}{R_{par}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} ; K_{par} = \sum_{i=1}^n K_i \quad (3.50)$$

quand les  $n$  systèmes constituent des tubes de courant.

Les résistances de convection et de rayonnement sont en parallèle ; la résistance équivalente est :

$$\frac{1}{R_s} = \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_r} = (h_c + h_r)A = hA \quad (3.51)$$

Les résistances de conduction et de convection du mur plan forment un circuit en série (Figure 3.1) ; la résistance totale est :

$$R_{tot} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{\lambda A} + \frac{1}{h_2 A} \quad (3.52)$$

En tenant compte des équations (3.9), (3.51) et (3.52) la densité de flux est :

$$\varphi_x = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{h_2}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{S1}}{\frac{1}{h_1}} = \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\frac{L}{\lambda}} = \frac{T_{S2} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_2}} \quad (3.53)$$

et le flux thermique est :

$$q_x = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{tot}} = \frac{T_{\infty 1} - T_{S1}}{\frac{1}{h_1 A}} = \frac{T_{S1} - T_{S2}}{\frac{L}{\lambda A}} = \frac{T_{S2} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_2 A}} \quad (3.54)$$

### 3.3.3 Circuit équivalent du mur multicouche

Un mur multicouche est formé de résistances en série et en parallèle dues à sa composition de différents matériaux. Le circuit thermique a une résistance totale équivalente,  $R_{tot}$  [K/W], ou un *coefficient global de transfert de chaleur*,  $U = 1/(A \cdot R_{tot})$  [W/(m<sup>2</sup> K)] ; le flux total qui traverse le mur est :

$$q_x \equiv U \cdot A \cdot \Delta T \quad (3.55)$$

où  $\Delta T$  est la différence de température. Par exemple, la résistance équivalente du mur multicouche de la Figure 3.6 est :

$$R_{tot} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L_A}{\lambda_A A} + \frac{L_B}{\lambda_B A} + \frac{L_C}{\lambda_C A} + \frac{1}{h_2 A} \quad (3.56)$$

Le coefficient global de transfert de chaleur est :

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{\lambda_A} + \frac{L_B}{\lambda_B} + \frac{L_C}{\lambda_C} + \frac{1}{h_2}} \quad (3.57)$$

Le flux traversant le mur est

$$q_x = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{tot}} = UA(T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) \quad (3.58)$$

et la densité de flux

$$\varphi_x = U(T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1} + \frac{L_A}{\lambda_A} + \frac{L_B}{\lambda_B} + \frac{L_C}{\lambda_C} + \frac{1}{h_2}} \quad (3.59)$$

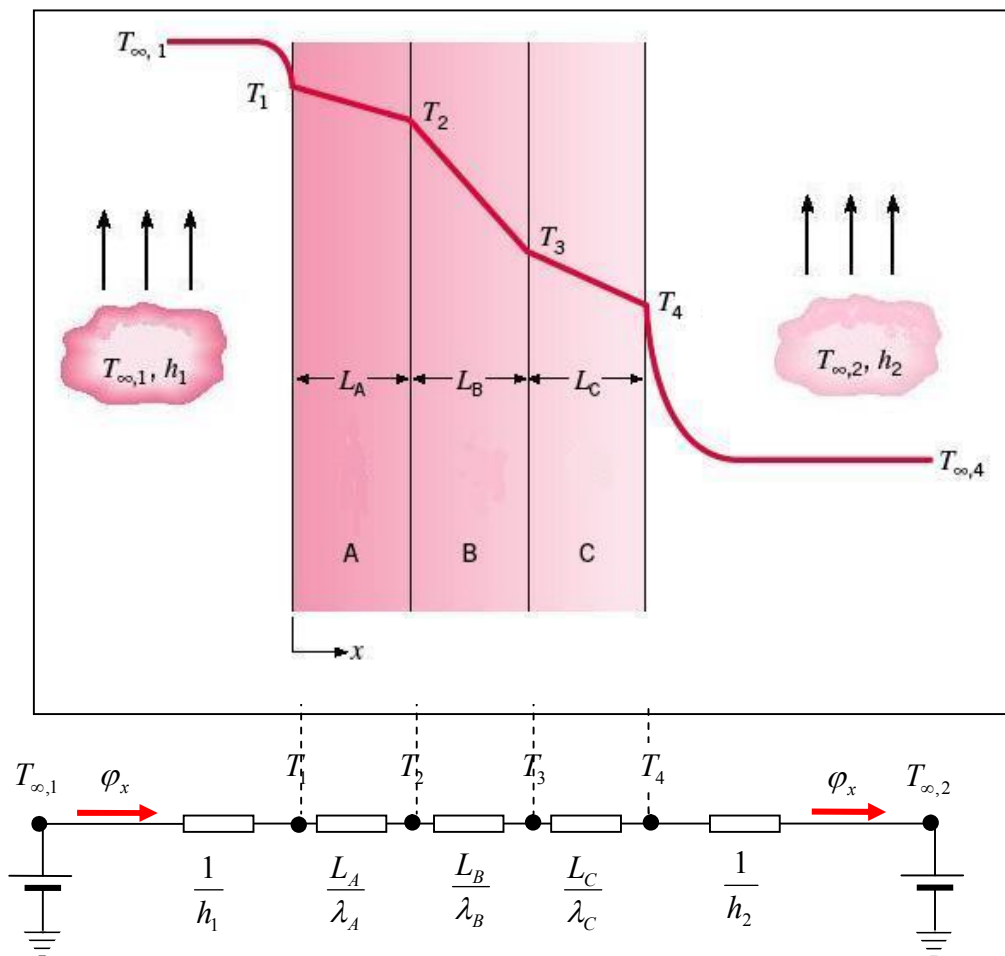


Figure 3.6 Mur multicouche avec circuit thermique en série (adaptée d'après Incropera et al., 2007)



### 3.3.4 Résistance de contact

La *résistance de contact* entre les couches, due principalement à la rugosité des surfaces qui fait que les zones de contact alternent avec des zones avec des interstices contenant habituellement d'air,

$$R_{ct} \equiv \frac{T_A - T_B}{q_x} \quad (3.60)$$

peut être importante en comparaison avec les résistances de conduction.

En utilisant la résistance équivalente des connexions série et parallèle on peut trouver la résistance équivalente du mur multicouche avec de circuits thermique (Figure 3.8).

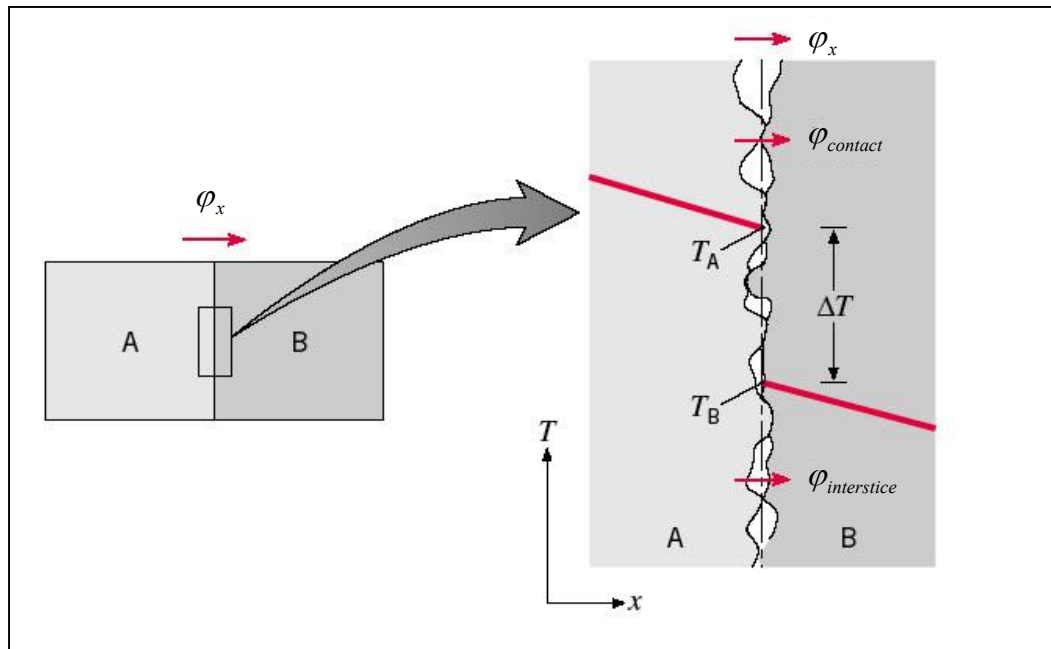


Figure 3.7 Résistance de contact (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

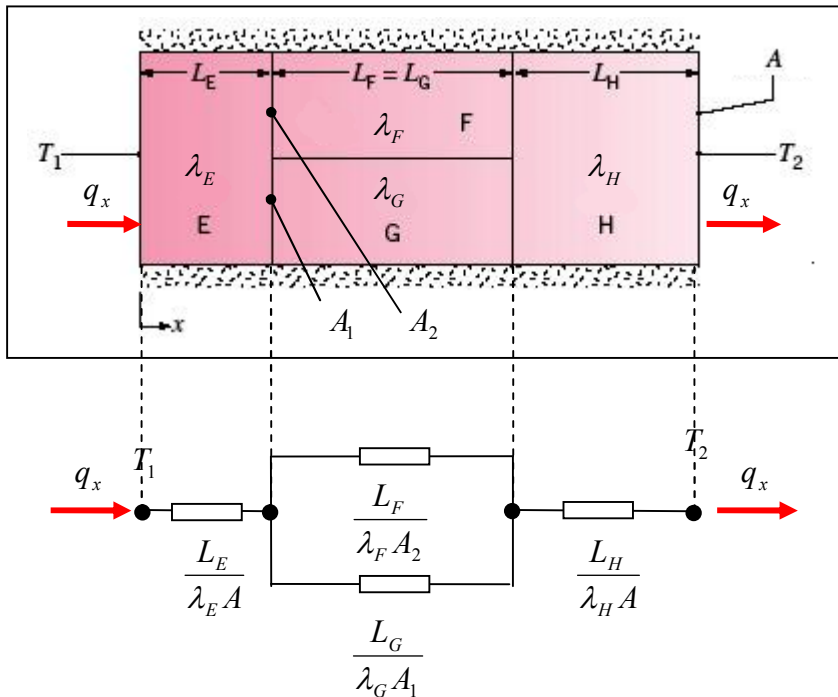
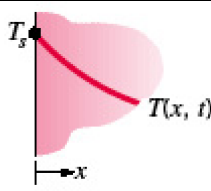
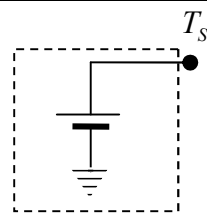


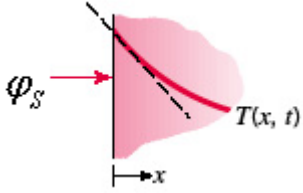
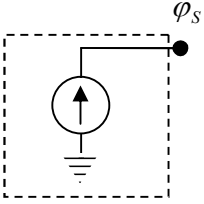
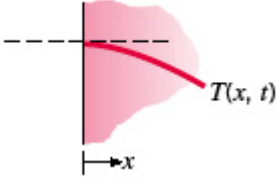
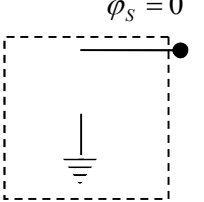
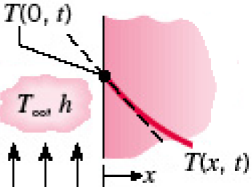
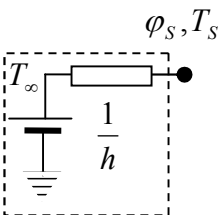
Figure 3.8 Mur multicouche avec un circuit thermique série-parallèle (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

### 3.3.5 Sources de flux et de température

Les conditions aux limites peuvent être modélisées avec des sources de tension, pour la température, et de courant, pour le flux (Tableau 3.1)

Tableau 3.1 Conditions aux limites de l'équation de la diffusion de la chaleur pour une surface ( $x = 0$ )

Type de condition	Equation	Variation de la température	Source équivalente
1. Température imposée sur la surface (condition de Dirichlet)	$T(0, t) = T_s$		
2. Densité de flux imposée sur la surface (condition de Neumann)			

a. Densité de flux imposée	$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = \varphi_S$		
b. Surface adiabatique ou surface de symétrie	$\frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} = \varphi_S = 0$		
3. Surface avec convection (condition de Fourier)	$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big _{x=0} \equiv \varphi_S$ $= h[T_\infty - T(0,t)]$ $= h(T_\infty - T_S)$		

### 3.3.6 Théorèmes de Thévenin et de Norton

Dans de nombreux cas, on s'intéresse à la différence de température entre deux points ou du flux entre deux points. Si on peut modéliser le système thermique par des résistances thermiques, alors, pour résoudre ce type de problème, on peut appliquer les théorèmes de Thévenin et de Norton.

Le *théorème de Thévenin* établit qu'un réseau électrique linéaire vu de deux points est équivalent à un générateur parfait dont la tension est égale à la différence de potentiels à vide entre ces deux points, en série avec une résistance égale à celle que l'on mesure entre les points lorsque les générateurs indépendants sont rendus passifs. Les étapes pour obtenir un circuit équivalent de Thévenin sont exemplifiées dans la Figure 3.9. La température (tension) aux bornes AB s'obtient en considérant le diviseur de tension formé par les résistances  $R_2, R_3$  et  $R_4$ , Figure 3.9 (a),

$$T_T = \frac{R_2 + R_3}{(R_2 + R_3) + R_4} T_1. \tag{3.61}$$

Notons que la résistance  $R_1$  n'est pas prise en compte car le circuit est ouvert entre les bornes A et B (il n'y a pas de courant qui passe à travers  $R_1$  et donc pas de chute de tension). La résistance équivalente se trouve en mettant en court-circuit les sources de courant et en circuit ouvert les sources de courant. Pour l'exemple de la Figure 3.9 (b), la résistance équivalente est :

$$R_T = R_1 + \left( \frac{1}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_4} \right)^{-1} \quad (3.62)$$

On obtient le circuit équivalent formé d'une résistance en série avec une source de tension, Figure 3.9 (c).

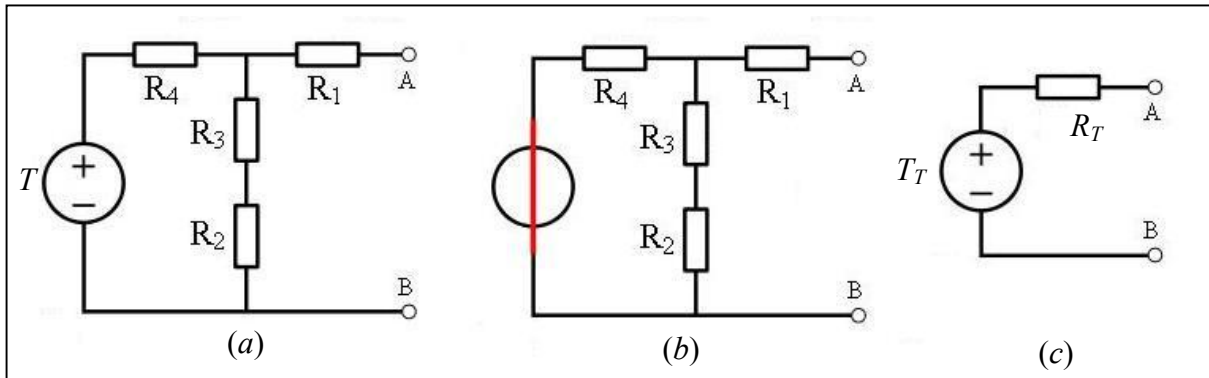


Figure 3.9 Etapes pour obtenir le circuit équivalent de Thévenin : a) circuit original ; b) calcul de la température équivalente ; c) calcul de la résistance équivalente et circuit équivalent.

Le *théorème de Norton*, qui est dual au théorème de Thévenin, établit que tout circuit résistif est équivalent à une source de courant en parallèle avec une résistance équivalente. Le courant entre les bornes est obtenu lorsque les bornes sont en court-circuit. Pour l'exemple de la Figure 3.10 (a), le flux total qui passe par la résistance  $R_1$  est :

$$q_{tot} = \frac{T}{R_1 + \left( \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1}} \quad (3.63)$$

Le flux équivalent, entre les bornes  $a$  et  $b$  mises en court-circuit, s'obtient en utilisant le diviseur de courant formé par  $R_2$  et  $R_3$  :

$$q_N = \frac{R_2}{R_2 + R_3} q_{tot} \quad (3.64)$$

La résistance de Norton se trouve en court-circuitant les sources de tension et en débranchant les sources de courant. Pour le circuit de la Figure 3.10 (b),

$$R_N = R_3 + \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} \quad (3.65)$$

Le circuit équivalent de Norton est formé d'une source de flux en parallèle avec une résistance équivalente, Figure 3.10 (c).

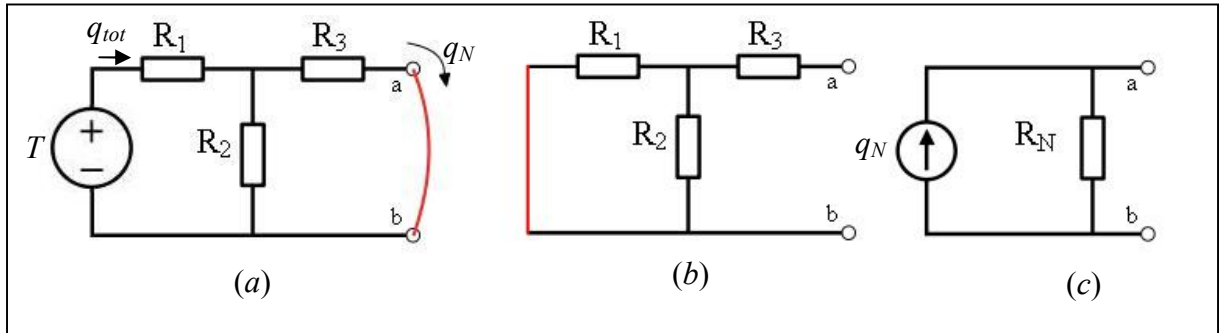


Figure 3.10 Etapes pour obtenir le circuit équivalent de Norton : a) circuit original et calcul du flux équivalent ; b) calcul de la résistance équivalente ; c) circuit équivalent.

Les circuits de Thévenin et de Norton sont duals, Figure 3.9 (c) et Figure 3.10 (c). Les résistances sont égales,

$$R_T = R_N \quad (3.66)$$

La relation entre la source de tension (température) et de courant (flux thermique) est :

$$T_T = q_N R_N ; q_N = T_T / R_T \quad (3.67)$$

### 3.4 Résolution numériques des problèmes directs

Dans de nombreuses situations, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques d'analyse. Le principe est de discrétiser l'espace et de traiter chaque maille obtenue comme un élément connecté à des autre éléments pour former un système.

#### 3.4.1 Types de problèmes

Considérons un système décrit par ses entrées (variable indépendantes), ses sorties (variables dépendantes) et la fonction ou le bloc qui relie les entrées aux sorties (Figure 3.11). Il y a trois types de problèmes :

- *simulation* : en connaissant les entrées et le bloc, trouver les sorties (Figure 3.11 a) ;
- *identification* : en connaissant les entrées et les sorties, trouver le bloc (Figure 3.11 b) ;
- *contrôle-commande* : en connaissant le bloc et les sorties, trouver les entrées (Figure 3.11 c).

Le problème de simulation est un *problème direct*. Les problèmes de *conception* et de *contrôle-commande* sont des *problèmes inverses*.

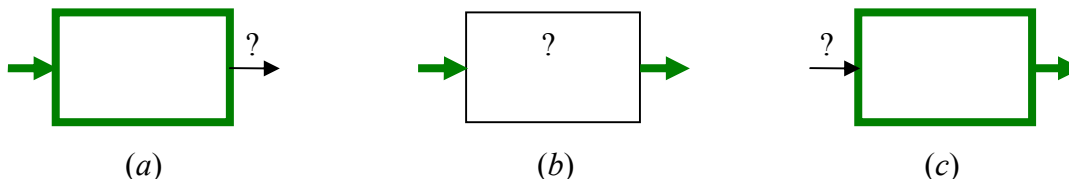


Figure 3.11 Types de problèmes : a) directe ; b) inverse – dimensionnement ; c) inverse – contrôle-commande.

### 3.4.2 Problèmes directe en conduction stationnaire

A partir de l'équation générale de la chaleur, équation (2.15), on obtient l'équation de la conduction en régime stationnaire avec des sources de chaleur

$$\operatorname{div}(\lambda \mathbf{grad}\theta) + p = 0 \quad (3.68)$$

En discrétisant l'espace dans des mailles pour lesquelles la conductivité est constante, pour chaque maille on obtient l'équation de Poisson (2.26). Dans le cas unidimensionnel, on a un tube de courant qui, entre deux sections transversales, peut être modélisé par l'équation **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** et avoir le circuit équivalent de la Figure 3.5. En appliquant le théorème de Norton au circuit de la Figure 3.5, on obtient des circuits avec des résistances et de sources de flux. Par exemple, la Figure 3.12 montre la discrétisation d'un système en quatre couches. On obtient alors des circuits thermiques.

Un circuit thermique est un graph avec des nœuds et des arcs. Le *problème direct* est le suivant : étant donnée le circuit et les conditions aux limites, trouver les températures dans les sommets et les flux dans les arcs.

Considérons un système formé de quatre résistances et de trois sources de flux (Figure 3.12) avec trois conditions aux limites :

- conditions de type Dirichlet aux deux limites  $\theta(0) = 0$  et  $\theta(1) = 0$  (Figure 3.13) ;
- conditions de type Dirichlet à une limite,  $\theta(0) = 0$ , et de type Neumann à l'autre limite,  $q(1) = 0$  (Figure 3.17) ;
- condition de type Neumann aux deux limites,  $q(0) = 0$  et  $q(1) = 0$  (Figure 3.18).

#### 3.4.2.1 Conditions de type Dirichlet aux deux limites

Considérons un réseau thermique avec des résistances en série et des sources de flux Figure 3.12.

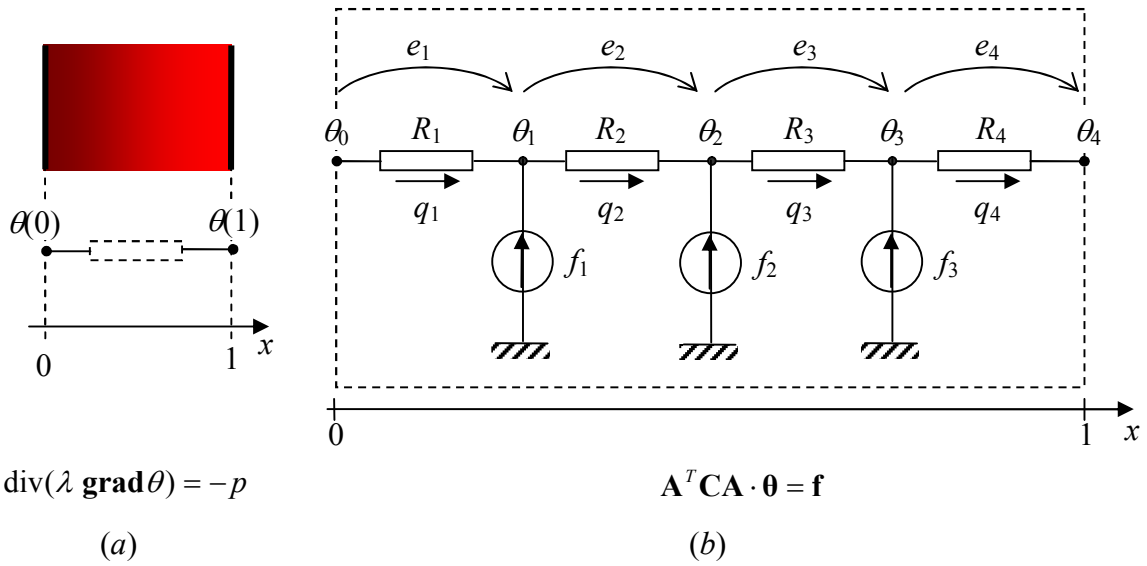


Figure 3.12 Discretisation d'un système unidimensionnel en conduction permanente avec des sources internes : a) le modèle continu ; b) le modèle discret.

En utilisant des *conditions de type Dirichlet aux deux limites*, on obtient le circuit de la Figure 3.13.

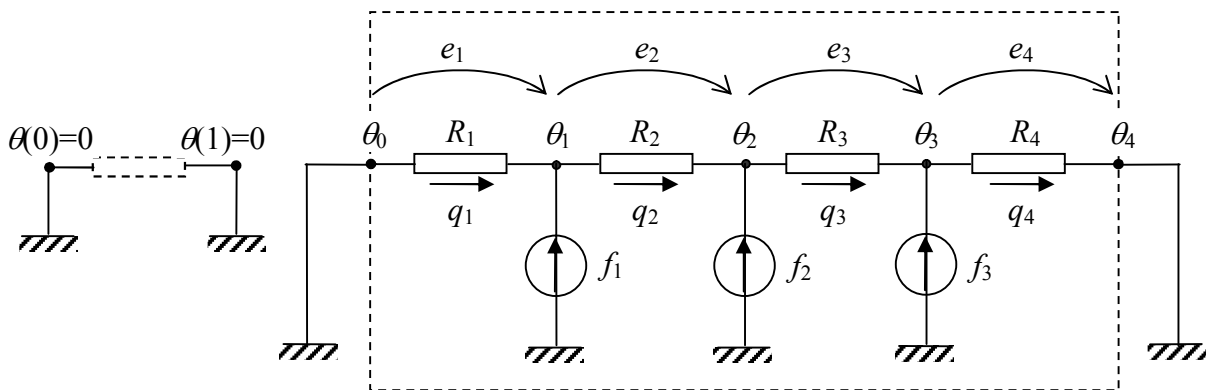


Figure 3.13 Résistances en série et sources de flux : conditions de type Dirichlet aux deux limites

Pour résoudre le problème direct, on écrit la *différence des températures* pour chaque résistance :

$$\begin{cases} e_1 = -\theta_1 \\ e_2 = \theta_1 - \theta_2 \\ e_3 = \theta_2 - \theta_3 \\ e_4 = \theta_3 \end{cases} ; \quad \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{e} = -\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad (3.69)$$

La matrice d'incidence

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

représente la topologie du circuit. Chaque colonne correspond à un nœud  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ , et chaque ligne correspond à arc  $(R_1, R_2, R_3, R_4)$ . Les éléments de la matrice  $\mathbf{A}$  correspondent aux connexions du circuit. Un arc qui entre dans un nœud est noté avec 1 ; un arc qui sort d'un nœud est noté avec  $-1$  ; un arc qui n'est pas lié au nœud est noté avec 0. La matrice  $-\mathbf{A}$  peut être vue comme un opérateur qui réalise des différences ; appliqué au vecteur des température  $\boldsymbol{\theta}$ , il donne les différences de température.

Les flux dans les résistances sont donnés par la loi constitutive de l'élément du circuit (3.30) :

$$\begin{cases} q_1 = G_1 e_1 \\ q_2 = G_2 e_2 \\ q_3 = G_3 e_3 \\ q_4 = G_4 e_4 \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e} \quad (3.71)$$

où  $G_i = 1/R_i, i = 1, \dots, 4$  sont les conductances thermiques. En écrivant le *bilan d'énergie* dans chaque nœud (la loi des nœuds de Kirchhoff),

$$\begin{cases} q_1 - q_2 = -f_1 \\ q_2 - q_3 = -f_2 \\ q_3 - q_4 = -f_3 \end{cases}; \quad - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{f} = -\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{q} \quad (3.72)$$

Notons qu'en général la matrice  $\mathbf{A}$  n'est pas carrée et les flux ne peuvent pas être obtenus de l'équation (3.72).

En remplaçant (3.71) et (3.69) en (3.72), on obtient l'équation du circuit :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{f} \quad \text{ou} \quad \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{f} \quad (3.73)$$



où

$$\mathbf{K} \equiv \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_4 \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

est la matrice de rigidité.

Si toutes les résistances sont égales,  $\mathbf{G} = (1/R) \cdot \mathbf{I}$ , alors

$$\mathbf{K} = \frac{1}{R} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

La matrice  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  est la matrice Laplacien du graph. Les températures dans les nœuds s'obtiennent en résolvant l'équation :

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{f} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{f} \quad (3.76)$$

Les flux résultent en utilisant les équations (3.71), (3.69) et (3.76) :

$$\mathbf{q} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta} = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{f} = -\mathbf{G} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{f} \quad (3.77)$$

Cette procédure est similaire à l'analyse des nœuds dans les circuits électriques (Figure 3.14). Les opérations dans le domaine continu et discret sont équivalentes (Tableau 3.2). On remarque que le problème en continu est défini par l'équation différentielle et ses conditions aux limites tandis que pour le problème discret le problème est défini par la matrice  $\mathbf{K}$  qui est l'équivalent discret du problème défini par l'équation différentielle et ses conditions aux limites. La matrice  $\mathbf{K}$ , c. à d. le "problème", contient dans la deuxième ligne la forme en différences finis de l'équation de la chaleur (3.1) pour le cas unidimensionnel (3.2). La première et la dernière ligne reflètent les conditions aux limites. La matrice  $\mathbf{K}$  est :

- symétrique,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$  ;
- tri-diagonale, c. à d. avec des éléments seulement sur les diagonales ;
- creuse, contient beaucoup de zéros si le nombre de résistances est grand ;
- diagonale constante, sauf la première et la dernière ligne qui dépend de conditions aux limites.

La matrice  $\mathbf{K}$  est une matrice de Toeplitz avec des propriétés intéressantes du point de vue de la complexité du calcul.

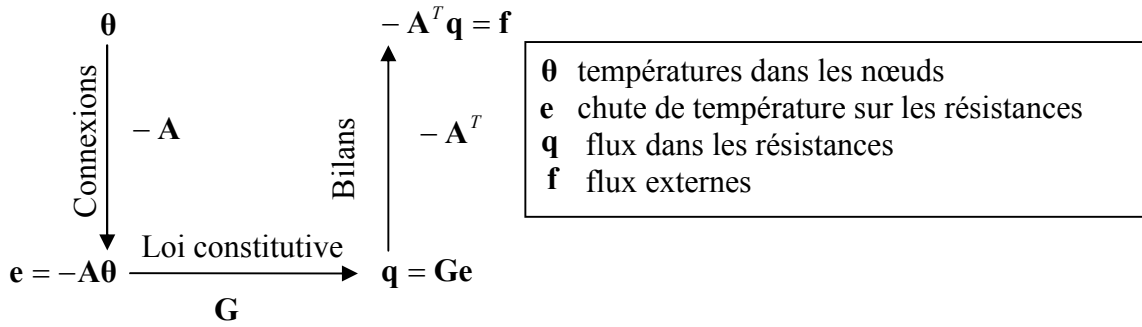


Figure 3.14 Analyse nodale des circuits thermiques

Tableau 3.2 Equivalence entre le modèle continu et discret

	Continu	Discret
Equation de la chaleur	$\text{div}(\lambda \mathbf{grad}\theta) = -p$	$\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \theta = \mathbf{f}$
Conditions aux limites	en $x = 0$ : $\theta(0)$ ou $\varphi(0)$ en $x = 1$ : $\theta(1)$ ou $\varphi(1)$	incluses dans la matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A}$
Température	$\theta$	$\theta$
Flux	$\varphi$	$q$
Connexion	$-\mathbf{grad}\theta$	$-\mathbf{A}\theta$
Bilan d'énergie	$-\text{div} \varphi$	$\mathbf{A}^T q$
Constante de matériau	$\lambda$	$\mathbf{G}$
Sources	$p$	$-\mathbf{f}$

### 3.4.2.2 Conditions de type Dirichlet avec des valeurs différentes aux limites

Les conditions de type Dirichlet se modélisent par des sources de température (Figure 3.15). Le circuit thermique peut être facilement modifié pour être similaire à l'élément donné sur la Figure 3.5. Dans ce cas, les différences de température sont données sur la Figure 3.17.

Les différences de température entre les nœuds sont :

$$\begin{cases} e_1 - b_1 = \theta_0 - \theta_1 \\ e_2 = \theta_1 - \theta_2 \\ e_3 = \theta_2 - \theta_3 \\ e_4 - b_4 = \theta_3 - \theta_4 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{e} - \mathbf{b} = -\mathbf{A}\theta \quad (3.78)$$

où on tient compte que  $\theta_0 = \theta_4 = 0$  et que la matrice des connexions est :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Les flux dans les résistances sont donnés par la loi de Fourier l'équation (3.71) :

$$\mathbf{q} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e} \quad (3.80)$$

Le bilan d'énergie dans chaque nœud est donné par l'équation (3.72) :

$$\mathbf{f} = -\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{q} \quad (3.81)$$

En remplaçant la valeur de  $\mathbf{q}$  donnée par l'équation (3.80) dans l'équation (3.81) et la valeur de  $\mathbf{e}$  donnée par l'équation (3.79) dans l'équation (3.81), on obtient :

$$-\mathbf{A}^T \mathbf{G} (\mathbf{b} - \mathbf{A}\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{f} \quad (3.82)$$

Le vecteur des températures est alors :

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f}) \quad (3.83)$$

Notons que le terme  $(\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f})$  de l'équation (3.83) représente les flux totaux injectés dans chaque nœud :

$$\mathbf{f}_T = \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f} \quad (3.84)$$

En conséquence, le circuit avec sources de température est et de flux, Figure 3.16 (b) ou (c), est équivalent à un circuit avec sources de flux, Figure 3.16 (d).

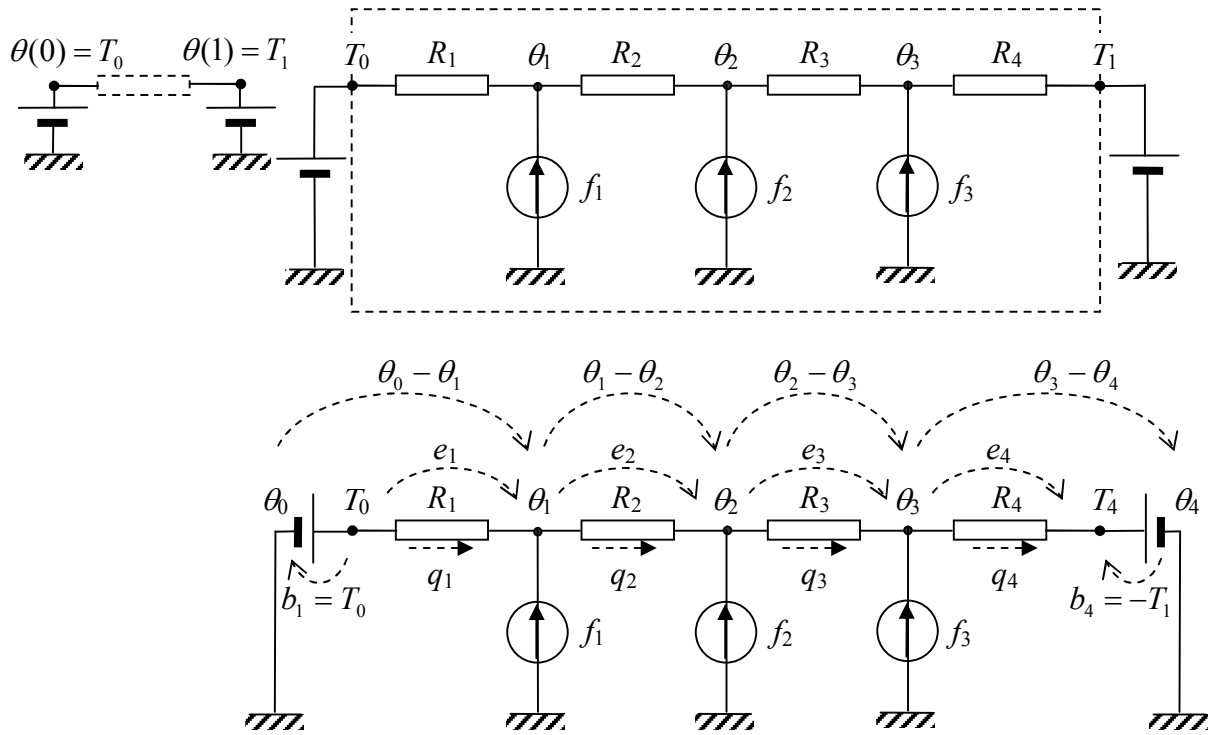


Figure 3.15 Conditions de type Dirichlet différentes aux deux limites

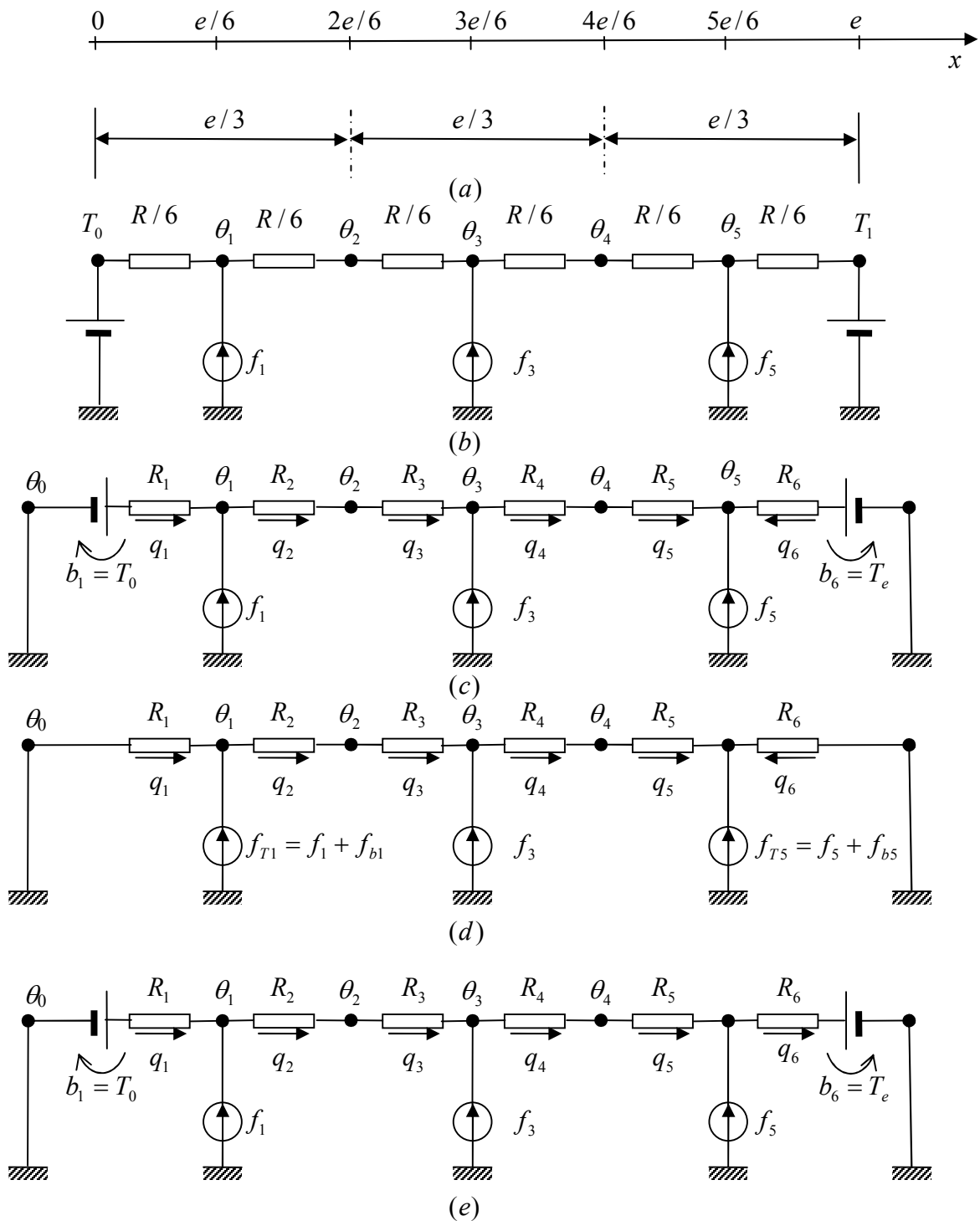


Figure 3.16 Conduction en régime stationnaire a) discrétisation spatiale ; b) circuit thermique correspondant à trois volumes finis ; c) le même circuit mais avec les sources de température sur les branches ; d) circuit équivalent contenant que des sources de flux.

#### Exemple numérique (Figure 3.16)

On considère le régime permanent d'une paroi vitrée d'épaisseur  $e$  et de conductivité thermique constante  $\lambda_v$ , séparant deux milieux à température parfaitement régulée  $T(0) = T_0$  à l'extérieure et  $T(e) = T_e$  à l'intérieure. Cette paroi, supposée infinie dans les deux autres

directions, reçoit un ensoleillement  $E$  dont elle absorbe uniformément une partie en fonction de son coefficient d'absorption  $\alpha$ . Déterminer la repartition de la température dans la vitre.

A. N.  $E = 800 \text{ W/m}^2$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $e = 0.5 \text{ cm}$ ,  $\lambda_v = 1 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ,  $T_0 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_e = 20 \text{ }^\circ\text{C}$

Solution analytique :

L'énergie absorbée se transforme en chaleur dans la vitre ; on la considère une source interne de chaleur,  $p \text{ [W/m}^3\text{]}$ . Pour une surface  $S = 1 \text{ m}^2$ ,

$$\alpha ES = \int_0^e p S dx, \text{ ou } \alpha E = \int_0^e p dx, \text{ ou } \alpha E = pe.$$

D'où :

$$p = \frac{\alpha E}{e} \left[ \frac{\text{W}}{\text{m}^3} \right]$$

L'équation de Poisson pour régime stationnaire avec sources internes, conductivité homogène :

$$\lambda \operatorname{div}(\mathbf{grad}T) + p = 0$$

Pour une dimension,

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + p = 0 \text{ ou } \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\alpha E}{e} = 0 \text{ ou } \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{\alpha E}{\lambda e}$$

En intégrant :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\alpha E}{\lambda e} x + c_1 \text{ et } T = -\frac{\alpha E}{2\lambda e} x^2 + c_1 x + c_2$$

On détermine les constants  $c_1$  et  $c_2$  en utilisant les conditions aux limites :

$$T|_{x=0} = T_0 \Rightarrow c_2 = T_0$$

$$T|_{x=e} = T_e \Rightarrow T_e = -\frac{\alpha E}{2\lambda e} e^2 + c_1 e + T_0$$

$$c_1 = \frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}$$

L'équation de la distribution de la température :

$$T(x) = -\frac{\alpha E}{2\lambda e} x^2 + \left( \frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda} \right) x + T_0$$

En utilisant cette équation dans les points :

$$\mathbf{x} = [0.008 \quad 0.017 \quad 0.0025 \quad 0.0033 \quad 0.0042]^T \text{ [m]}$$

on obtient les températures :

$$\mathbf{T} = [11.80 \quad 13.55 \quad 15.25 \quad 16.89 \quad 18.47]^T \text{ [}^\circ\text{C]} \quad (3.85)$$

### Solution numérique (Figure 3.16 c)

La matrice des connexions et des conductances sont :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{G} = \frac{1}{R/6} \mathbf{I}_{6 \times 6} = \frac{R}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

respectivement, où  $R = \frac{e}{\lambda S} = 0.005 \text{ K/W}$ , pour  $S = 1 \text{ m}^2$ . Le vecteur des sources de flux est :

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{3} \alpha E S [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T = \frac{1}{3} 0.5 \times 800 \times 1 \times [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T \text{ [W]}, \text{ pour } S = 1 \text{ m}^2 \\ &= [133.33 \quad 0 \quad 133.33 \quad 0 \quad 133.33]^T \text{ [W]} \end{aligned}$$

et le vecteur des sources de température est :

$$\mathbf{b} = [T_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad T_e]^T = [10 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 20]^T \text{ [}^\circ\text{C]}.$$

Les températures dans les nœuds

$$\mathbf{x} = [0.008 \quad 0.017 \quad 0.0025 \quad 0.0033 \quad 0.0042]^T \text{ [m]}$$

sont :

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f}) = [11.83 \quad 13.55 \quad 15.27 \quad 16.89 \quad 18.47]^T \text{ [}^\circ\text{C]}$$

Comparée avec la solution analytique, l'erreur absolue de ces valeurs est :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T} - \boldsymbol{\theta} = [-0.03 \quad 0.00 \quad -0.03 \quad 0.00 \quad -0.03]^T \text{ [}^\circ\text{C]}$$

Le terme  $\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} \equiv \mathbf{f}_b = [12000 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 24000]^T \text{ [W]}$  représente des flux de chaleur qui remplacent les sources de température de la Figure 3.16 (c) dans le circuit équivalent de la Figure 3.16 (d).

Pour les sens des flux figurés dans Figure 3.16 (e), la matrice d'incidence est :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice des conductances,  $\mathbf{G}$ , et le vecteur des sources de flux,  $\mathbf{f}$ , restent inchangés, et le vecteur de sources de température sont :

$$\mathbf{b} = [T_0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -T_e]^T = [10 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -20]^T \text{ [}^\circ\text{C]} .$$

La solution  $\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T \mathbf{GA})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{Gb} + \mathbf{f}) = [11.83 \ 13.55 \ 15.27 \ 16.89 \ 18.47]^T \text{ [}^\circ\text{C]}$  est inchangée. Notons que les valeurs du vecteur  $\mathbf{f}_b$  restent, aussi, inchangées :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Gb} \equiv \mathbf{f}_b = [12000 \ 0 \ 0 \ 0 \ 24000]^T \text{ [W]} .$$

### 3.4.2.3 Condition de type Dirichlet et de type Neumann

En appliquant *une condition de type Dirichlet à une limite et une condition de type Neumann* à l'autre, on obtient le circuit de la Figure 3.17.

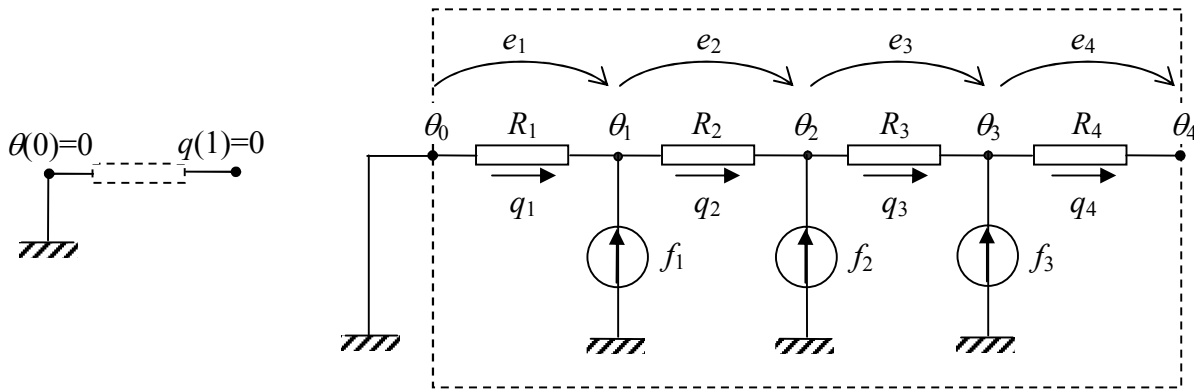


Figure 3.17 Résistances en série et sources de flux : conditions de type Dirichlet et Neumann

D'une manière similaire aux équations (3.69), on écrit les différences de température pour chaque résistance mais, cette fois, la différence étant connue,  $e_4 = 0$ , elle n'apparaît plus dans le système des équations. Les différences de température pour chaque résistance sont :

$$\begin{cases} e_1 = -\theta_1 \\ e_2 = \theta_1 - \theta_2 \\ e_3 = \theta_2 - \theta_3 \end{cases} ; \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} ; \mathbf{e} = -\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad (3.86)$$

où la matrice des connexions est :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \quad (3.87)$$

Pour la même raison, le flux  $q_4 = C_4 e_4 = 0$ , et les flux dans les résistances sont donnés par



$$\begin{cases} q_1 = G_1 e_1 \\ q_2 = G_2 e_2 \\ q_3 = G_3 e_3 \end{cases}; \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}; \mathbf{q} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e} \quad (3.88)$$

Le bilan des flux dans chaque nœud donne :

$$\begin{cases} q_1 - q_2 = -f_1 \\ q_2 - q_3 = -f_2 \\ q_3 - q_4 = -f_3 \end{cases}; - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}; \mathbf{f} = -\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{q} \quad (3.89)$$

En remplaçant (3.88) et (3.86) en (3.89), on obtient (Figure 3.14) :

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad (3.90)$$

où

$$\mathbf{K} \equiv \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Comme dans le cas précédent, si toutes les résistances sont égales,  $\mathbf{G} = (1/R) \cdot \mathbf{I}$ , alors

$$\mathbf{K} = \frac{1}{R} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

### 3.4.2.4 Conditions de type Neumann

En utilisant des *conditions de type Neumann aux deux limites*, on obtient le circuit de la Figure 3.18.

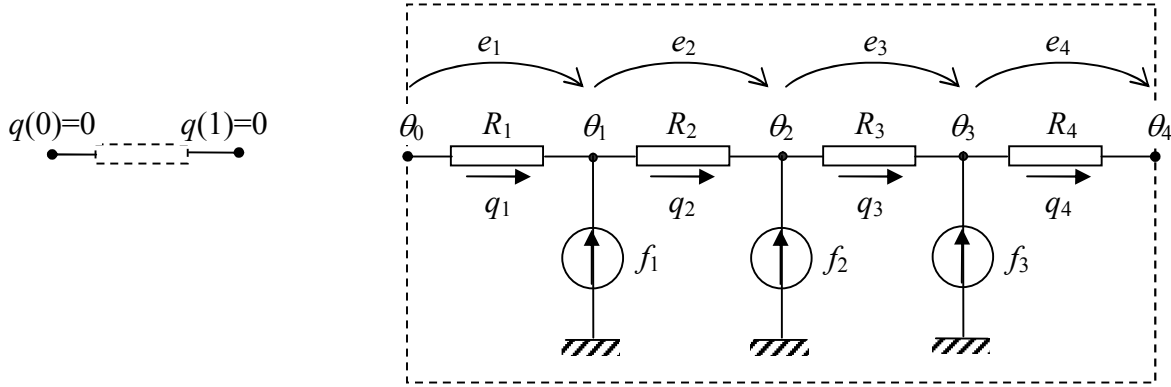


Figure 3.18 Résistances en série et sources de flux : conditions de type Neumann

Dans ce cas, comme  $e_1 = 0$  et  $e_4 = 0$ , les équations (3.69) devient :

$$\begin{cases} e_2 = \theta_1 - \theta_2 \\ e_3 = \theta_2 - \theta_3 \end{cases}; \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}; \mathbf{e} = -\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad (3.93)$$

Etant donnée que  $q_1 = 0$  et  $q_4 = 0$ , les flux dans les résistances sont :

$$\begin{cases} q_2 = G_2 e_2 \\ q_3 = G_3 e_3 \end{cases}; \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2 & 0 \\ 0 & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}; \mathbf{q} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e} \quad (3.94)$$

Le bilan des flux dans chaque nœud donne :

$$\begin{cases} -q_2 = -f_1 \\ q_2 - q_3 = -f_2 \\ q_3 = -f_3 \end{cases}; -\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}; \mathbf{f} = -\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{q} \quad (3.95)$$

En remplaçant (3.94) et (3.93) en (3.95), on obtient (Figure 3.14) :

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad (3.96)$$

où

$$\mathbf{K} \equiv \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Si  $\mathbf{G} = (1/R)\mathbf{I}$ , alors

$$\mathbf{K} \equiv \frac{1}{R} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

La matrice  $\mathbf{K}$  de l'équation (3.98) est *singulière* ou *non inversable* parce que les colonnes (ou les lignes) ne sont pas linéairement indépendantes ; par exemple, en additionnant la colonne 1 avec la colonne 2 et en multipliant par -1, on obtient la colonne 3. Ceci implique qu'il n'y a pas de solution au problème direct de la Figure 3.18. Pour résoudre le problème, on devrait choisir un nœud pour lequel la température est considérée comme référence,  $\theta = 0$ .



## 4 Conduction bi-dimensionnelle en régime permanent

Dans des nombreux cas, on doit considérer la distribution spatiale de la température. Pour résoudre le problème direct, c. à d. trouver la distribution de la température et du flux, on doit trouver la solution de l'équation de la chaleur avec les conditions aux limites propres au cas étudié. L'approche peut être *analytique*, pour des cas particuliers, ou *numérique*.

### 4.1 Résolution analytique par la séparation des variables

Les problèmes de conduction en deux dimensions peuvent être résolus en utilisant la méthode de séparation des variables. Pour illustrer cette méthode, considérons une barre rectangulaire avec trois cotées maintenues à la température  $T_1$  et la quatrième cotée maintenue à une température différente,  $T_2 \neq T_1$ . On considère le régime stationnaire sans sources internes. On suppose que le transfert de chaleur aux extrémités de la barre est négligeable,  $\partial^2 T / \partial z^2 = 0$ . On s'intéresse à la distribution de la température dans la barre (Figure 4.1 a).

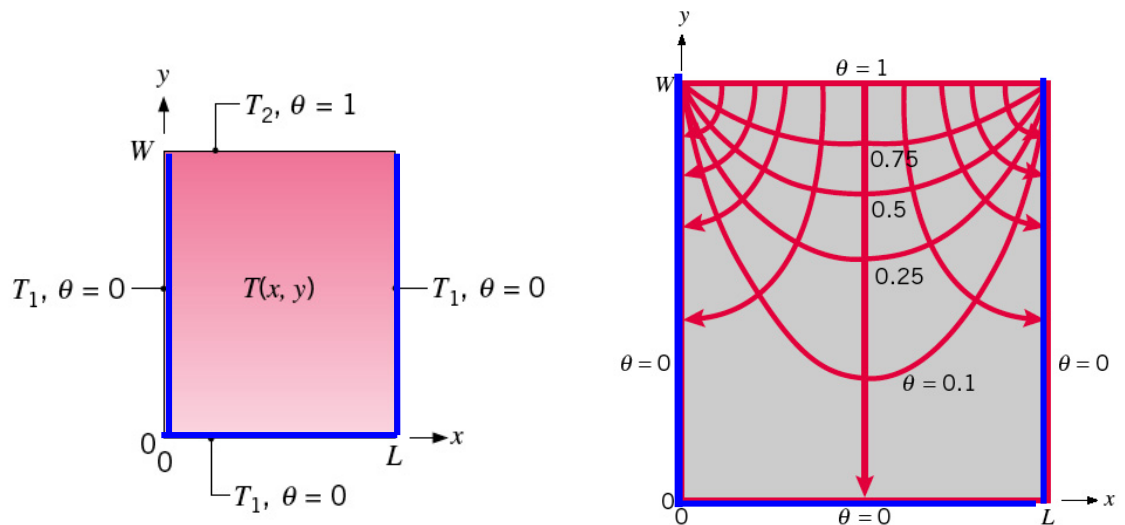


Figure 4.1 Conduction bi- dimensionnelle : a) section d'une barre rectangulaire ; b) isothermes et lignes de flux (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

Dans les conditions du problème, l'équation de la chaleur est l'équation de Laplace (2.28) qui devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
T(0, y) &= T_1 \\
T(L, y) &= T_1 \\
T(x, 0) &= T_1 \\
T(x, W) &= T_2
\end{aligned}
\tag{4.2}$$

Par un changement de variable,

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}
\tag{4.3}$$

l'équation (4.1) devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0
\tag{4.4}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned}
\theta(0, y) &= 0 \\
\theta(L, y) &= 0 \\
\theta(x, 0) &= 0 \\
\theta(x, W) &= 1
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

Le principe de la séparation des variables est de supposer que la solution peut être écrite comme un produit de deux fonctions, chacune dépendant d'une seule variable,

$$\theta(x, y) = X(x) \cdot Y(y)
\tag{4.6}$$

En substituant (4.6) en (4.4) et en divisant par  $XY$  on obtient :

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}
\tag{4.7}$$

L'équation (4.7) a effectivement les variables séparées : le membre de gauche dépend seulement de  $x$  et le membre de droite seulement de  $y$ . Comme les deux variables,  $x$  et  $y$ , sont indépendantes, les deux membres doivent être égaux à une constante strictement positive,  $\lambda^2$ . On obtient deux équations différentielles de premier ordre :

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (4.8)$$

et

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \quad (4.9)$$

avec les solutions générales :

$$X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \quad (4.10)$$

et

$$Y = C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y} \quad (4.11)$$

La solution générale du problème (4.4) - (4.5) est

$$\theta = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x)(C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}) \quad (4.12)$$

Les quatre constantes s'obtiennent en appliquant les conditions aux limites. La conditions  $\theta(0, y) = 0$  implique que  $C_1 = 0$ . La condition  $\theta(x, 0) = 0$  implique que

$$C_2 \sin \lambda x (C_3 + C_4) = 0$$

qui est satisfaite si  $C_3 = -C_4$  ou  $C_2 = 0$ . La deuxième solution,  $C_2 = 0$ , impliquerait que  $\theta(x, y) = 0$  ce qui ne satisfait pas la conditions à la limite  $\theta(x, W) = 1$ . La condition  $\theta(L, y) = 0$  implique

$$C_2 C_4 \sin \lambda L (e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}) = 0 \quad (4.13)$$

Comme  $C_4 = -C_3$ ,  $C_4$  ne peut pas être nul (comme  $C_2$ ). Pour que (4.13) soit nul,  $\lambda$  doit avoir des valeurs discrètes pour lesquelles  $\sin \lambda L = 0$  :

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.14)$$

où  $n \neq 0$  pour que  $\theta(x, y) \neq 0$ . La solution est de la forme :

$$\theta = C_2 C_4 \sin \frac{n\pi}{L} (e^{n\pi y/L} - e^{-n\pi y/L}) \quad (4.15)$$

En combinant les constantes et en utilisant la condition à limite restante, on obtient la forme finale de la solution (Incropera et al., 2007) :

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)} \quad (4.16)$$

qui est une série convergente donnant les valeurs  $\theta(x, y)$  à chaque point (Figure 4.1 b). Des solutions exactes ont été obtenues pour différentes configurations et sont présentées dans des ouvrages spécialisés (Incropera et al., 2007).

## 4.2 Résolution numérique des problèmes directs

Les solutions analytiques sont possibles pour des situations particulières. Dans beaucoup de cas, on fait appel aux méthodes numériques. Les méthodes numériques sont basées sur les *différences finies*, les *volumes finis*, ou les *éléments finis*. On présente ici le principe des différences finies.

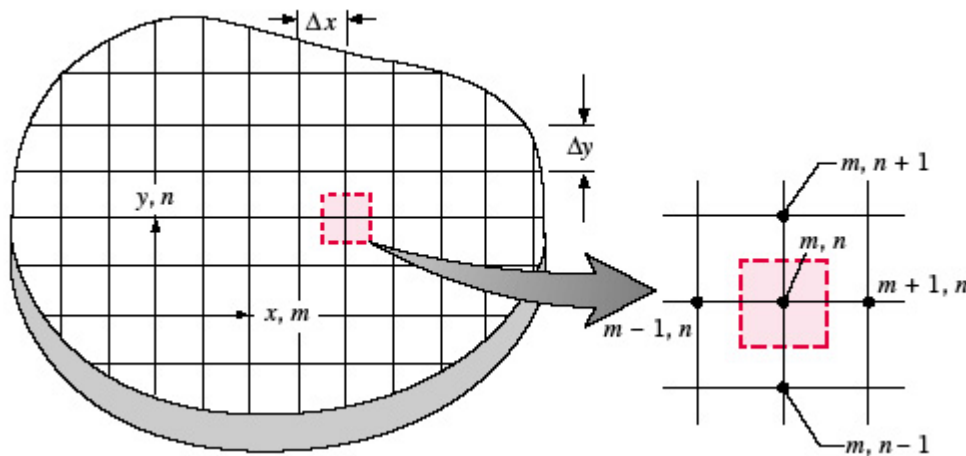


Figure 4.2 Discrétisation d'un domaine (adaptée d'après Incropera et al., 2007)



Dans la *méthode de différences finies*, les équations aux dérivées partielles sont *discrétisées* en divisant le domaine en cellules et en considérant leur centre comme point de référence ou *nœud*, qui représente la température moyenne de la région (Figure 4.2). La sélection des nœuds dépend de la géométrie et de la précision souhaitée pour les calculs.

Dans la *méthode des volumes finis* le domaine est divisé à l'aide d'un maillage. En utilisant la loi de la conservation de l'énergie en régime stationnaire (ou d'équilibre) pour chaque volume, l'équation de bilan (1.2) devient :

$$\dot{E}_e - \dot{E}_s + \dot{E}_g = 0 \quad (4.17)$$

Les flux entrant et sortant dépendent de la différence de la température et de la résistance entre les nœuds. Pour le volume de la Figure 4.3,

$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = -\lambda A \frac{d\theta}{dx} = \lambda(\Delta y \cdot 1) \frac{\theta_{m-1,n} - \theta_{m,n}}{\Delta x} \quad (4.18)$$

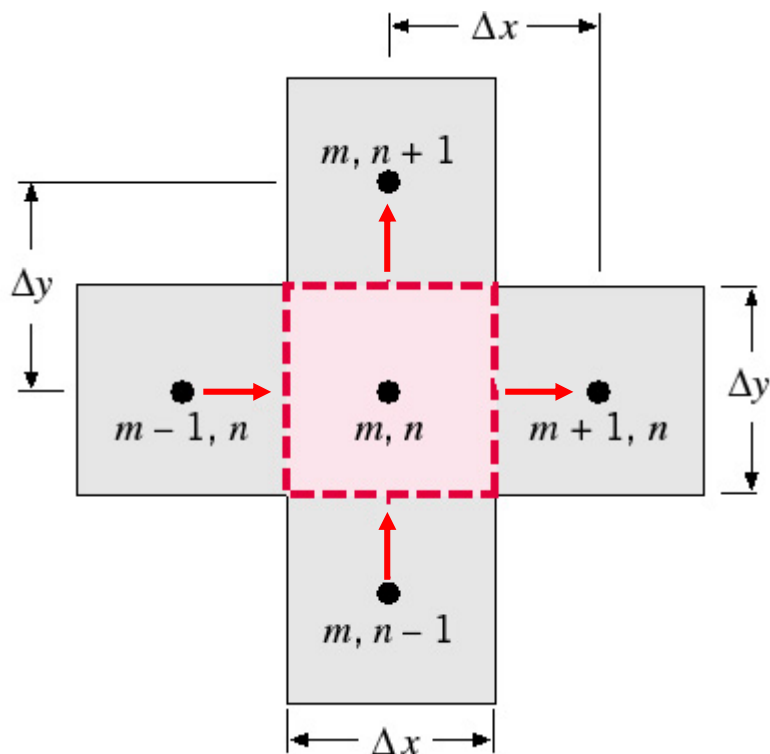


Figure 4.3 Conduction dans une maille (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

La quantité  $A = \Delta y \cdot 1$  est la surface de transfert de chaleur et le terme  $(\theta_{m,n} - \theta_{m-1,n}) / \Delta x$  est la forme discrète du gradient de la température dans la direction  $x$ . Les autres flux s'écrivent d'une manière similaire. Les nœuds numérotés forment un réseau de résistances thermiques :

$$R_{i,j} = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{A} \quad (4.19)$$

où  $L = \Delta x$  et  $A = \Delta y \cdot 1$  pour les résistance sur la direction  $x$  et  $L = \Delta y$  et  $A = \Delta x \cdot 1$  pour les résistance sur la direction  $y$ ,  $\Delta x$  et  $\Delta y$  étant les distances du maillage sur les deux directions (Figure 4.3).

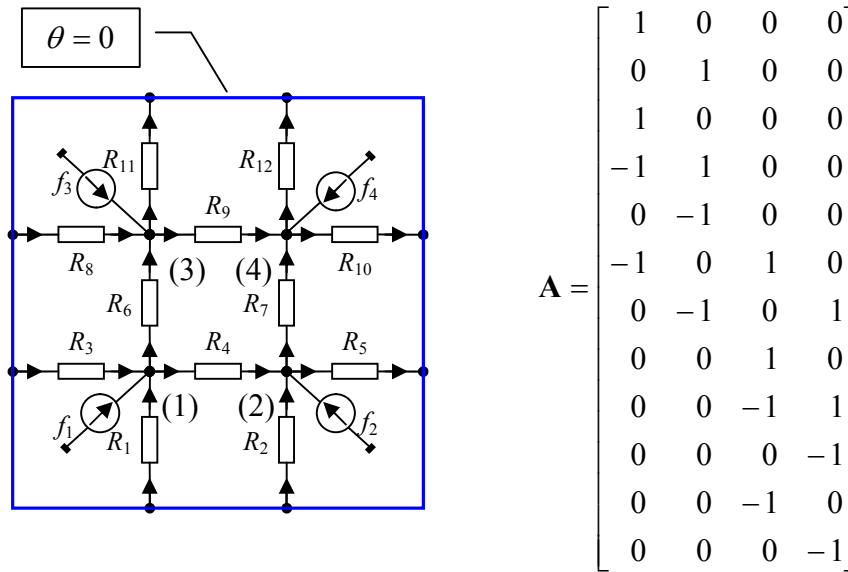


Figure 4.4 Système 2-D soumis aux conditions de Dirichlet : a) schéma ; b) matrice de connexions

Le principe de l'analyse numérique des réseaux thermiques est le même que celui présenté pour le cas unidimensionnelle (Figure 3.14). Considérons une plaque rectangulaire avec trois conditions aux limites :

- conditions de type Dirichlet pour toutes les côtés ;
- conditions combinées de type Dirichlet et Neumann ;
- conditions de type Neumann pour toutes les côtés.

Dans le cas des conditions de Dirichlet (Figure 4.4), on obtient l'équation du circuit

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\theta} \quad (4.20)$$

où  $\mathbf{f}$  est le vecteur des sources internes d'énergie,  $f_i = p(\Delta x \cdot \Delta y \cdot 1)$ , avec  $p$  [W/m<sup>3</sup>] la densité de sources d'énergie.

$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A}$ , avec  $\mathbf{G}$  la matrice diagonale contenant les conductances. Si  $\mathbf{G} = (1/R)\mathbf{I}$ , alors,

$$\mathbf{K} = \frac{1}{R} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

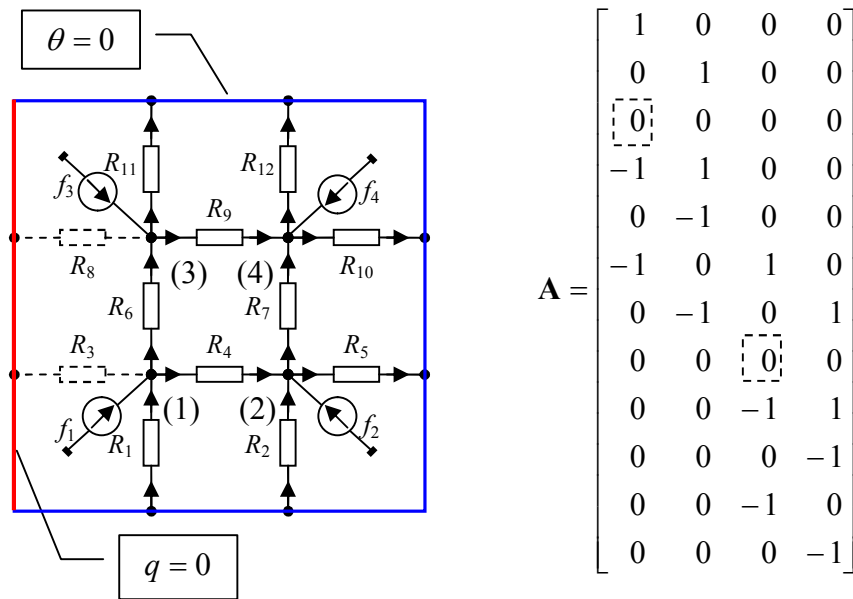


Figure 4.5 Système 2-D soumis aux conditions de Dirichlet et de Neumann : a) schéma ; b) matrice de connexions

Dans le cas de conditions de Dirichlet et de Neumann (Figure 4.5), la matrice de connexions de l'exemple précédent change dans le sens que les éléments correspondant aux résistances ayant un flux nul, le flux 3 vers le nœud 1 et le flux 8 vers le nœud 3 deviennent nuls,  $a_{3,1} = 0$ ,  $a_{8,3} = 0$  (carrés pointillés sur la Figure 4.5). Si  $\mathbf{G} = \mathbf{I}$ , alors,

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

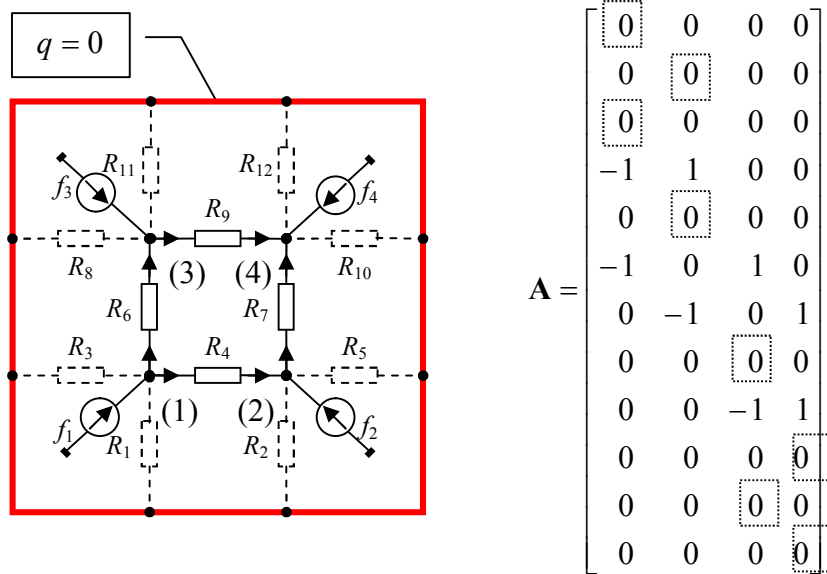


Figure 4.6 Système 2-D soumis aux conditions de Neumann : a) schéma ; b) matrice de connexions

Dans le cas des conditions de Neumann, la matrice de connexions change à nouveau (Figure 4.6). Si  $\mathbf{G} = \mathbf{I}$ , alors,

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

On remarque que la matrice  $\mathbf{K}$  est non-inversible. Physiquement, on doit considérer un nœud comme référence pour les températures pour que le problème ait une solution unique.

Une ligne courante de la matrice  $\mathbf{K}$  des équations (4.21), (4.22) ou (4.23) représente la forme discrète de la loi de Fourier de l'équation (4.1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \Big|_{m,n} &= \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{m+1/2,n} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{m-1/2,n}}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{\theta_{m+1,n} - \theta_{m,n}}{\Delta x} - \frac{\theta_{m,n} - \theta_{m-1,n}}{\Delta x}}{\Delta x}, \\ &= \frac{\theta_{m-1,n} - 2\theta_{m,n} + \theta_{m+1,n}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

et

$$\left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right|_{m,n} = \frac{\theta_{m,n-1} - 2\theta_{m,n} + \theta_{m,n+1}}{(\Delta y)^2} \quad (4.25)$$

Si  $\Delta x = \Delta y$ ,

$$-(\Delta x)^2 \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = 4\theta_{m,n} - \theta_{m,n-1} - \theta_{m,n+1} - \theta_{m-1,n} - \theta_{m+1,n} \quad (4.26)$$

L'équation (4.26) change quand les conditions aux limites sont de type Neumann (Figure 4.7).

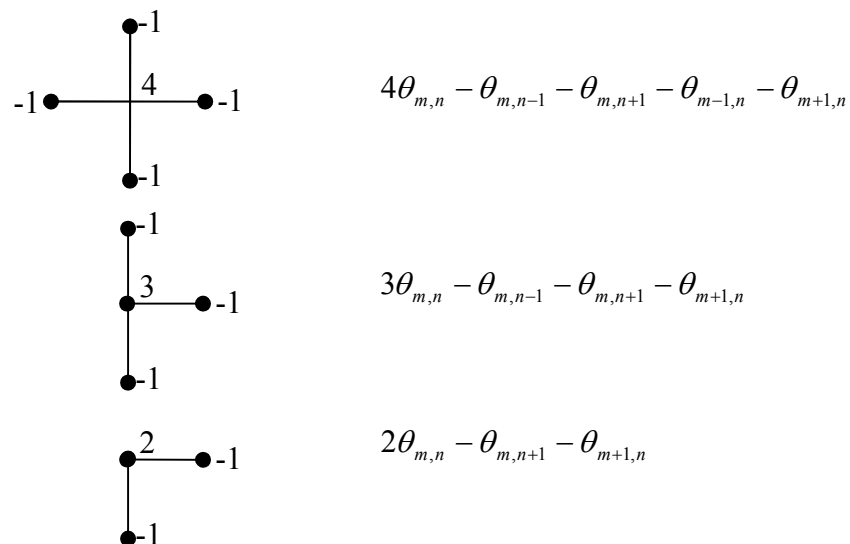


Figure 4.7 Schémas de calcul des équations aux différences finis

### 4.3 Algorithme pour la résolution des problèmes linéaires d'équilibre thermique

Le problème directe de la conduction en régime stationnaire est de déterminer la distribution des températures et les flux quand on connaît les résistances et les sources (de température et de flux). Si les résistances sont constantes, le problème est linéaire et il peut être résolu d'une manière algorithmique (Figure 4.9).

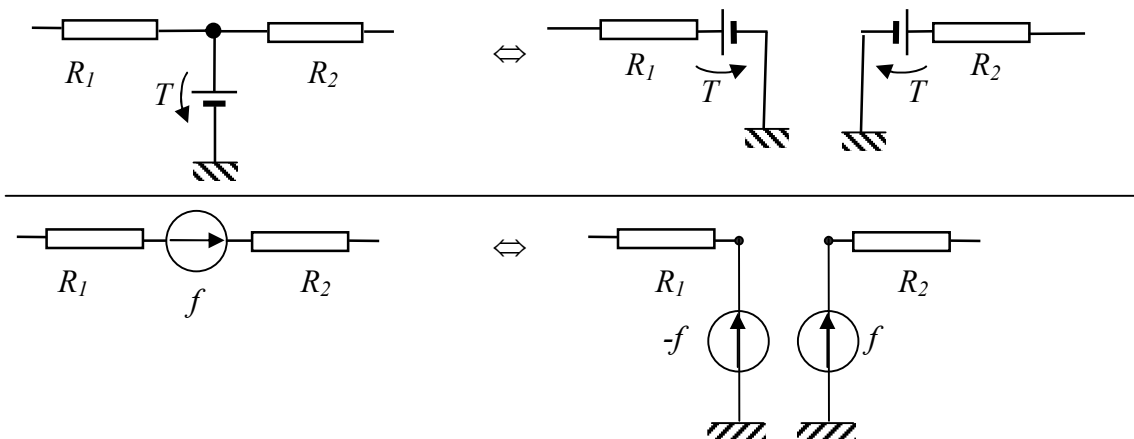


Figure 4.8 Cas spéciaux des sources

- 1. Mettre le circuit thermique sur la forme discrète de l'équation de Poisson** (Figure 3.5). Dans le cas où les sources de température ne sont pas sur les branches ou les sources de flux ne sont pas dans les nœuds, on les repositionne (Figure 4.8).
- 2. Numéroté les nœuds.** On numérote les nœuds ; les sources de flux auront les mêmes numéros (Figure 4.9 b).
- 3. Numéroté les branches et leurs assigner une direction** conformément à la convention des signes de la Figure 3.5. Dans le cas où il y a une source sur la branche, le sens du flux est de la source vers la résistance (Figure 4.9 c).
- 4. Ecrire la matrice des connexions**, basée sur le graphe du circuit (Figure 4.9 d). Si le flux sort d'un nœud, on note  $-1$  et si le flux entre dans le nœud, on note  $1$  ; si le flux n'est pas connecté au nœud, on note  $0$ . Pour le graphe de la Figure 4.9 (d), la matrice des connexions est :

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

où les colonnes correspondents au nœuds (températures) et les lignes aux branches (flux).

- 5. Ecrire les matrices et résoudre le problème.**

La matrice d'incidence réduite,  $\mathbf{A}$ , s'obtient en éliminant de la matrice des connexions  $\mathbf{A}_0$  les colonnes correspondants aux température de référence (c. à d. nœuds reliés à la « masse »). Pour le circuit de la Figure 4.9 c, en éliminant les colonnes 3 et 4, on obtient :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice des conductances est :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1/R_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_4 \end{bmatrix}$$

Le vecteur  $\mathbf{b}$  contient les sources des températures ; sa dimension est égale au nombre des branches (c. à d. des flux). Le signe de la température source dépend du signe du flux ; si la chute de température est dans le même sens que le flux, le signe de la source de température est négatif ; si non, il est positif. Pour le circuit de la Figure 4.9 c,

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4]^T = [T_1 \quad -T_2 \quad T_3 \quad T_4]^T.$$

Le vecteur  $\mathbf{f}$  contient les sources de flux ; sa dimension est égale au nombre des nœuds. Pour le circuit de la Figure 4.9 c,

$$\mathbf{f} = [f_1 \quad f_2]^T.$$

Le vecteur des températures (c. à d. la solution du problème) est :

$$\boldsymbol{\theta} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f})$$

En sachant les températures, on peut trouver les flux

$$\mathbf{q} = \mathbf{G}(-\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b})$$

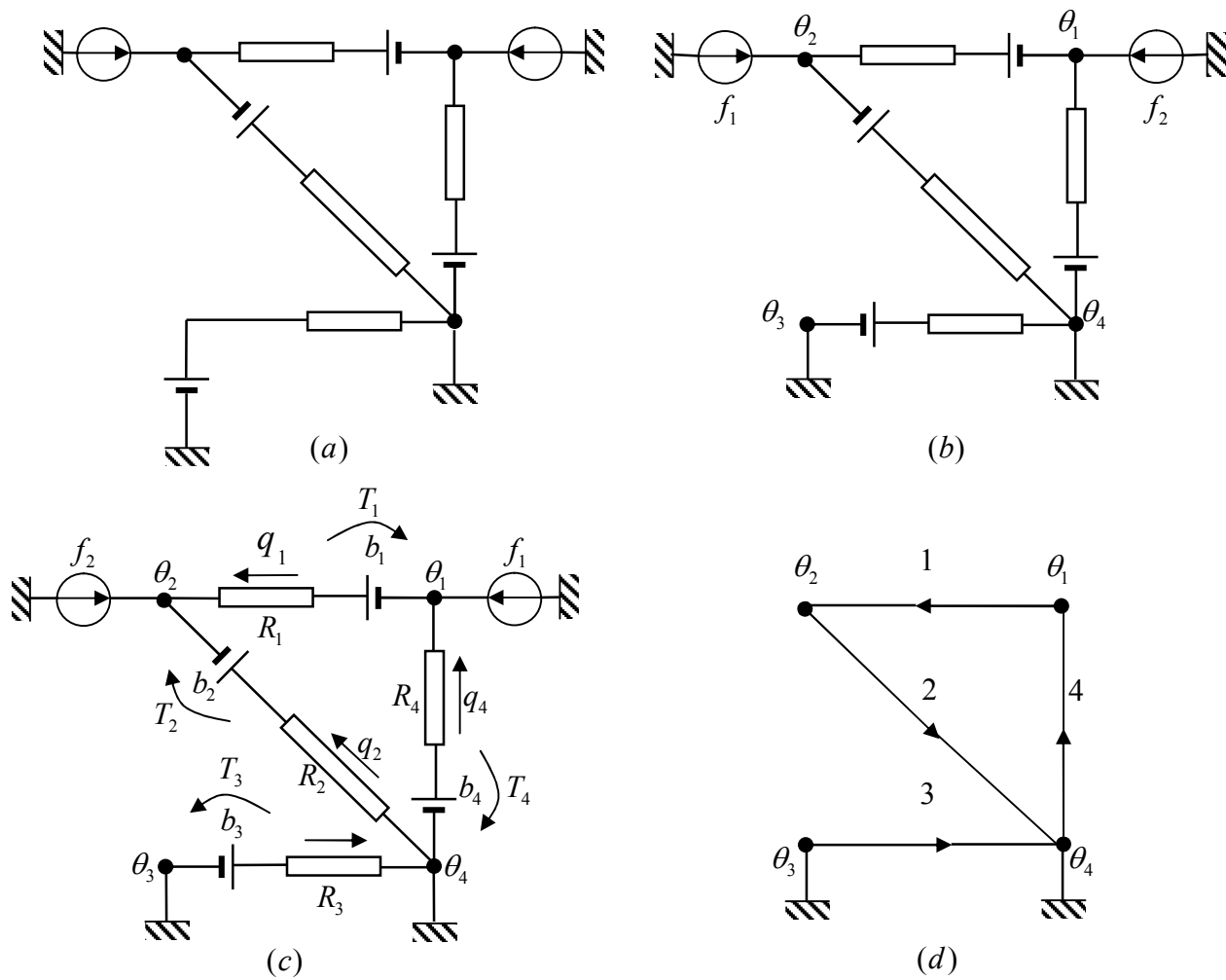


Figure 4.9 Résolution des problèmes linéaires d'équilibre thermique : a) transformation des branches ; b) numérotation des nœuds ; c) numérotation des branches et assignation des sens ; d) graphe du circuit.



## 5 Conduction en régime dynamique

Si les conditions d'équilibre sont variables, alors le transfert de chaleur dépend de temps. Les variations de température et de flux se produisent jusque quand un nouveau équilibre est atteint.

### 5.1 Homogénéité spatiale de la température

Dans le cas où le gradient de température dans un corps est nul à chaque instant de temps, l'analyse se simplifie, le phénomène de conduction n'étant plus traité. En fait, une telle condition impliquerait que la résistance thermique est nulle, ce qui est impossible. Mais cette approximation est valable si la résistance de conduction dans le solide est négligeable en comparaison avec la résistance thermique entre le solide et son milieu ambiant.

#### 5.1.1 Chauffage instantané

Considérons un corps qui se trouve dans l'air à la température  $T_0$  et qui, au moment  $t = 0$  est trempé dans un liquide à la température  $T_\infty$  (Figure 5.1). On fait l'hypothèse que la température a une distribution spatiale uniforme dans le corps.

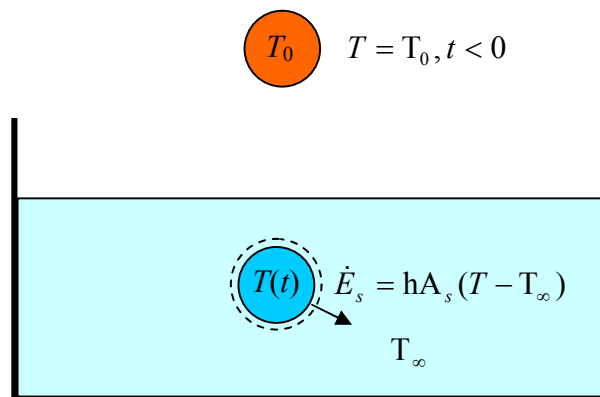


Figure 5.1 Trempe d'un solide dans un liquide

Comme il n'y a pas de flux d'énergie entrant ou généré, l'expression de la conservation de l'énergie (1.2) devient :

$$\dot{E}_{st} = -\dot{E}_s \quad (5.1)$$

ou

$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = -h A_s (T - T_\infty) \quad (5.2)$$

En notant

$$\theta \equiv T - T_\infty \quad (5.3)$$

et en tenant compte que  $T_\infty$  est constante, l'équation (5.2) devient :

$$\frac{\rho V c_p}{h A_s} \frac{d\theta}{dt} = -\theta \quad (5.4)$$

En séparant les variables et en intégrant l'équation (5.4) à partir des conditions initiales  $\theta_0 = T_0 - T_\infty$  et  $t = 0$ , on obtient :

$$\frac{\rho V c_p}{h A_s} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = - \int_0^t dt \quad (5.5)$$

L'évaluation de l'intégrale donne le temps  $t$  nécessaire pour que la température atteigne la valeur  $\theta$  :

$$\frac{\rho V c_p}{h A_s} \ln \frac{\theta_0}{\theta} = t \quad (5.6)$$

ou la variation de la température en fonction du temps :

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp(-t / \tau_t) \quad (5.7)$$

où

$$\tau_t \equiv \frac{\rho V c_p}{h A_s} = R_t C_t \quad (5.8)$$

est la constante de temps,  $R_t \equiv 1/h A_s$  est la résistance thermique et  $C_t \equiv \rho V c_p$  est la capacité thermique.

Le flux total d'énergie transféré jusqu'au moment  $t$ ,

$$Q = h A_s \int_0^t \theta \cdot dt = h A_s \int_0^t \theta_0 \exp \left[ - \left( \frac{h A_s}{\rho V c_p} \right) t \right] dt = \rho V c_p \theta_0 \left[ 1 - \exp \left( - \frac{t}{\tau_t} \right) \right] \quad (5.9)$$

représente la variation de l'énergie interne du solide,

$$-Q = \Delta E_{st} \quad (5.10)$$

### 5.1.2 Validité de l'hypothèse d'homogénéité

L'hypothèse de l'homogénéité spatiale de la température simplifie le problème dynamique. Pour que cette hypothèse soit valide, à chaque instant le gradient de température dans le solide doit être négligeable en rapport avec le gradient de température dans la couche limite thermique. Dans le cas du transfert de chaleur entre un fluide et un solide, le flux transféré par conduction à la surface  $S$  du solide est égal au flux transféré par convection ; dans le cas de la conduction unidimensionnelle,

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_S \cong \lambda \frac{T_{S-\Delta x} - T_S}{\Delta x} \quad (5.11)$$

et

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_S = h(T_S - T_\infty) \quad (5.12)$$

Le rapport

$$\text{Bi} = \frac{\frac{\Delta x}{\lambda}}{\frac{1}{h}} = \frac{T_{S-\Delta x} - T_S}{T_S - T_\infty} \quad (5.13)$$

est un nombre adimensionnel, nommé nombre de Biot, représentant le rapport entre la résistance à la conduction et celle à la convection ; il est égale au rapport entre la variation de la température dans le solide et dans la couche limite. Si  $\text{Bi} \ll 1$ , la variation de la température dans le solide peut être négligée.

Le nombre de Biot est en fonction d'une longueur caractéristique  $L_c$ ,

$$\text{Bi} \equiv \frac{hL_c}{\lambda} \quad (5.14)$$

qui est usuellement définie comme le rapport entre le volume et la superficie latérale du solide,

$$L_c = \frac{V}{A_s} \quad (5.15)$$

Cette définition facilite le calcul pour des géométries complexes. Pour la conduction unidimensionnelle,

$L_c = L/2$ , pour une paroi plan, où  $L$  est l'épaisseur de la paroi ;

$L_c = r/2$ , pour un cylindre long, où  $r$  est le rayon du cylindre ;

$L_c = r/3$ , pour une sphère, où  $r$  est le rayon de la sphère.

## 5.2 Variation unidimensionnelle de la température

Quand le gradient de la température n'est pas négligeable, pour des cas spéciaux, comme le mur plan, le cylindre infini ou la sphère, la variation de la température peut être considérée unidimensionnelle. S'il n'y a pas des sources internes et si la conductivité est constante, l'équation de la chaleur devient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5.16)$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (5.17)$$

où

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c} [\text{m}^2/\text{s}] \quad (5.18)$$

est la *diffusivité thermique*. L'équation (5.17) nécessite trois conditions aux limites. Ces conditions sont en général la *valeur initiale* et deux *conditions aux limites*.

### 5.2.1 Chauffage périodique d'un espace semi-infini

La température de la surface du sol a des variations diurnes et saisonnières qui peuvent être considérées, en première approximation, comme sinusoïdales (Figure 5.2). Considérons un espace semi-infini dans la région  $x \geq 0$  délimité par une surface à  $x = 0$ . On suppose que la variation de la température est périodique en fonction du temps :

$$T(0, t) \equiv T_s = T_0 + \Delta T \cos \omega t \quad (5.19)$$

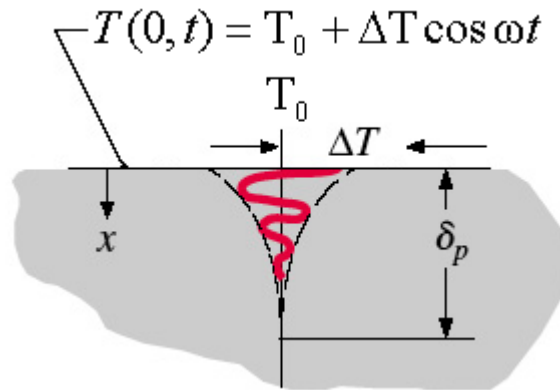


Figure 5.2 Chauffage périodique d'un espace semi-infini (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

On considère que la température à l'intérieur du sol tend vers la température moyenne de l'extérieure,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T = T_0 \quad (5.20)$$

La température de la surface a une variation périodique et l'équation de la chaleur est linéaire. En conséquence, la variation de la température dans le sol sera aussi périodique, mais avec un déphasage qui augmente avec la profondeur dû à l'augmentation de la capacité thermique,

$$T(x, t) = X(x) \cos(\omega t + \varphi(x)) \quad (5.21)$$

Tenant compte que

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos \varphi \cdot \cos \omega t - \sin \varphi \cdot \sin \omega t \quad (5.22)$$

on peut écrire l'équation (5.21) sous la forme

$$T(x, t) = T_0 + X_1(x) \cos \omega t + X_2(x) \sin \omega t \quad (5.23)$$

En introduisant l'équation (5.23) dans l'équation (5.17), on obtient

$$-\omega X_1 \sin \omega t + \omega X_2 \cos \omega t = \alpha \frac{d^2 X_1}{dx^2} \cos \omega t + \alpha \frac{d^2 X_2}{dx^2} \sin \omega t \quad (5.24)$$

d'où

$$\begin{cases} -\omega X_1 = \alpha \frac{d^2 X_2}{dx^2} \\ \omega X_2 = \alpha \frac{d^2 X_1}{dx^2} \end{cases} \quad (5.25)$$

On trouve une expression en  $X_2$  en exprimant  $X_1$  en fonction de  $X_2$  et en substituant dans la deuxième équation,

$$\frac{d^4 X_2}{dx^4} + \frac{\omega^2}{\alpha^2} X_2 = 0 \quad (5.26)$$

On suppose que la solution de l'équation différentielle (5.26) est de la forme

$$X_2(x) = ce^{ax} \quad (5.27)$$

Comme la solution (5.27) doit satisfaire l'équation (5.26), alors

$$a^4 + \frac{\omega^2}{\alpha^2} = 0 \quad (5.28)$$

d'où

$$a = \pm \left( \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \right) \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} \quad (5.29)$$

La solution générale de l'équation différentielle (5.26) est

$$\begin{aligned} X_2 = & c_1 \exp\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} x\right) \\ & + c_2 \exp\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} x\right) \\ & + c_3 \exp\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} x\right) \\ & + c_4 \exp\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} x\right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Comme la variation de la température baisse avec la profondeur,  $c_1 = c_2 = 0$ , l'équation (5.30) devient

$$X_2 = \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \left[ c_3 \exp\left(-ix\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) + c_4 \exp\left(ix\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \right] \quad (5.31)$$

ou, en retenant seulement la partie réelle de l'équation (5.31),

$$X_2 = \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \left[ b_1 \cos\left(-ix\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) + b_2 \cos\left(ix\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \right] \quad (5.32)$$

Par symétrie, la fonction  $X_1$  a la forme

$$X_1 = \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \left[ b_3 \cos\left(-ix\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) + b_4 \cos\left(ix\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \right] \quad (5.33)$$

Les constants  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  et  $b_4$  s'obtient en considérant qu'elles doivent satisfaire le système d'équations (5.25), d'où

$$\begin{cases} b_1 = -b_4 \\ b_2 = b_3 \end{cases} \quad (5.34)$$

et l'équation (5.21), d'où

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_3 = \Delta T \end{cases} \quad (5.35)$$

La variation de la température (5.23) devient

$$T = T_0 + \Delta T \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x\right) \cdot \left( \cos \omega t \cos \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x + \sin \omega t \sin \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x \right) \quad (5.36)$$

ou

$$T = T_0 + \Delta T \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x\right) \cdot \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x\right) \quad (5.37)$$

L'équation (5.37) montre qu'à la profondeur :

$$d = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}} \quad (5.38)$$

les fluctuations diminuent de  $1/e$ .

## 5.2.2 Chauffage instantané d'un espace semi-infini

Considérons un espace semi-infini de température uniforme  $T_\infty$ . Supposons que la température à la surface varie brusquement de  $T_\infty$  à  $T_0$  (Figure 5.3).

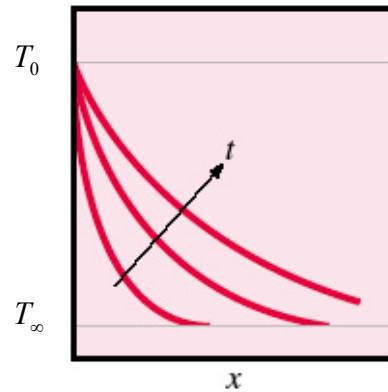


Figure 5.3 Chauffage instantané d'un espace semi-infini

La distribution de la température est la solution de l'équation différentielle :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, x > 0, t > 0 \quad (5.39)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} T &= T_\infty, & x > 0 & \quad t = 0 \\ T &= T_0, & x = 0 & \quad t > 0 \\ T &\rightarrow T_\infty, & x \rightarrow \infty & \quad t > 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

En utilisant la température adimensionnelle

$$\theta \equiv \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad (5.41)$$

l'équation dans la nouvelle inconnue est :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, x > 0, t > 0 \quad (5.42)$$

avec les conditions aux limites



$$\begin{aligned}
\theta(x,0) &= 0 \\
\theta(0,t) &= 1 \\
\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x,t) &= 0
\end{aligned} \tag{5.43}$$

L'équation aux dérivées partielles (5.42) avec les conditions aux limites (5.43) peut être résolue en utilisant une transformation nommée la *similarité*. On suppose que  $\theta(x,t)$ , la solution de l'équation (5.42), est fonction seulement de la *distance de diffusion thermique* :

$$\eta \equiv \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}. \tag{5.44}$$

La relation de similarité (5.44) implique que la dépendance spatiale à un instant peut être obtenue à partir de la dépendance spatiale à un autre instant en modifiant l'échelle de  $x$  par la racine carrée du temps.

Pour écrire l'équation aux dérivées partielles (5.42) avec les conditions aux limites (5.43) en utilisant la variable  $\eta$ , on utilise la théorème de dérivation des fonctions composée pour obtenir les dérivées :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta} \left( -\frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{\alpha t}} \frac{1}{t} \right) = \frac{d\theta}{d\eta} \left( -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \right) \tag{5.45}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d\theta}{d\eta} \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \tag{5.46}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha t}} \frac{d\theta}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{4\alpha t} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2}. \tag{5.47}$$

L'équation aux dérivées partielles (5.42) devient une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} = -2\eta \frac{d\theta}{d\eta} \tag{5.48}$$

Pour les conditions aux limites, on tient compte que pour  $x = 0$ , il en résulte  $\eta = 0$  et que pour  $x = \infty$  ou  $t = 0$ , il en résulte  $\eta = \infty$ . Les conditions aux limites (5.43) devient :

$$\begin{aligned}
\eta(\infty) &= 0 \\
\eta(0) &= 1
\end{aligned} \tag{5.49}$$

L'équation (5.49) peut être résolue par la séparation des variables. En notant :

$$\phi \equiv \frac{d\theta}{d\eta} \quad (5.50)$$

l'équation (5.49) devient :

$$\frac{d\phi}{d\eta} = -2\eta\phi \quad (5.51)$$

ou

$$\frac{d\phi}{\phi} = -2\eta d\eta . \quad (5.52)$$

L'intégration de l'équation (5.52) donne :

$$\ln \phi - \ln c = -\eta^2 \quad (5.53)$$

où  $-\ln c$  est la constante d'intégration, ou :

$$\phi \equiv \frac{d\theta}{d\eta} = c \exp(-\eta^2) \quad (5.54)$$

En intégrant l'équation (5.54), on obtient  $\theta$  :

$$\theta = c \int_0^{\eta} \exp(-u^2) du + \theta(0) \quad (5.55)$$

où  $u$  est une variable d'intégration qui est éliminée en effectuant l'intégration. La constante d'intégration s'obtient en tenant compte que  $\theta(0) = 1$  et  $\theta(\infty) = 0$ ,

$$c \int_0^{\infty} \exp(-u^2) du = -1 \quad (5.56)$$

et de la définition de la fonction d'erreur de Gauss :

$$\operatorname{erf}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-u^2) du \quad (5.57)$$

Tableau 5.1 Fonction des erreurs Gaussienne  $\operatorname{erf}(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-v^2} dv$  et  $\operatorname{erfc}(w) = 1 - \operatorname{erf}(w)$

$w$	$\operatorname{erf}(w)$	$\operatorname{erfc}(w)$	$w$	$\operatorname{erf}(w)$	$\operatorname{erfc}(w)$	$w$	$\operatorname{erf}(w)$	$\operatorname{erfc}(w)$
0	0	1	0.36	0.3893	0.6107	1.04	0.8586	0.1414
0.02	0.0226	0.9774	0.40	0.4284	0.5716	1.08	0.8733	0.1267
0.04	0.0451	0.9549	0.44	0.4662	0.5338	1.12	0.8868	0.1132

0.06	0.0676	0.9324	0.48	0.5027	0.4973	1.16	0.8991	0.1009
0.08	0.0901	0.9099	0.52	0.5379	0.4621	1.20	0.9103	0.0897
0.10	0.1125	0.8875	0.56	0.5716	0.4284	1.30	0.9340	0.0660
0.12	0.1348	0.8652	0.60	0.6039	0.3961	1.40	0.9523	0.0477
0.14	0.1569	0.8431	0.64	0.6346	0.3654	1.50	0.9661	0.0339
0.16	0.1790	0.8210	0.68	0.6638	0.3362	1.60	0.9763	0.0237
0.18	0.2009	0.7991	0.72	0.6914	0.3086	1.70	0.9838	0.0162
0.20	0.2227	0.7773	0.76	0.7175	0.2825	1.80	0.9891	0.0109
0.22	0.2443	0.7557	0.80	0.7421	0.2579	1.90	0.9928	0.0072
0.24	0.2657	0.7343	0.84	0.7651	0.2349	2.00	0.9953	0.0047
0.26	0.2869	0.7131	0.88	0.7867	0.2133	2.20	0.9981	0.0019
0.28	0.3079	0.6921	0.92	0.8068	0.1932	2.40	0.9993	0.0007
0.30	0.3286	0.6714	0.96	0.8254	0.1746	2.60	0.9998	0.0002
0.32	0.3491	0.6509	1.00	0.8427	0.1573	2.80	0.9999	0.0001
0.34	0.3694	0.6306				3.00	1.0000	0.0000

La fonction d'erreur,  $\operatorname{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)$ , représente la probabilité qu'une variable aléatoire normale centrée réduite prend une valeur dans l'intervalle  $[-u \ u]$ . Comme, si  $u = \infty$ , alors  $\operatorname{erf}(u) = 1$ , il en résulte que

$$\int_0^{\infty} \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (5.58)$$

Les équations (5.56) et (5.58) donnent la constante d'intégration  $c$ ,

$$c = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}. \quad (5.59)$$

Avec (5.57) et (5.59), l'expression (5.55) devient

$$\theta = 1 - \operatorname{erf}(\eta) = \operatorname{erfc}(\eta) \quad (5.60)$$

ou

$$\theta = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (5.61)$$

où  $\operatorname{erfc}(z) \equiv 1 - \operatorname{erf}(z)$  est la fonction d'erreur complémentaire. En écrivant l'équation (5.61) en fonction des variables initiales, on obtient

$$\frac{T(x,t) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \quad (5.62)$$

Si  $x = 0$ , alors  $\operatorname{erfc}(0) = 1$  et  $T = T_0$ . Quand  $t = 0$ , alors  $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$  pour  $x > 0$  et  $T = T_\infty$ . L'équation (5.62) indique une variation de la température dans l'espace pour chaque instant  $t > 0$ , ce qui implique une propagation à vitesse infinie de l'information donnée par la condition à la limite  $x = 0$ . Cette vitesse de propagation est physiquement impossible (elle étant contraire au principe de causalité, un principe fondamental de la physique) et représente une limitation de la loi de Fourier. Néanmoins, cette limitation a des incidences seulement pour des échelles de temps très petites. Si

$$\frac{\rho\alpha}{\Delta t} \ll 1 \quad (5.63)$$

alors la loi de Fourier est applicable.

Le flux de surface s'obtient en utilisant la loi de Fourier (2.4) en  $x = 0$  :

$$\begin{aligned} \varphi &= -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \\ &= -\lambda(T_0 - T_\infty) \left. \frac{d\operatorname{erfc}(\eta)}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{\eta=0} \\ &= -\lambda(T_0 - T_\infty) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) \sqrt{4t/\alpha} \Big|_{\eta=0} \\ &= \frac{\lambda(T_0 - T_\infty)}{\sqrt{\pi t / \alpha}} \end{aligned} \quad (5.64)$$

## 5.3 Application de la transformée de Laplace

### 5.3.1 Transformée de Laplace

Soit une fonction  $f(t), t \geq 0$  de type exponentiel, c. à d.

- elle est continue par portions, c. à d. elle a un nombre fini de discontinuités dans chaque intervalle fini ;
- elle a une croissance exponentielle :  $\exists M, \exists k$  pour que  $|f(t)| \leq M e^{kt}, \forall t \geq 0$

Elle admet alors une transformation de Laplace :

$$\mathbf{L}[f(t)] = \tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (5.65)$$

où

$$s = \sigma + j\omega \quad (5.66)$$

On dit que l'image de  $f(t)$  est  $\tilde{f}(s)$ ,

$$f(t) \xrightarrow{\text{L}} \tilde{f}(s) \quad (5.67)$$

Remarquons que la transformation de Laplace s'applique à des fonctions qui sont définies pour  $t \geq 0$ . Les valeurs de la fonction pour  $t < 0$  ne sont pas prises en compte dans la transformation. La transformation de Laplace s'applique quand une cause produit des effets dans une seule direction de la variable indépendante  $t$  ; c'est le cas des phénomènes dynamiques (la variable  $t$  représente le temps) où une cause n'a aucun effet vers le passé.

Tableau 5.2 Transformées de Laplace

$\tilde{f}(s)$	$f(t)$	
1	$\delta(t)$	Impulse unitaire (Dirac)
$\frac{1}{s}$	$u(t)$	Echelon unitaire (Heaviside), $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$
$\frac{1}{s^2}$	$t$	Échelon de vitesse
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t^n$	
$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	
$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	
$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	
$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$	$\cosh \omega t$	
$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$	$\sinh \omega t$	

Transformations spéciales, utiles pour la résolution de l'équation de la chaleur

$\exp(-k\sqrt{s}), k > 0$	$\frac{k}{2t\sqrt{\pi t}}, t > 0$
$\frac{1}{\sqrt{s}} \exp(-k\sqrt{s}), k \geq 0$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right), t > 0$
$\frac{1}{s} \exp(-k\sqrt{s}), k > 0$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right), t > 0$

---

Note :  $\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z)$ ;  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-x^2) dx$

---

La transformée de Laplace possède les propriétés de superposition linéaire (additivité et homogénéité) :

$$\mathbf{L}[f(t) + g(t)] = \mathbf{L}[f(t)] + \mathbf{L}[g(t)] \quad (5.68)$$

$$\mathbf{L}[Kf(t)] = K\mathbf{L}[f(t)] \quad (5.69)$$

Le *théorème de la valeur initiale* donne la valeur initiale dans le domaine temps en utilisant la transformée de Laplace :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s\tilde{f}(s) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0^+) \quad (5.70)$$

Le *théorème de la valeur finale* donne la valeur finale de la fonction dans le domaine temps en fonction de la transformée de Laplace :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{f}(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) \quad (5.71)$$

L'inverse d'un produit des transformées de Laplace est le produit de convolution des images dans le domaine temps

$$\mathbf{L}^{-1}(\tilde{f}(s) \cdot \tilde{g}(s)) = f(s) * g(s) \quad (5.72)$$

où

$$f(s) * g(s) \equiv \int_0^t f(t - \tau) \cdot g(\tau) \cdot dt \quad (5.73)$$

est le produit de convolution.

La transformée de Laplace des dérivées de la fonction dans le domaine temps est :

$$\mathbf{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \quad (5.74)$$

Si les conditions initiales sont nulles ( $f(0^+) = f'(0^+) = \dots = f^{(n-1)}(0^+) = 0$ ), alors

$$\mathbf{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \tilde{f}(s) \quad (5.75)$$

La transformée de Laplace de l'intégrale d'une fonction est :

$$\mathbf{L}\left[\int_0^t x dt\right] = \frac{1}{s} \tilde{x}(s) \quad (5.76)$$

Le théorème de la translation énonce que :

$$\mathbf{L}(e^{\tau t} f(t)) = \tilde{f}(s - \tau) \quad (5.77)$$

Le théorème du retard temporel :

$$\mathbf{L}[u(t - \tau) \cdot f(t - \tau)] = e^{-s\tau} \tilde{f}(s), \tau > 0 \quad (5.78)$$

Le théorème de la translation est utile pour obtenir la transformée de Laplace des fonctions périodiques.

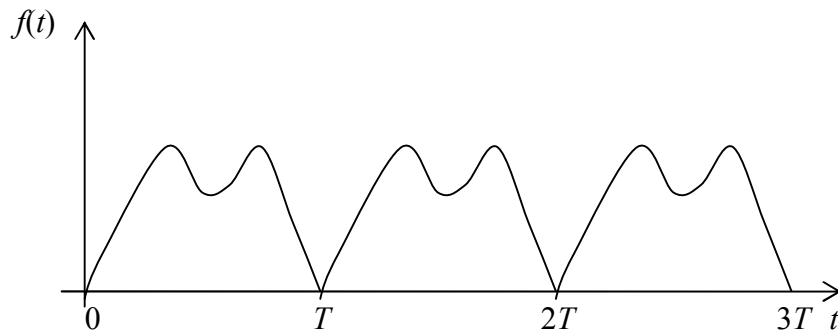


Figure 5.4 Fonction périodique

Une fonction périodique, Figure 5.4, peut être décomposée en une somme de fonctions définies sur une période :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \quad (5.79)$$

où la fonction  $f_1(t) = f(t)$  dans l'intervalle  $[0 \ T]$  et nulle ailleurs,  $f_2(t) = f(t)$  dans l'intervalle  $[T \ 2T]$  et nulle ailleurs, etc. Les fonctions  $f_2(t)$ ,  $f_3(t)$ , etc. se déduisent de  $f_1(t)$  par un décalage d'une période,

$$f_2(t) = f_1(t - T) = f_1(t - T) \cdot u(t - T) \quad (5.80)$$

$$f_3(t) = f_1(t - 2T) = f_1(t - 2T) \cdot u(t - 2T) \quad (5.81)$$

...

$$f_{k+1}(t) = f_1(t - kT) = f_1(t - kT) \cdot u(t - kT) \quad (5.82)$$

où  $u(t)$  est l'impulse échelon unitaire (Heaviside). La fonction  $f(t)$  peut s'écrire :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_1(t - kT) \cdot u(t - kT) \quad (5.83)$$

La transformée de Laplace de l'équation (5.83) est :

$$\mathbf{L}[f(t)] = \mathbf{L}\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_1(t - kT) \cdot u(t - kT)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{L}[f_1(t - kT) \cdot u(t - kT)] \quad (5.84)$$

ou, en appliquant le théorème du retard temporel (5.78),

$$\mathbf{L}[f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-skT) \tilde{f}_1(s) = \tilde{f}_1(s) \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-skT) \quad (5.85)$$

En tenant compte que :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (5.86)$$

l'équation (5.85) peut s'écrire

$$\mathbf{L}(f(t)) = \frac{\tilde{f}_1(s)}{1 - e^{-sT}} \quad (5.87)$$

La transformation inverse est donnée par :

$$\mathbf{L}^{-1}[\tilde{f}(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\omega}^{c+j\omega} e^{st} \tilde{f}(s) ds \quad (5.88)$$

Dans beaucoup des situations pratiques, on peut utiliser les transformées inversées tabulées et la propriété de linéarité de la transformation. Notamment quand la transformée de Laplace peut s'écrire comme un rapport des polynômes,

$$\tilde{f}(s) = \frac{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m} \equiv \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (5.89)$$

alors elle peut être décomposée par une somme d *fractions simples* en factorisant le dénominateur :



$$\tilde{f}(s) = \frac{N(s)}{\prod_{k=1}^m (s - s_k)} \quad (5.90)$$

Les zéros de  $D(s)$  dans l'équation (5.89), où la fonction  $\tilde{f}(s)$  n'est pas définie, sont nommés les *pôles* de  $\tilde{f}(s)$ . Si le degré du numérateur est plus grand que celui du dénominateur,  $n > m$ , alors la fonction  $\tilde{f}(s)$  peut être écrite comme la somme d'un polynôme et d'une fraction pour laquelle le degré du numérateur est plus petit que celui de dénominateur ; par exemple, si  $n = m + 2$ ,

$$\tilde{f}(s) = k_2 s^2 + k_1 s + k_0 + \frac{N_1(s)}{D(s)}$$

où  $\deg(N_1(s)) < \deg(D(s))$ .

*Cas 1.* Quand les pôles de  $D(s)$  sont simples, c. à d.  $D(s) = (s - s_1)(s - s_2)\dots(s - s_m)$  avec  $s_i \neq s_j, \forall i \neq j$ , la fonction (5.89) peut s'écrire :

$$\tilde{f}(s) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{s - s_k}, \quad c_k = \tilde{f}(s)(s - s_k) \Big|_{s=s_k} \quad (5.91)$$

où les coefficients  $c_k$  sont nommés les *résidus* de leurs pôles respectifs. La transformation inverse est :

$$f(t) = \sum c_k \exp(s_k t), \quad t > 0 \quad (5.92)$$

*Exemple*

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{c_1}{s + 1} + \frac{c_2}{s + 2}$$

$$c_1 = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} (s + 1) \Big|_{s=-1} = 1$$

$$c_2 = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)} (s + 2) \Big|_{s=-2} = -1$$

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Cas 2. Quand il y a  $l$  pôles multiples, chaque pôle  $k$  avec la multiplicité  $r_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$  et  $n = \sum_{k=1}^l r_k$ , la décomposition en fractions simples est

$$\tilde{f}(s) = \sum_{k=1}^l \sum_{v=1}^{r_k} \frac{c_{kv}}{(s-s_k)^v}, \quad c_{kv} = \frac{1}{(r_k - v)!} \left\{ \frac{d(r_k - v)}{ds(r_k - v)!} [\tilde{f}(s)(s-s_k)^{r_k}] \right\} \quad (5.93)$$

La transformation inverse est :

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \exp(s_k t) \sum_{v=1}^{r_k} \frac{c_{kv} t^{v-1}}{(v-1)!}, \quad t > 0 \quad (5.94)$$

### 5.3.2 Homogénéité spatiale de la température

On considère le même problème présenté dans §5.1. En introduisant l'expression (5.8) dans l'équation (5.4), on obtient l'équation différentielle ordinaire :

$$\tau_t \frac{d\theta}{dt} = -\theta, \quad (5.95)$$

avec la condition initiale :

$$\theta(0) = \theta_0 \quad (5.96)$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (5.95), on obtient :

$$\tau_t (s\tilde{\theta} - \theta(0)) = -\tilde{\theta} \quad (5.97)$$

ou, en tenant compte de (5.96),

$$\tau_t (s\tilde{\theta} - \theta_0) = -\tilde{\theta} \quad (5.98)$$

ou

$$\frac{\tilde{\theta}}{\theta_0} = \frac{1}{s + 1/\tau_t} \quad (5.99)$$

La transformée Laplace inverse de l'équation (5.99) est :

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp(-t/\tau_t); \quad t > 0. \quad (5.100)$$

### 5.3.3 Chauffage instantané d'un espace semi-infini

Considérons l'équation aux dérivées partielles (5.42)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0 \quad (5.101)$$

avec les conditions aux limites (5.43)

$$\begin{aligned} \theta(0, t) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.102)$$

et la condition initiale

$$\theta(x, 0) = 0. \quad (5.103)$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation (5.101), on obtient une équation différentielle ordinaire,

$$s\tilde{\theta} - \tilde{\theta}(x, 0) = \alpha \frac{d^2 \tilde{\theta}}{dx^2}, \quad x > 0 \quad (5.104)$$

où  $\tilde{\theta}(x, 0) = 0$ , avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(0, s) &= \frac{1}{s} \\ \tilde{\theta}(\infty, s) &= 0 \end{aligned} \quad (5.105)$$

La solution générale de l'équation (5.104) est

$$\tilde{\theta} = Ae^{-x\sqrt{s/\alpha}} + Be^{x\sqrt{s/\alpha}}. \quad (5.106)$$

La condition aux limites  $\tilde{\theta}(\infty, s) = 0$  impose que  $B = 0$  et la condition  $\tilde{\theta}(0, s) = 1/s$  implique que  $A = 1/s$ . Résulte la solution de l'équation (5.104)

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{s} e^{-x\sqrt{s/\alpha}} \quad (5.107)$$

En appliquant la transformée inverse de Laplace à l'équation (5.107), on obtient

$$\theta = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t/\alpha}}\right) \quad (5.108)$$

On peut démontrer que, si les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} q &= 0 & t = 0, y > 0 \\ q &= q_0 & t > 0, y = 0 \\ q &\rightarrow 0 & t > 0, y \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.109)$$

la variation de la température est

$$\theta = \frac{2q_0}{\lambda} \sqrt{\lambda t} \left\{ \frac{\exp(-\eta^2)}{\sqrt{\pi}} - \eta \operatorname{erfc} \eta \right\}. \quad (5.110)$$

Quand le flux de chaleur est uniforme,  $q_0$ , la température à la surface s'obtient en mettant  $x = 0$  dans l'équation (5.110)

$$\theta_s = \frac{2q_0}{\lambda} \sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}}, \quad \theta_s = T_s - T_0 \quad (5.111)$$

## 5.4 Résolution numérique des problèmes directs

Les solutions analytiques des problèmes dynamiques sont disponibles pour des géométries et des conditions aux limites simples. Mais, dans de nombreuses situations, la complexité de la géométrie et des conditions aux limites empêche l'utilisation des méthodes analytiques ; on doit alors faire appel aux méthodes numérique. La méthode présentée dans les sections 3.4 et 4.2 est facilement applicable au cas dynamique. L'équation de la chaleur (2.15) sous la forme

$$\operatorname{div}(-\lambda \mathbf{grad} \theta) = p - \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (5.112)$$

est l'équation (3.68) avec le membre de droite changé du  $p$ , pour le régime stationnaire, au  $p - \rho c \partial \theta / \partial t$ , pour le régime dynamique.

### 5.4.1 Système des équations différentielles – algébriques (DAE)

Pour le cas unidimensionnel, la forme discrète de l'équation (5.112) peut être écrite sous la forme

$$\lambda \frac{A}{\Delta x} (\theta_{m-1} - \theta_m) + \lambda \frac{A}{\Delta x} (\theta_{m+1} - \theta_m) + \dot{q} A \Delta x = \rho A \Delta x c \dot{\theta}_m \quad (5.113)$$

En notant  $R_1 \equiv \lambda \frac{A}{\Delta x}$ ,  $R_2 \equiv \lambda \frac{A}{\Delta x}$ ,  $f_1 \equiv \dot{q} A \Delta x$  et  $C \equiv \rho A \Delta x c$ , le schéma électrique équivalent de l'équation (5.113) est donné sur la Figure 5.5. D'une manière analogue, on obtient les circuits équivalents pour le cas en deux dimensions en ajoutant une capacité qui correspond à la capacité thermique de la maille

$$C_m = \rho V c \quad (5.114)$$

où  $V$  est le volume de la maille.

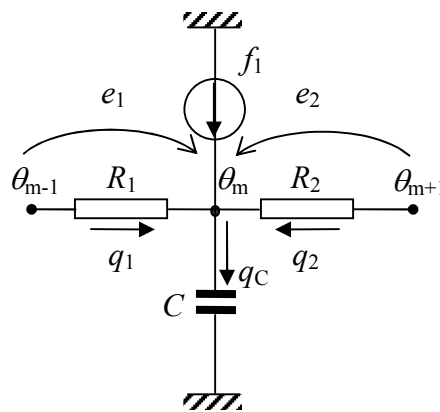


Figure 5.5 Conduction en régime dynamique : circuit équivalent pour une maille

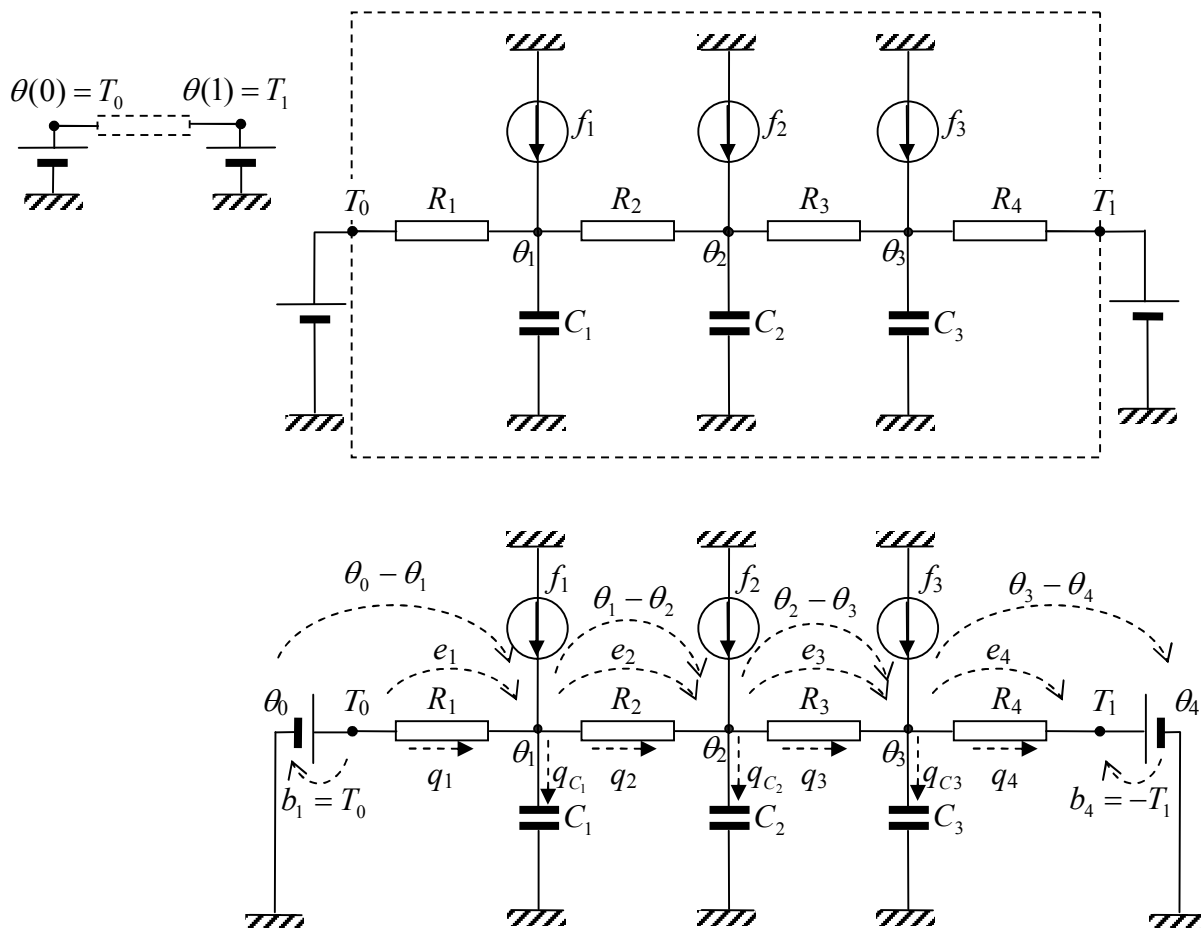


Figure 5.6 Exemple de conduction en régime dynamique avec des sources internes

Une solution numérique basée sur les volumes finis s'obtient d'une manière similaire au problème en régime stationnaire. Par exemple, pour le circuit thermique de la Figure 5.6, en notant les matrices des connexions, des conductances et des capacités par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

où  $G_i = 1/R_i, i = 1, \dots, 4$  sont les conductances thermiques et  $C_i, i = 1, \dots, 3$  sont les capacités thermiques, et les vecteurs sources de température et de flux par :

$$\mathbf{b} = [T_0 \quad 0 \quad 0 \quad -T_1]^T, \quad \mathbf{f} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3]^T$$

les chutes de température sur les résistances,  $\mathbf{e} = [e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4]^T$ , sont :

$$\mathbf{e} = -\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{b}, \quad (5.115)$$

et les flux dans les résistances sont donnés par :

$$\mathbf{q} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}. \quad (5.116)$$

En faisant le bilan de flux en chaque nœud, on obtient

$$\begin{cases} C_1 \dot{\theta}_1 = q_1 - q_2 + f_1 \\ C_2 \dot{\theta}_2 = q_2 - q_3 + f_2 \\ C_3 \dot{\theta}_3 = q_3 - q_4 + f_3 \end{cases} ; \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}^T \mathbf{q} + \mathbf{f}. \quad (5.117)$$

En substituant l'équation (5.116) dans l'équation (5.117) et l'équation (5.115) dans l'équation (5.116), on obtient le modèle dynamique de la forme :

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f} \quad (5.118)$$

En général, dans un circuit thermique il y a des nœuds qui ne contiennent pas des capacités. Alors, le système d'équation (5.118) est un système d'équations différentielles-algébriques (DAE).

### 5.4.2 Représentation d'état

Si la matrice  $\mathbf{C}$  est inversable, c. à d. toutes les nœuds contiennent des capacités thermiques, ce qui est le cas dans les problèmes de conduction, alors le modèle dynamique (5.118) peut être mis sous la forme d'un modèle d'état

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{A}_s \boldsymbol{\theta} + \mathbf{B}_s \mathbf{f}_T \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_s \boldsymbol{\theta} + \mathbf{D}_s \mathbf{f}_T \end{aligned} \quad (5.119)$$

où  $\boldsymbol{\theta}$  est le vecteur d'état, contient les températures,

$\mathbf{f}_T = [\mathbf{b} \quad \mathbf{f}]^T$  - vecteur des entrées,

$\mathbf{y}$  - vecteur des sorties, les variables d'intérêt,

$\mathbf{A}_s = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A}$  est la matrice dynamique,

$\mathbf{B}_s = \mathbf{C}^{-1} [\mathbf{A}^T \mathbf{G} \quad \mathbf{I}]$  - matrice de commande,

$\mathbf{C}_s$  - matrice d'observation,

$\mathbf{D}_s$  - matrice d'action directe.

La matrice d'observation sélectionne les variables de sortie du vecteur d'état et la matrice d'action directe fait un lien direct entre les entrées et les sorties.

Les modèles d'état permettent l'utilisation de la théorie des systèmes pour l'analyse et pour la synthèse de systèmes de contrôle-commande.

La résolution numérique de l'équation (5.118) nécessite la discrétisation de la dérivée de la température en fonction de temps. Si les températures au pas de temps  $p+1$  sont évaluées en fonction des valeurs au pas de temps précédent,  $p$ , la méthode est *explicite*. Si les températures au pas de temps courant sont évaluées en fonction de températures au même pas de temps, la méthode est *implicite*.

### 5.4.3 Méthode explicite

Dans la méthode explicite, l'approximation de la dérivée de la température en fonction du temps dans le nœud  $(m, n)$  au moment  $p \Delta t$  est de type Euler

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_{m,n} \cong \frac{\theta_{m,n}^{p+1} - \theta_{m,n}^p}{\Delta t} \quad (5.120)$$

L'exposant  $p$  indique la dépendance en fonction du temps. La dérivée est exprimée en tant que différence entre la température à un nouveau pas de temps,  $p+1$ , et celle au pas de temps antérieur. Si l'équation (5.120) est introduite dans l'équation (5.119), on obtient :

$$\frac{\theta_{p+1} - \theta_p}{\Delta t} = \mathbf{A}_s \theta_p + \mathbf{B}_s \mathbf{f}_{T,p} \quad (5.121)$$

ou

$$\theta_{p+1} = (\mathbf{I} + \Delta t \mathbf{A}) \theta_p + \Delta t \mathbf{B}_s \mathbf{f}_{T,p} \quad (5.122)$$

Dans la forme *explicite*, les températures sont évaluées au pas de temps précédent : les températures au pas de temps suivant,  $p+1$ , dépendent de valeurs connues au pas de temps courant,  $p$ .

La précision de la méthode explicite dépend du pas de la discrétisation spatiale,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  et temporelle,  $\Delta t$  ; plus les pas sont petits, plus la précision et le temps de calcul sont grands. Le choix du pas de discrétisation spatiale est un compromis entre la précision et le temps de calcul. Mais, une fois le pas de discrétisation spatiale est choisi, le pas de temps est imposé par le critère de stabilité de la solution numérique. Pour une géométrie 1D (Strang, 1986) :

$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (5.123)$$

et pour une géométrie 2D



$$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{4} \quad (5.124)$$

où  $\alpha = \lambda / (\rho c)$  est la diffusivité thermique.

#### 5.4.4 Méthode implicite

Dans la forme *implicite*, les températures à un pas de temps sont évaluées en fonction de températures au même pas de temps :

$$\frac{\boldsymbol{\theta}_{p+1} - \boldsymbol{\theta}_p}{\Delta t} = \mathbf{A}_s \boldsymbol{\theta}_{p+1} + \mathbf{B}_s \mathbf{f}_{T,p} \quad (5.125)$$

On obtient

$$\boldsymbol{\theta}_{p+1} = (\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{A})^{-1} (\boldsymbol{\theta}_p + \Delta t \mathbf{B}_s \mathbf{f}_{T,p}) \quad (5.126)$$

Cette approche implique la résolution à chaque pas de temps d'un système des équations algébriques, ce qui implique un temps de calcul plus long. L'avantage de la méthode implicite est la stabilité de la solution numérique ; le pas de temps n'est plus imposé par la discrétisation spatiale.

## 6 Convection

La *convection* implique le transfert de chaleur dans des fluides. Le mouvement dans les fluides est composé du mouvement des volumes de fluide (*advection*) et du mouvement aléatoire des molécules (*diffusion*). Des lois similaires caractérisent la *convection massique* due à des gradients de concentration dans un mélange. Le mouvement du fluide est dû aux différences de pressions provoquées, dans le cas de la *convection forcée*, par des forces externes (pompes, ventilateurs) ou, dans le cas de la *convection naturelle*, par les différences de densité.

En ce qui suit, on considère la convection qu'en régime stationnaire en se restreignant aux valeurs moyennes dans le temps. Une autre simplification importante est de considérer seul le processus de transfert entre le fluide et les parois solides le limitant de son environnement et de ne pas s'intéresser à la distribution spatiale de la température. Le flux thermique à la paroi (indice  $p$ ) entre le solide (indice  $s$ ) et le fluide (indice  $f$ ) est

$$\varphi_p = -\lambda_{ps} \left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{ps} = -\lambda_{pf} \left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{pf} \quad (6.1)$$

où  $n$  est la normale à la paroi et  $\lambda$  est la conductivité thermique. Dans un point  $M$  de la paroi on aura la continuité de la température,

$$\theta_s|_M = \theta_f|_M \quad (6.2)$$

Dans beaucoup de situations il n'est pas nécessaire de calculer la distribution des températures dans le fluide pour en retenir seulement le gradient à la paroi. Une simplification phénoménologique établit une relation à la paroi, nommée la loi de Newton, similaire à celle de la conduction :

$$\varphi_p = h_c (\theta_p - \theta_M) \quad (6.3)$$

où  $h_c$  est le coefficient d'échange convectif [ $\text{W/m}^2 \text{ K}$ ]

$\theta_M$  - une température de référence à définir [ $\text{K}$ ].

Le problème de la convection consiste en définir et calculer  $\theta_M$  et de calculer  $h_c$  par le biais de nombres caractéristiques (Nusselt pour la convection forcée ou Grashof pour la convection naturelle).

## 6.1 Température caractéristique

Considérons l'écoulement anisotherme entre deux plaques planes parallèles à distance  $d$  (Figure 6.1).

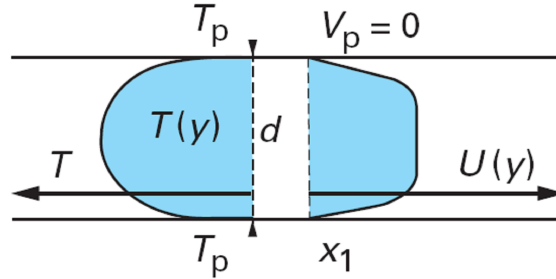


Figure 6.1 Ecoulement bidimensionnel anisotherme entre plaques parallèles : champs de vitesse et de température (Padet, 2005)

Le débit massique de fluide est constant dans chaque section  $x$  :

$$\dot{m}_x = \int_0^d \rho v dy = d \rho v_M \quad (6.4)$$

où  $v$  est la vitesse locale et  $v_M \equiv \frac{1}{d} \int_0^d v dy$  est la vitesse moyenne dans la section.

Le débit d'enthalpie dans la section est :

$$\dot{H}_x = \int_0^d \rho c v \theta dy \quad (6.5)$$

En considérant la chaleur massique constante dans la section, on obtient la *température de mélange*, qui est la température d'un fluide isotherme,  $\theta_M$ , qui transporterait la même quantité de chaleur,  $\dot{H}$ , que l'écoulement anisotherme

$$\theta_M = \frac{\dot{H}_x}{c \dot{m}_x} = \frac{\int_0^d \rho v \theta dy}{\int_0^d \rho v dy} \quad (6.6)$$

Cette température est appelée ainsi car si le fluide de la section  $x$  sera placé dans un calorimètre on obtiendra, après le mélange, un fluide isotherme à température  $\theta_M$ . En

utilisant la température de mélange, l'écoulement anisotherme a été globalisé en substituant au profil des vitesses une vitesse unique et au profil de température une température unique.

La température de mélange a été définie pour un espace confiné (entre deux plaques parallèles infinies ou à l'intérieure d'un tube), mais les cas des espaces semi-infinis sont nombreuses (parois des bâtiments, par exemple). Pour une plaque avec le bord d'attaque en  $x = 0$  (Figure 6.2) pour  $x > 0$  et pour  $y$  suffisamment grand, on trouvera une zone non perturbée où la température reste celle du courant isotherme. La *couche limite thermique*, dans laquelle le changement de température représente 99 % de sa variation totale  $\theta_\infty - 0.01(\theta_\infty - \theta_p)$ , a une épaisseur faible devant celle où la température reste constante et égale à  $\theta_\infty$ . L'intégration dans l'équation (6.6) se fait maintenant de zéro à l'infini, intervalle dans lequel  $\theta = \theta_\infty$ , sauf dans la mince couche limite anisotherme. La température de mélange est donc assimilable à la température à l'infini.

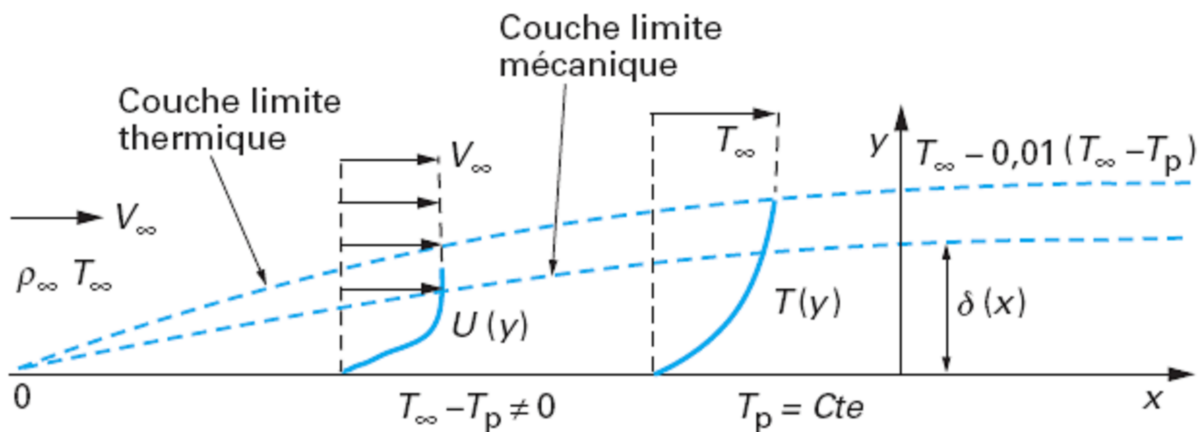


Figure 6.2 Plaque plane semi-infinie : couche limite mécanique et thermique (Padet, 2005)

## 6.2 Coefficient d'échange convectif

Avant les calculs, il est utile de savoir l'ordre de grandeur du coefficient d'échange convectif  $h_c$  (Padet, 2005) :

- en convection forcée
  - dans les gaz :  $h_c = 12 \dots 200 \text{ W/m}^2\text{K}$
  - dans l'eau :  $h_c = 200 \dots 7500 \text{ W/m}^2\text{K}$
- en convection naturelle
  - dans les gaz :  $h_c = 3 \dots 30 \text{ W/m}^2\text{K}$
  - dans l'eau :  $h_c = 30 \dots 300 \text{ W/m}^2\text{K}$

Tout calcul du coefficient d'échange convectif  $h_c$ , même s'il est estimé sur des considérations théorique, nécessite une confirmation expérimentale. Il serait nécessaire autant

d'expériences que de cas particuliers (type de convection – forcé ou naturelle, régime de turbulence – laminaire ou turbulent, conditions aux limites thermiques, géométries).

Les *relations de similitude* permettent de grouper les expériences dans des classes similaires pour lesquelles une seule expérience est nécessaire.

### 6.2.1 Analyse dimensionnelle et similitude

Une loi physique est l'expression mathématique d'une relation :

$$f(E_1, \dots, E_p) = 0. \quad (6.7)$$

entre différentes grandeurs  $E_1, \dots, E_p$ , dont certaines sont en relation. Si  $q$  est le nombre d'unités fondamentales (parmi la masse, la longueur, le temps, la température) qui intervient dans l'équation (6.7), on peut former  $\pi_{p-q}$  produits sans dimension, indépendants. L'équation (6.7) peut être écrite alors sous la forme :

$$F(\pi_1, \dots, \pi_{p-q}) = 0. \quad (6.8)$$

Considérons, par exemple, le phénomène d'échange de chaleur dans un tube infiniment long. Le flux thermique  $q$  dépend des paramètres donnés dans le Tableau 6.1.

Tableau 6.1 Grandeurs qui influencent le flux thermique dans un tube

	Grandeurs	Symbole	Unité SI	Dimension
1	Diamètre du tube	(a) $D$	m	$[L]$
2	Vitesse du fluide	(b) $U_\infty$	m/s	$[LT^{-1}]$
3	Masse volumique du fluide	(c) $\rho$	kg/m <sup>3</sup>	$[ML^{-3}]$
4	Viscosité dynamique du fluide	(d) $\mu$	kg/(m·s)	$[ML^{-1}T^{-1}]$
5	Conductivité thermique du fluide	(e) $\lambda$	W/(m·K)	$[MLT^{-3}\theta^{-1}]$
6	Chaleur spécifique à pression constante	(f) $c_p$	J/(kg·K)	$[L^2T^{-2}\theta^{-1}]$
7	Coefficient d'échange de chaleur	(g) $h_c$	W/(m <sup>2</sup> K)	$[MT^{-3}\theta^{-1}]$

Il y a 7 grandeurs physiques et 4 dimensions ( $L, M, T$  et  $\theta$ ). Le théorème de Vachy – Buckingham donne  $7 - 4 = 3$  produits de la forme :

$$\pi = D^a \cdot v^b \cdot \rho^c \cdot \mu^d \cdot \lambda^e \cdot c_p^f \cdot h_c^g \quad (6.9)$$

avec les dimensions :

$$[\pi] = [L]^{a+b-3c-d+e+2f} [M]^{c+d+e+g} [T]^{-b-d-3e-2f-3g} [\theta]^{-e-f-g} \quad (6.10)$$

Les produits  $\pi$  sont sans dimension, donc :

$$\begin{cases} a + b - 3c - d + e + 2f = 0 \\ c + d + e + g = 0 \\ -b - d - 3e - 2f - 3g = 0 \\ -e - f - g = 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

Un choix possibles des solutions est :

$$a = 1; e = -1; g = 1; b = c = d = f = 0; \Rightarrow \pi_1 = \frac{h \cdot D}{\lambda} \equiv Nu$$

$$a = 1; b = 1; c = 1; d = -1; e = f = g = 0; \Rightarrow \pi_2 = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} \equiv Re$$

$$d = 1; e = -1; f = 1; a = b = c = g = 0; \Rightarrow \pi_3 = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda} \equiv Pr$$

Ce choix signifie que le phénomène d'échange de chaleur dans un tube infiniment longue peut être caractérisé par une relation entre ces trois nombre adimensionnels,  $F(Nu, Re, Pr) = 0$ , en lieu de sept grandeurs du Tableau 6.1.

## 6.2.2 Interprétation des nombres adimensionnels

Le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses:

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{\rho v^2 D^2}{\mu v D} \quad (6.12)$$

où le terme

$$\rho v^2 D^2 = \rho v D^2 \cdot v = \rho l D^2 \cdot \frac{v}{t} \propto \rho V \cdot \frac{v}{t} = m \cdot a \quad (6.13)$$

est de l'ordre des forces d'inertie et le terme

$$\mu v D \propto \mu S \frac{dv}{dz} \quad (6.14)$$

est de l'ordre des forces visqueuses. Il caractérise le type d'écoulement : quand les forces visqueuses sont dominantes,  $Re$  est petit et l'écoulement est laminaire ; quand les forces d'inertie dominant,  $Re$  est grand et l'écoulement est turbulent.

Le nombre de Prandtl représente le rapport entre la diffusivité cinématique et la diffusivité thermique

$$Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda} = \frac{\mu / \rho}{\lambda / (\rho \cdot c_p)} = \frac{\nu}{a} \quad (6.15)$$

Il caractérise la distribution des vitesses (couche limite cinématique) par rapport à la distribution de la température (couche limite thermique).

Le nombre de Nusselt est une mesure de l'augmentation du transfert thermique dans le cas de la convection comparé avec la conduction :

$$Nu = \frac{hD}{\lambda} = \frac{h\Delta T}{\lambda \frac{\Delta T}{D}} = \frac{D/h}{1/h} \quad (6.16)$$

La dimension caractéristique  $D$  doit être prise dans le sens de l'augmentation de la couche limite. Si le nombre de Nusselt est plus grand que l'unité,  $Nu \gg 1$ , la convection est prédominante ; si le nombre de Nusselt est plus petit que l'unité,  $Nu \ll 1$ , la conduction est prédominante.

### 6.3 Convection forcée

Dans la convection forcée, le coefficient d'échange ne dépend pas de la différence de température  $\theta_p - \theta_M$ . Les corrélations obtenues par de différents auteurs sont valables pour des configurations géométriques et domaines des variables bien définis.

#### 6.3.1 Convection forcée dans un tube

Dans le cas de la convection forcée dans un tube (Figure 6.3), le transfert thermique, dont le coefficient  $h_c$  dépend de :

- $v_M$ , vitesse moyenne du fluide,  $m/s$
- $\rho$ , masse volumique du fluide,  $kg/m^3$
- $c$ , chaleur spécifique du fluide,  $J/kg K$
- $\mu$ , viscosité dynamique du fluide,  $N s/m^2$ ,  $Pa s$  ou  $kg/(m s)$
- $\lambda$ , conductivité thermique du fluide,  $W/m K$
- $D$ , diamètre intérieur du tube,  $m$
- $x$ , abscisse,  $m$ .

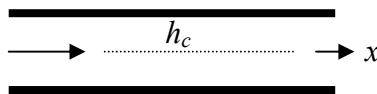


Figure 6.3 Convection forcée dans un tube

A partir du théorème de Vaschy-Buckingham, le coefficient de transfert convectif  $h_c$  peut être exprimé en fonction de quatre unités fondamentales (nombres adimensionnels) :

$Nu = \frac{h D}{\lambda}$  nombre de Nusselt, qui caractérise l'échange thermique entre le fluide et la paroi ;

$Re = \frac{\rho v_m D}{\mu}$  nombre de Reynolds, qui caractérise le régime d'écoulement :  
 $Re < 2000$  écoulement laminaire  
 $Re > 3000$  écoulement turbulent

$Pr = \frac{\mu c}{\lambda}$  nombre de Prandtl, qui caractérise les propriétés thermiques du fluide

$\frac{x}{D}$  abscisse réduite.

A partir d'études expérimentales, des corrélations sont proposées par différents auteurs. Par exemple, à l'intérieur d'un tube, pour  $L/D > 60$  et  $10\,000 < Re < 120\,000$ ,

- pour tous les fluides

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.33} \quad (\text{formule de Colburn}) \quad (6.17)$$

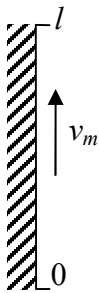
- pour un gaz ( $Pr \cong 0.75$ )

$$Nu = 0.02 Re^{0.8} \quad (6.18)$$

### 6.3.2 Convection forcée entre un fluide et une plaque

Les formules suivantes sont valables pour la convection forcée, vitesse  $v_m$ , inclinaison quelconque de la plaque.

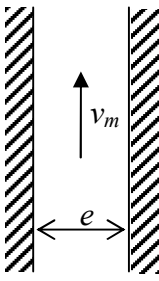
a) Plaque plane

	$\overline{Nu} = \frac{\bar{h} l}{\lambda}, \quad \bar{h} \text{ valeur moyenne entre } 0 \text{ et } l. \quad Re = \frac{\rho v_m l}{\mu},$ <p>Régime laminaire  <math>Re &lt; 3 \cdot 10^5 ; 0.5 \leq Pr \leq 10</math></p> $\overline{Nu} = 0.664 Re^{1/2} Pr^{1/3}$ <p>Régime turbulent  <math>Re &gt; 5 \cdot 10^5 ; 0.5 \leq Pr \leq 10</math></p>
---	--



	$\overline{Nu} = 0.035 Re^{4/5} Pr^{1/3}$ (Padet, 2005b)
--	--

b) Plaques parallèles

	$\overline{Nu} = \frac{\bar{h} 2e}{\lambda} ; Re = \frac{\rho v_m 2e}{\mu}$ <p>Régime laminaire,  <math>\overline{Nu} = 4</math></p> <p>Régime turbulent, <math>Pr \geq 0.5</math>, flux ou température constante sur les deux plaques  <math>\overline{Nu} = 0.023 Re^{4/5} Pr^{1/3}</math></p>
---	--

### 6.3.3 Propriétés des fluides

Tableau 6.2 Propriétés physique de l'air

Température	Conductivité thermique	Viscosité (*) dynamique	Masse (**) volumique	Chaleur spécifique
$\theta$ [°C]	$\lambda$ [W/m.°C]	$\mu$ [Pa.s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$c$ [J/kg.°C]
-20	0,02256			
0	0,02313	17,19 10 <sup>-6</sup>	1,275	1000
20	0,02512			
40	0,02652			
50	0,02680	19,26 10 <sup>-6</sup>		1005
60	0,02791			
80	0,02931			
100	0,03070	21,34 10 <sup>-6</sup>		1009

(\*) La viscosité dynamique,  $\mu$ , dont l'unité est le  $Pa \cdot s$ , dénommée poiseuille (1 poiseuille = 1  $Pa \cdot s$ ) est souvent confondue avec la viscosité cinématique,  $\nu = \mu / \rho$ .

(\*\*) La masse volumique de l'air, qui se comporte comme un gaz parfait, peut s'écrire dans les conditions normales de pression ( $p = 101\,325 Pa$ ) sous la forme

$$\rho = \rho_0 \frac{273}{\theta + 273}$$

avec  $\rho_0$  la masse volumique à 0°C et  $\theta$  la température de l'air en °C.

(\*\*\*) Dans le domaine des températures -20, +100°C, les paramètres caractéristiques du nombre de Prandtl varient peu pour tous les gaz usuels à la pression atmosphérique. Aussi, est-il courant de prendre pour le nombre de Prandtl une valeur moyenne de 0,75.

Tableau 6.3 Propriétés physique de l'eau

Température $\theta$ [°C]	Conductivité thermique $\lambda$ [W/m K]	Viscosité dynamique $\mu$ $10^{-3}$ Pa.s	Masse volumique $\rho$ Kg /m <sup>3</sup>	Chaleur spécifique $C_p$ J/kg.°C
0	0,555	1,789	1000	4220
5		1,515		
10		1,306		4183
20	0,598	1,005	998	4178
30		0,802		
40	0,627	0,653	992	4178
50		0,550	988	
60	0,651	0,470	983	4191
70		0,406	977,7	
80	0,669	0,355	971,6	4199
90		0,315	965,1	
100 liquide	0,682	0,282	985,1	4216
100 vapeur	0,025	0,012	0,8 kg/Nm <sup>3</sup>	1900

Contrairement aux gaz, les propriétés des liquides, et en particulier de l'eau, varient en fonction de la température. C'est le cas, par exemple, pour la viscosité dynamique.

## 6.4 Convection naturelle

La convection naturelle se produit quand des *forces s'exerçant dans la masse du fluide* actionnent dans la présence des *gradients de densités*. Habituellement, la force s'exerçant dans la masse du fluide est la gravité et le gradient de densité est dû au gradient de température. Les vitesses dans la convection naturelle sont plus faibles que dans la convection forcée, ce qui fait que les coefficients de transfert convectif sont aussi plus faibles. La convection naturelle influence la distribution des températures à l'intérieur des bâtiments et détermine leurs besoins en chauffage et rafraîchissement.

Le nombre de Grashof est l'équivalent pour la convection naturelle du nombre de Reynolds,

$$Gr \equiv \frac{g\beta\rho^2 l^3}{\mu^2} (\theta_p - \theta_\infty) \quad (6.19)$$

où :

- $l$  dimension linéaire caractéristique de la surface d'échange (ex ; côté d'un carré, diamètre d'un tube), m
- $\beta$  coefficient de dilatation volumique du fluide, K<sup>-1</sup> ;

- air :  $\beta = 1/T$  ( $T$  température en Kelvin)
- eau : 20°C  $\beta = 0.20$   
60°C  $\beta = 0.53$   
90°C  $\beta = 0.67$

- $(\theta_p - \theta_\infty)$  écart de température paroi-fluide, K ;
- $g$  accélération de la pesanteur,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  ;
- $\rho$  masse volumique du fluide,  $\text{kg/m}^3$  ;
- $\mu$  viscosité dynamique du fluide,  $\text{Pa} \cdot \text{s}$ .

Le nombre de Grashof est une mesure du rapport entre les forces d'Archimède et les forces visqueuses. Les valeurs du nombre de Grashof sont :

$10^3 \dots 10^9$  en convection naturelle laminaire et  
 $10^9 \dots 10^{12}$  en convection naturelle turbulente.

Les corrélations qui caractérisent la convection naturelle sont de la forme :

$$Nu = C(Gr Pr)^n \quad (6.20)$$

avec  $n = 1/4$  pour la convection laminaire et  
 $n = 1/3$  pour la convection turbulente.

Le coefficient  $C$  dépend du régime de convection et de la géométrie :

$0.2 < C < 0.6$  en convection laminaire et  
 $0.07 < C < 0.15$  en convection turbulente.

Le produit  $Ra \equiv Gr Pr$  ( $Ra = 10^6 \dots 10^8$ ) est le nombre de Rayleigh. Quand le nombre de Rayleigh est petit, le transfert de chaleur se fait principalement par conduction ; quand le nombre de Rayleigh dépasse la valeur critique, le transfert de chaleur se fait principalement par convection.

Tableau 6.4 Coefficients d'échange convectif pour l'air (ASHRAE 2001 et Eyglument 1994)  
 $\Delta\theta$  = écart de température paroi - air

<b>Longuer caractéristique</b>	
<i>Plaques verticales ou tuyaux</i>	$l = \text{hauteur}$
<i>Plaques horizontales</i>	$l = \text{longuer}$
<i>Tuyaux horizontaux</i>	$l = \text{diamètre}$
<i>Sphères</i>	$l = \text{diamètre}$
<i>Blocs rectangulaires,</i> <i>dimension horizontale <math>L_h</math>, dimension verticale <math>L_v</math></i>	$1/l = (1/L_h) + (1/L_v)$
<b>Surfaces planes et tuyaux</b>	
Surfaces planes verticales ou horizontales, tuyaux, blocs rectangulaires et sphères (à l'exception des surfaces horizontales orientées vers le bas quand elles sont chauffées et en haut quand elles sont refroidies)	
a) Régime laminaire, $10^4 < Gr Pr < 10^8$	$Nu = 0.56(Gr Pr)^{1/4}$
b) Régime turbulent, $10^8 < Gr Pr < 10^{12}$	$Nu = 0.13(Gr Pr)^{1/3}$
<b>Fils horizontaux ou verticaux, <math>10^{-7} &lt; Gr Pr &lt; 1</math></b>	$Nu = (Gr Pr)^{1/10}$
<b>Echange avec l'air à 21°C, <math>Gr Pr = 1.6 \cdot 10^6 l^3 \Delta\theta</math></b> $\Delta\theta$ = écart de température paroi - air	$h \text{ [W/m}^2\text{K]}$
a) Cylindres horizontaux	
régime laminaire	$h = 1.32(\Delta\theta/l)^{1/4}$
régime turbulent	$h = 1.24(\Delta\theta/l)^{1/3}$
b) Plaques verticales	
régime laminaire	$h = 1.42(\Delta\theta/l)^{1/4}$
régime turbulent	$h = 1.31(\Delta\theta/l)^{1/3}$
c) Plaques horizontales	
chauffantes, orientées vers le haut	
refroidissantes, orientées vers le bas	
régime laminaire	$h = 1.32(\Delta\theta/l)^{1/4}$
régime turbulent	$h = 1.52(\Delta\theta/l)^{1/3}$
d) Plaques horizontales	
chauffantes, orientées vers le bas	
refroidissantes, orientées vers le haut	
régime laminaire	$h = 0.59(\Delta\theta/l)^{1/4}$
e) Sphère	$h = \left(1.14 + \frac{0.17}{l}\right) \Delta\theta^{1/4}$

## 7 Rayonnement

Le transfert de chaleur par conduction et convection se produit à cause du gradient de température dans la matière. Le transfert de chaleur par *rayonnement* ne nécessite pas un support matériel. Le *rayonnement thermique* est le phénomène d'émission d'énergie par un corps du à sa température ; tous les corps rayonnent de l'énergie.

Le mécanisme de l'émission est relié à l'énergie émise par les oscillations et les transitions des électrons. Ces oscillations sont maintenues par l'énergie interne, et donc par la température, de la matière. D'où l'association de l'émission du rayonnement thermique avec l'agitation moléculaire due à la température.

Toute matière émet du rayonnement. Les gaz et les solides semi-transparents à haute température présentent une *émission volumique* (Figure 7.1 a). Les solides et les liquides ont, généralement, une *émission surfacique* (Figure 7.1 b) : le rayonnement émis par les molécules de l'intérieur d'un corps est absorbé par les molécules voisines. Le rayonnement émis par les solides ou les liquides provient des molécules qui se trouvent à la surface dans une couche d'environ un micron. C'est pour cela que le rayonnement des solides ou des liquides vers les gaz ou le vide peut être considéré un phénomène de surface, à l'exception des échelles micro ou nano métrique. Ce phénomène de surface est traité par la suite.

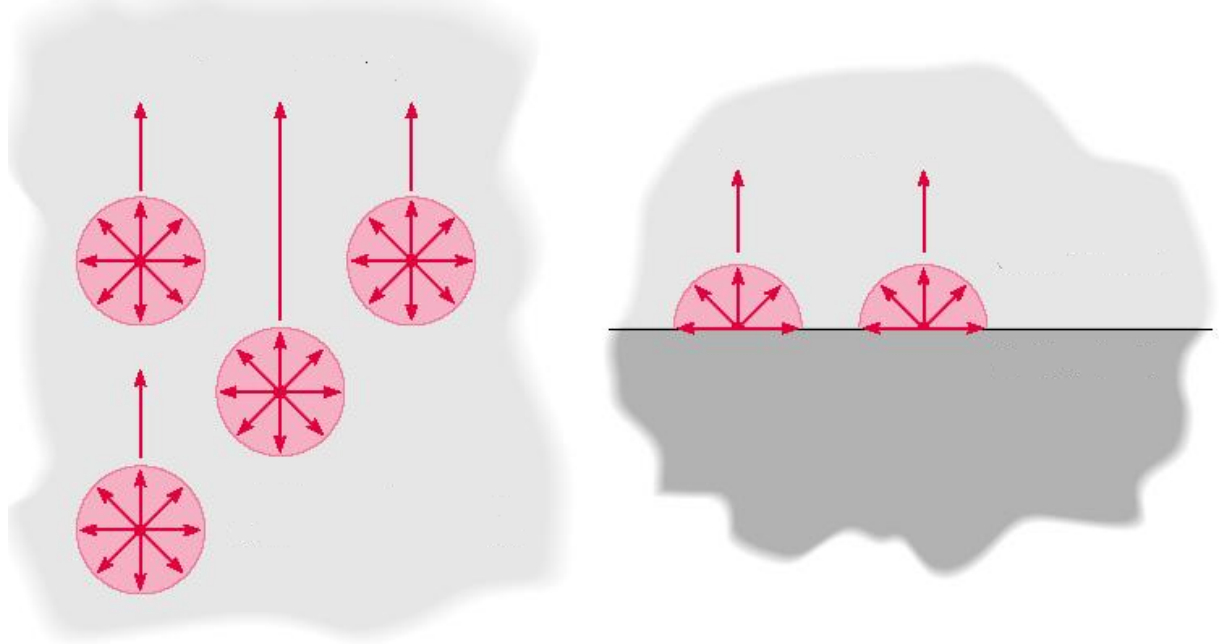


Figure 7.1 Rayonnement thermique : a) émission volumique (gaz ou milieu semi-transparent) ; b) émission surfacique (Incropera et al., 2007)

Le rayonnement est un phénomène avec un aspect corpusculaire et un aspect ondulatoire. L'*aspect corpusculaire* implique que les interactions entre matière et rayonnement résultent de l'émission ou de l'absorption de *quanta* discrets d'énergie appelés *photons*. Chaque photon possède l'énergie

$$W = h \nu \tag{7.1}$$

où  $h \cong 6.626 \cdot 10^{-34}$  J s est la constante de Planck.

L'*aspect ondulatoire* implique que le rayonnement électromagnétique peut être décomposé en une somme des ondes *monochromatiques* caractérisées par leurs fréquence,  $\nu$ , qui se propagent dans le vide à la *vitesse de la lumière*,  $c_0 = 2.997 \cdot 10^8$  m/s. La longueur de l'onde est reliée à la fréquence,

$$\lambda = \frac{c_0}{\nu} \quad (7.2)$$

Dans un autre milieu que le vide, la vitesse de propagation, ou la célérité, est

$$c = c_0 / n \quad (7.3)$$

où  $n$  est l'indice de réfraction du milieu. La longueur d'onde et la célérité dépendent du milieu alors que la fréquence est un invariant. Pourtant, en thermique du bâtiment on fait référence à la longueur d'onde mais cela ne pose pas de problème car l'indice de réfraction de l'air est proche de l'unité.

Le spectre électromagnétique est montré sur la Figure 7.2. Le rayonnement compris entre 0.1 et 100  $\mu\text{m}$  est nommé *rayonnement thermique* parce qu'il est relié aux phénomènes thermiques.

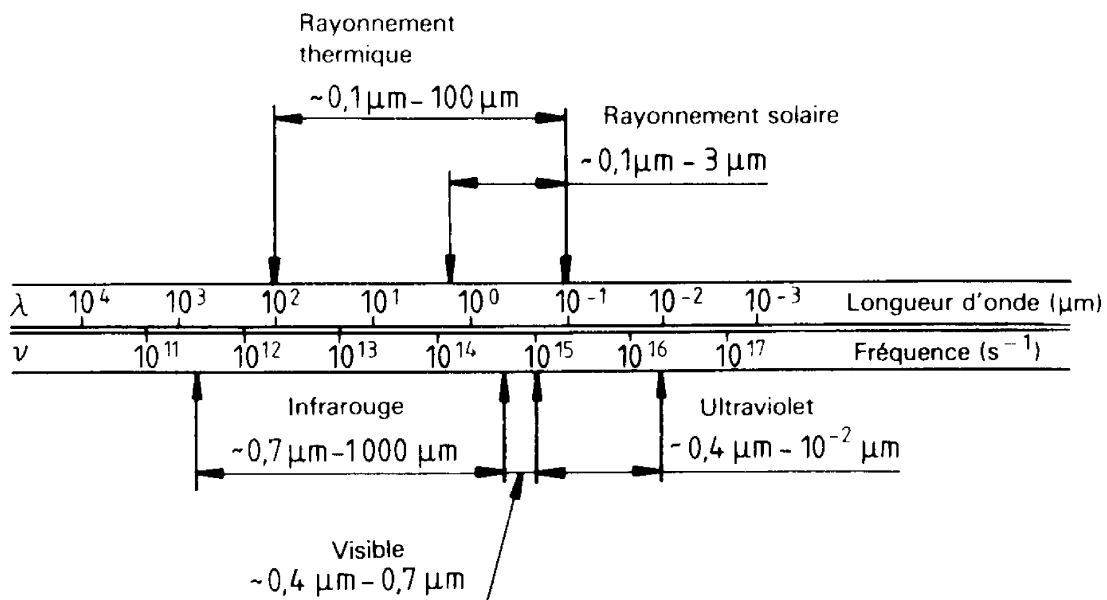


Figure 7.2 Spectre du rayonnement électromagnétique

Dans ce chapitre, consacré uniquement au rayonnement thermique, nous évoquerons successivement les grandeurs physiques caractéristiques du rayonnement, les lois de base, les phénomènes physiques mis en jeu et, enfin, la façon dont les corps échangent entre eux du rayonnement.

## 7.1 Photométrie énergétique ; transmission de l'énergie

Les phénomènes relatifs au rayonnement thermique dépendent d'une part de la longueur d'onde caractéristique de ce rayonnement et, d'autre part, de la direction d'émission du rayonnement.

### 7.1.1 Grandeurs spectrales et spatiales

Les grandeurs spécifiques aux longueurs d'onde sont baptisées *monochromatiques*, et celles spécifiques à la direction sont baptisées *directionnelles*.

Une grandeur *monochromatique*, en notation générique  $G_\lambda$ , est caractéristique pour un intervalle infinitésimal de longueurs d'onde,  $d\lambda$ . La grandeur *totale* ou *énergétique*,  $G$ , caractérise tout le spectre, c. à d. l'ensemble de longueurs d'onde :

$$G_\lambda = \frac{dG}{d\lambda} \quad (7.4)$$

ou

$$G = \int_0^\infty G_\lambda d\lambda \quad (7.5)$$

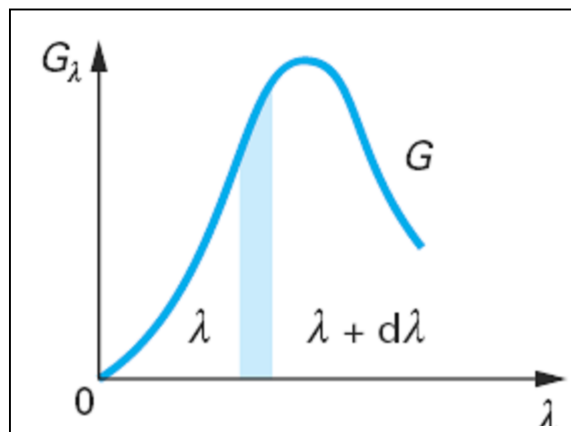


Figure 7.3 Distribution spectrale d'une grandeur (Dory, et al. 1999)

Les grandeurs *directionnelles* caractérisent le rayonnement dans une direction. Elles sont appelées *hémisphériques* si elles concernent l'ensemble des directions. La direction spatiale est donnée par l'angle solide.

### 7.1.2 Angle solide et l'aire vue

L'*angle solide* est à l'espace ce que l'angle est au plan. L'angle plan est défini comme étant le rapport de l'arc intercepté au rayon du cercle (Figure 7.4 a). L'unité est le radian (rd). L'*angle solide* est le rapport de la surface interceptée sur une sphère sur le carré du rayon de la sphère (Figure 7.4 b). L'unité est le stéradian (sr). L'angle solide de l'ensemble de l'espace est  $4\pi$  stéradians. Cette grandeur est très utile pour quantifier la "façon" dont on voit une partie de l'espace ou une surface donnée à partir d'un point.

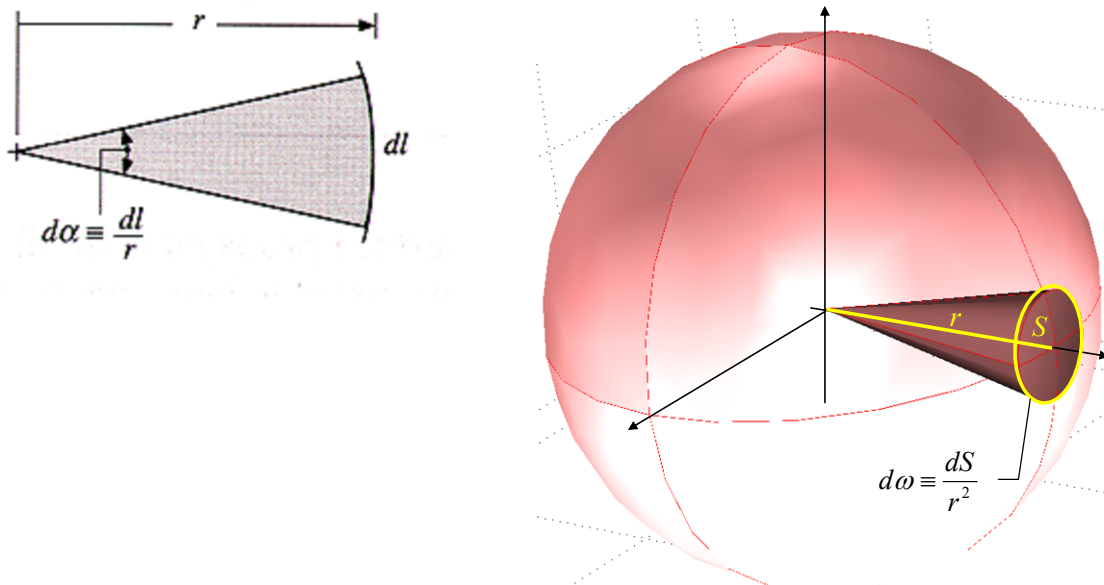


Figure 7.4 a) Angle plan. b) Angle solide

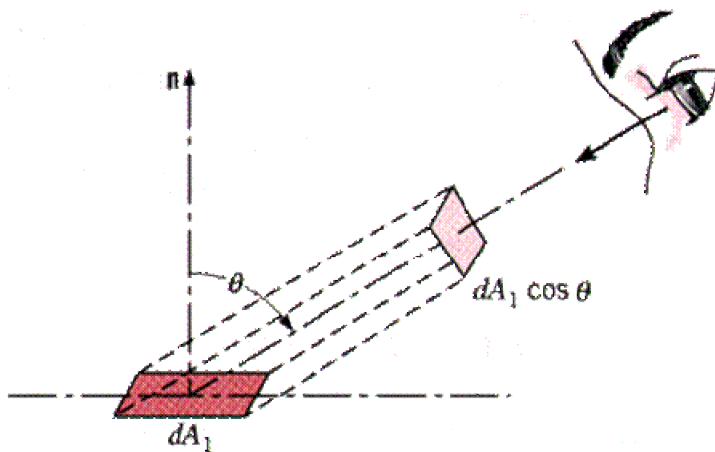


Figure 7.5 Aire vue (adaptée d'après Incropera et al., 2007)

Considérons une surface élémentaire  $dS$  qui est vue de l'espace sous un angle  $\theta$ . La *surface vue* du point de l'espace est

$$dA_v = dA \cos \theta \quad (7.6)$$



### 7.1.3 Flux rayonné

Le *flux total rayonné* par une source,  $\Phi$  [W], est la puissance que cette source émet dans tout l'espace. On utilise la notation  $\Phi$  pour le différentiel le flux rayonné par une surface du flux échangé entre surfaces,  $q$ . Le flux rayonné, étant émis pour différentes longueurs d'onde, peut être décomposé dans une somme des flux *monochromatiques* élémentaires,  $\Phi_\lambda$  [W/ $\mu$ ], qui permettent de caractériser précisément la "façon" dont le corps rayonne :

$$\Phi = \int_0^\infty \Phi_\lambda .d\lambda \quad (7.7)$$

Quantifier le flux émis par une source dans un domaine de longueur d'onde donné ( $\lambda_1, \lambda_2$ ), revient à exprimer

$$\Phi = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \Phi_\lambda .d\lambda \quad (7.8)$$

### 7.1.4 Emittance ou excitance d'une source

L'*émittance* ou l'*excitance*,  $M$  [W/m<sup>2</sup>], totale dans un point de la surface d'une source est le flux total émis par l'unité de surface :

$$M = \frac{d\Phi}{dS} \quad (7.9)$$

L'*émittance monochromatique* est le flux monochromatique émis par l'unité de surface :

$$M_\lambda = \frac{d\Phi_\lambda}{dS} \quad (7.10)$$

L'émittance est une grandeur hémisphérique qui permet de comparer les densités de puissance de différentes surfaces émettrices. Elle dépend de la température et des caractéristiques de la surface.

### 7.1.5 Intensité d'une source

L'*intensité totale* d'une source,  $I$  [W/sr], est le flux total émis par la surface dans l'unité d'angle solide  $d\Omega$  dans une direction donnée,  $\Delta$  (Figure 7.6) :

$$I_{\Delta} = \frac{d\Phi}{d\Omega} \quad (7.11)$$

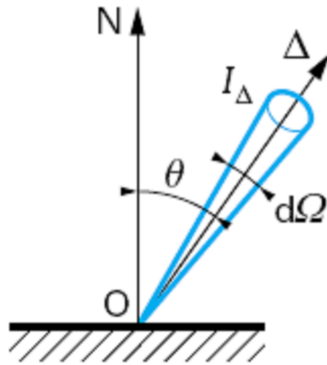


Figure 7.6 Intensité totale d'une source

L'intensité monochromatique,  $I_{\Delta\lambda}$  [W/sr · m], est le flux monochromatique émis par la surface dans l'unité de l'angle solide :

$$I_{\Delta\lambda} = \frac{d\Phi_{\lambda}}{d\Omega} \quad (7.12)$$

### 7.1.6 Luminance d'une source

La luminance caractérise la perception du rayonnement reçu par un observateur. Elle permet de comparer la puissance rayonnée dans une direction donnée par des sources de surfaces inégales ou d'orientation différentes ainsi que les puissances rayonnées par une même source dans différentes directions.

La *luminance totale* d'une source,  $L_{\Delta}$  [W/sr · m<sup>2</sup>], est égale au rapport entre l'intensité énergétique dans la direction  $\Delta$  et l'aire de la source vue depuis la direction  $\Delta$  (Figure 7.7) :

$$L_{\Delta} = \frac{I_{\Delta\lambda}}{dS \cos \theta} = \frac{d^2\Phi}{d\Omega dS \cos \theta} \quad (7.13)$$

La *luminance monochromatique* est définie d'une manière similaire, mais pour l'intensité monochromatique,

$$L_{\Delta\lambda} = \frac{d^2\Phi_{\lambda}}{d\Omega dS \cos \theta} \quad (7.14)$$

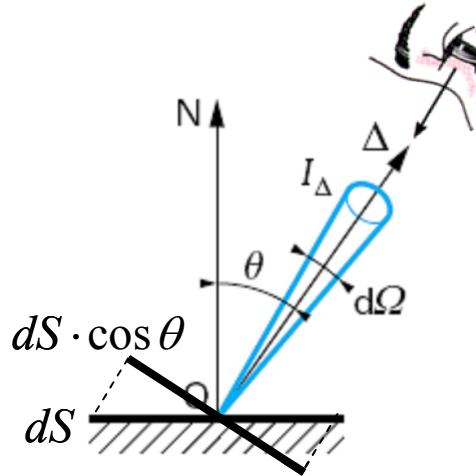


Figure 7.7 Luminance totale d'une source

### 7.1.7 Loi de Lambert

Si la luminance est indépendante de la direction, la source est à *émission isotrope* ou *diffuse*. La *loi de Lambert* relie l'*émittance*  $M$  et la *luminance*  $L$  d'une source :

$$M = \pi L \quad (7.15)$$

Pour démontrer cette relation, on considère le flux directionnel (Figure 7.8)

$$d^2\Phi_{Ox} = L_{Ox} \cdot dS \cos \theta \cdot d\Omega \quad (7.16)$$

Le flux hémisphérique s'obtient en intégrant sur une hémisphère le flux directionnel donné par l'équation (7.16)

$$d\Phi = L \cdot dS \int_S \cos \theta \cdot d\Omega = L \cdot dS \int_C ds' = L \cdot dS \cdot \pi \quad (7.17)$$

En tenant compte de la définition de l'*émittance* (7.9), l'équation (7.17) donne la loi de Lambert (7.15).

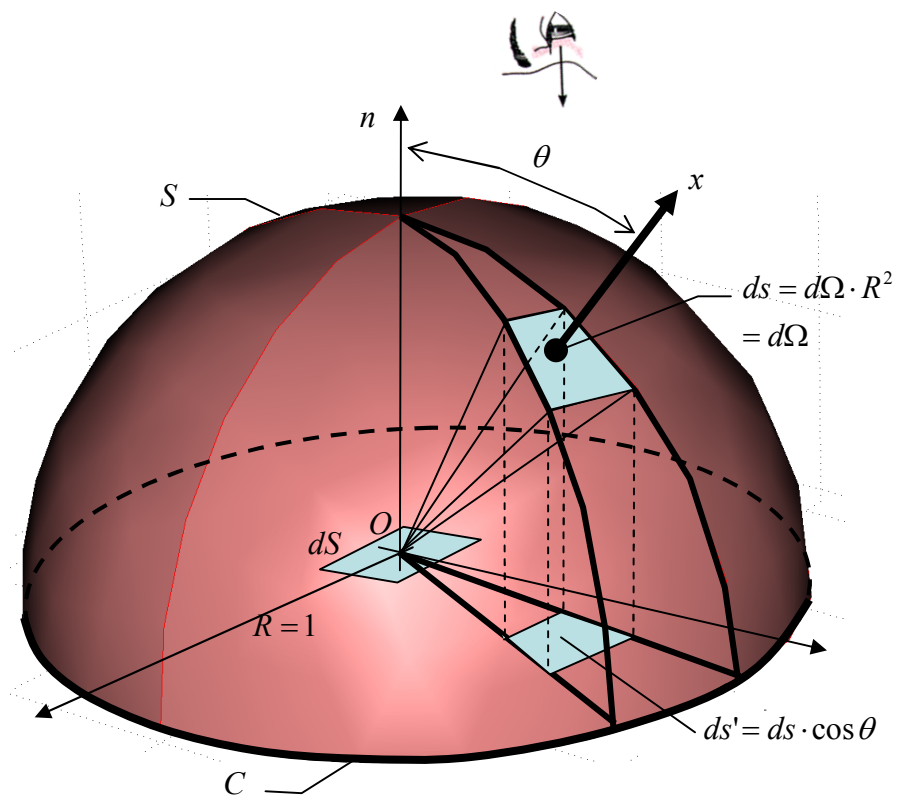


Figure 7.8 Dédution de la loi de Lambert

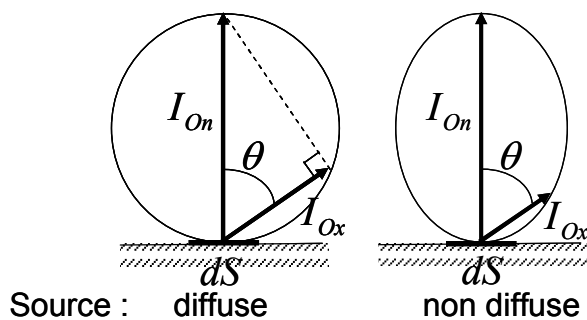


Figure 7.9 Indicatrice d'intensité du rayonnement

Dans ce cas, l'intensité rayonnée dans une direction  $\Delta$  est :

$$I_{\Delta} = I_N \cos \theta \quad (7.18)$$

où  $I_N$  est l'intensité rayonnée dans la direction de la normale. L'indicatrice des intensités correspond alors à une sphère tangente à la surface d'émission. Pratiquement, l'émission des corps réels diffère de celle des sources lambertiennes (Figure 7.9).

### 7.1.8 Éclairement énergétique d'une surface réceptrice

L'éclairement énergétique d'une surface,  $E$  [ $\text{W}/\text{m}^2$ ], est le flux d'énergie reçu par l'unité de surface réceptrice en provenance de l'ensemble des émetteurs :

$$E = \frac{d\Phi}{dS} \quad (7.19)$$

L'éclairement monochromatique est défini d'une manière similaire, mais pour les flux monochromatiques

$$E_\lambda = \frac{d\Phi_\lambda}{dS} \quad (7.20)$$

### 7.1.9 Relation entre les grandeurs d'émission et celles de réception

Considérons deux surfaces élémentaires  $dS_1$ , d'une source de luminance  $L_1$ , et  $dS_2$ , d'un récepteur. Le flux émis par la surface  $dS_1$  dans l'angle solide  $\Omega_1$  dans lequel est vue la surface  $dS_2$  depuis  $dS_1$  est :

$$d^2\Phi_{12} = L_1 dS_1 \cos \theta_1 d\Omega_1 \quad (7.21)$$

Avec

$$d\Omega_1 = \frac{dS_2 \cos \theta_2}{D^2} \quad (7.22)$$

on obtient la *formule de Bouguer* qui donne le flux (total ou monochromatique) reçu par la surface élémentaire  $dS_2$  en provenance de la surface  $dS_1$  d'une source de luminance  $L_{\Delta 1}$  qui se trouve dans la direction  $\Delta$  :

$$d^2\Phi_{12} = L_{\Delta 1} \frac{\cos \theta_1 dS_1 \cos \theta_2 dS_2}{D^2} \quad (7.23)$$

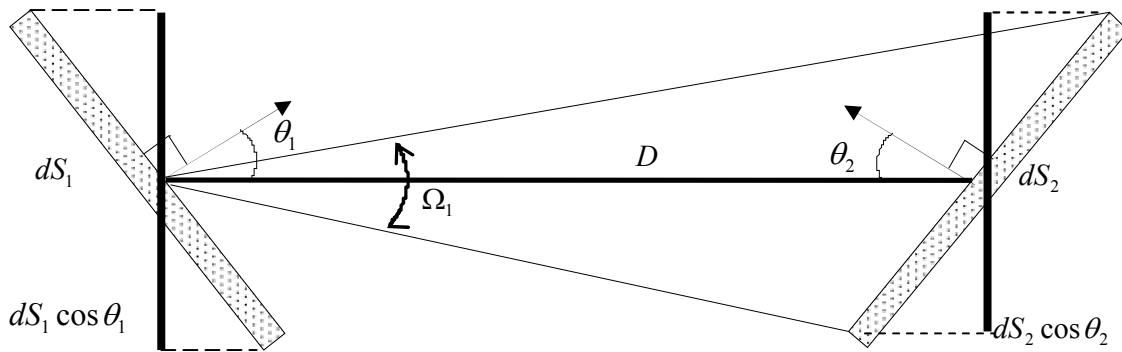


Figure 7.10 Flux émis par une surface et reçu par une autre surface

L'éclairement énergétique d'une surface réceptrice est relié à l'intensité (ou à la luminance) d'une source par la relation :

$$E_2 = L_1 \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dS_1 = I_1 \frac{\cos \theta_2}{r^2} \quad (7.24)$$

qui dérive directement de la formule de Bouguer.

## 7.2 Émission et réception du corps noir

Tous les corps émettent du rayonnement thermique en fonction de leur température et de la nature de leur surface. Un corps qui absorberait totalement tout le rayonnement incident, quelque soit son longueur d'onde ou sa direction, serait aussi celui qui rayonnerait le maximum d'énergie ; ce corps idéal est appelé *corps noir*. Son émission est isotrope et il absorbe toute l'énergie reçue (c. à d. il ne réfléchit ni ne transmet aucun rayonnement). Il est caractérisé par des grandeurs hémisphériques notée par  $^0$ . Il est un *émetteur et absorbeur parfait* constituant un *étalon de rayonnement*.

### 7.2.1 Loi de Planck

A partir de la théorie des quantas, Planck a établi la relation liant l'émittance monochromatique du corps noir,  $M_\lambda^0$ , à la température  $T$  et à la longueur d'onde  $\lambda$  lorsque le rayonnement se propage dans un milieu ayant l'indice de réfraction unitaire, par exemple en vide ou, en première approximation, en air

$$M_{\lambda,T}^0 = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{C_2/(\lambda T)} - 1} \quad (7.25)$$

$$\text{où } \begin{aligned} C_1 &= 2\pi h c^2 = 3.741 \cdot 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{m}^2 \\ C_2 &= hc / k = 1.438 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{K} \end{aligned}$$

avec  $c$  la vitesse de la lumière,  $h$  la constante de Planck et  $k$  la constante de Boltzmann.

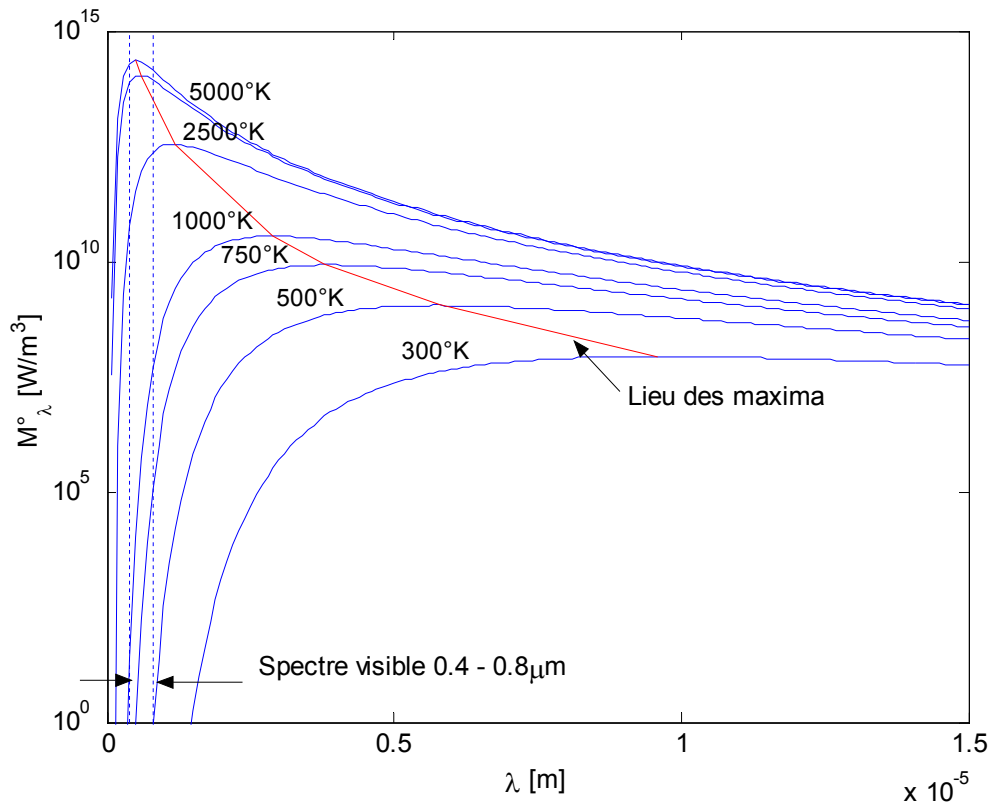


Figure 7.11 Loi de Planck

Sur la représentation graphique de la loi de Planck on peut remarquer (Figure 7.11) :

- Toutes ces courbes passent par l'origine et sont tangentes en ce point à l'axe des abscisses.
- L'axe des abscisses est l'asymptote de ces courbes lorsque la longueur d'onde tend vers l'infini.
- Ces courbes passent par un maximum qui est d'autant plus grand que la température est élevée.
- La longueur d'onde correspondant à ce maximum est d'autant plus petite que la température du corps est élevée.
- Pour une longueur d'onde donnée, l'émittance est d'autant plus élevée que la température est élevée.

La loi de Planck est une loi basée sur des principes fondamentaux de la physique. Pour les petites longueurs d'onde, dans le domaine visible, elle peut être approximée par

$$M_{\lambda,T}^0 = C_1 \lambda^{-5} e^{-C_2/(\lambda T)} \quad (7.26)$$

Pour les grandes longueurs d'onde, dans le domaine infrarouge, la loi de Planck a comme approximation

$$M_{\lambda,T}^0 = \frac{C_1 T}{C_2 \lambda^4} \quad (7.27)$$

### 7.2.2 Lois de Wien

Les lois de Wien donnent des informations sur l'émittance monochromatique maximale. *La première loi de Wien* indique la longueur d'onde  $\lambda_M$  pour laquelle l'émittance monochromatique est maximale. En annulant la dérivée de l'émittance dans la loi de Planck, donnée par l'équation (7.25), on obtient

$$\lambda_M T = 2.897 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (7.28)$$

La relation (7.28) permet d'estimer pour quelle longueur d'onde  $\lambda_M$  un corps noir à la température  $T$  émet le maximum de rayonnement (Tableau 7.1).

Tableau 7.1 Répartition de l'énergie rayonnée pour le corps noir

Température		Emittance	Longueur d'onde du maximum	Limites approximatives du spectre
Absolue, $T$ [K]	Celsius, $\theta$ [°C]	$M^0$ [W/cm <sup>2</sup> ]	$\lambda_M$ [μm]	$0.5\lambda_M - 5\lambda_M$ [μm]
300	27	0.05	9.6	4.8 - 41
500	227	0.36	5.7	3.0 - 25
750	477	1.80	3.8	2.0 - 16
1000	727	5.70	2.9	1.5 - 12
1200	927	11.82	2.4	1.2 - 11
1500	1227	28.90	1.9	1.0 - 8
2000	1727	91.00	1.4	0.7 - 6
3000	2727	462.00	0.96	0.5 - 4
5790	5517	6383.6	0.50	0.25 - 2.5

A la température ambiante ( $\cong 300 \text{ K}$ ), le rayonnement est principalement de grande longueur d'onde (GLO), en infrarouge, au delà du spectre visible. A la température du soleil ( $\cong 5500 \text{ K}$ ), le rayonnement est émis majoritairement en courte longueur d'onde (CLO), dans le spectre visible ( $\lambda_M = 0.5 \mu\text{m}$  correspond à la couleur jaune).

*La deuxième loi de Wien* permet de calculer la valeur de l'émittance monochromatique maximale pour une température donnée. En remplaçant la valeur de  $\lambda_M$  dans la loi de Planck, équation (7.25), on obtient :



$$\max(M_{\lambda_M, T}^0) = B T^5 \quad (7.29)$$

où  $B = 1.286 \cdot 10^5 \text{ W m}^{-3} \text{ K}^{-5}$ . Cette relation montre l'importance de la température pour l'émittance. Par exemple, le rapport entre l'émittance maximale du Soleil ( $\sim 6000 \text{ K}$ ) et celle d'un corps à la température ambiante ( $\sim 300 \text{ K}$ ) est de  $1.3 \cdot 10^5$  (Tableau 7.1).

### 7.2.3 Loi de Stefan-Boltzmann

Cette loi exprime l'émittance totale du corps noir en fonction de la température. En intégrant l'équation (7.25) pour tout le spectre,

$$M^0 = \int_0^\infty M_{\lambda, T}^0 d\lambda \quad (7.30)$$

on obtient

$$M^0 = \sigma_0 T^4 \quad (7.31)$$

où  $\sigma_0 = 5.68 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  est la constante de Stefan-Boltzmann. L'équation (7.31) peut être exprimée sous la forme équivalente

$$M^0 = 5.68 \left( \frac{T}{100} \right)^4 \quad (7.32)$$

### 7.2.4 Domaine utile du rayonnement

La loi de Planck permet de calculer l'émittance monochromatique d'un corps pour une température et une longueur d'onde données. Le flux émis par un corps à la température  $T$  dans un domaine de longueur d'onde  $\lambda_1, \lambda_2$  s'obtient en intégrant l'équation (7.25). Ce flux est exprimé par rapport à l'émittance totale par la *fraction de l'émittance totale*

$$F_{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_{\lambda, T}^0}{M^0} \quad (7.33)$$

On constat que les corps émettent 96% de l'énergie dans le domaine  $0.5 \lambda_M \dots 5 \lambda_M$ ,

$$F_{0.5\lambda_M-5\lambda_M} = 0.96 \quad (7.34)$$

nommé *domaine utile du rayonnement*. Ainsi, 46% de l'énergie solaire est transmise dans le domaine visible (Figure 7.12). Le Tableau 7.2 donne la fraction  $F_{0,\lambda}$  pour différents températures. La fraction d'émittance totale dans le domaine  $\lambda_1, \lambda_2$  est alors

$$F_{\lambda_1-\lambda_2} = F_{0-\lambda_2} - F_{0-\lambda_1} \quad (7.35)$$

Les domaines utiles du rayonnement du soleil, en courte longueur d'onde (CLO), et des corps à la température ambiante, en grande longueur d'onde (GLO), sont quasiment séparés par la valeur de  $2.5 \mu\text{m}$  (Figure 7.12).

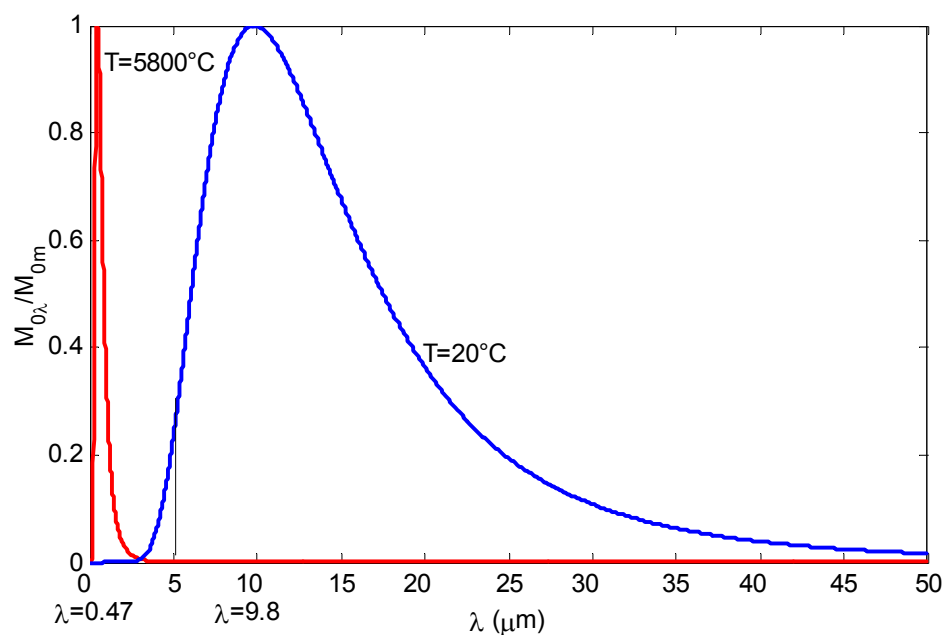
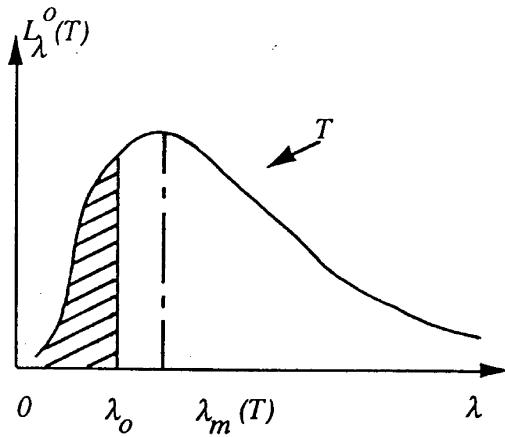


Figure 7.12 Domaines de courte et grande longueur d'onde (CLO et GLO)

Tableau 7.2 Fraction de l'émittance totale

Fonction  $z(0, \lambda_0/\lambda_m(T))$  pour le rayonnement d'équilibre



$$x = \frac{\lambda_0}{\lambda_m(T)}$$

$$F\left(0, \frac{\lambda_0}{\lambda_m(T)}\right) = \frac{\int_0^{\lambda_0} \pi L_\lambda^o(T) d\lambda}{\sigma T^4}$$

On rappelle que

- 1)  $T \cdot \lambda_m(T) = 2898 \mu m K$
- 2) 98 % de la puissance est répartie entre  $\frac{\lambda_m}{2}$  et  $7 \lambda_m$

$x$	$F$	$x$	$F$	$x$	$F$	$x$	$F$
0,10	$5,5 \cdot 10^{-18}$						
0,20	$4,0 \cdot 10^{-8}$						
0,22	$3,1 \cdot 10^{-7}$	0,92	$19,78 \cdot 10^{-2}$	1,62	$59,29 \cdot 10^{-2}$	3,6	$92,24 \cdot 10^{-2}$
0,24	$1,6 \cdot 10^{-6}$	0,94	$21,08 \cdot 10^{-2}$	1,64	$60,10 \cdot 10^{-2}$	3,7	$92,74 \cdot 10^{-2}$
0,26	$6,4 \cdot 10^{-6}$	0,96	$22,39 \cdot 10^{-2}$	1,66	$60,90 \cdot 10^{-2}$	3,8	$93,20 \cdot 10^{-2}$
0,28	$2,03 \cdot 10^{-5}$	0,98	$23,69 \cdot 10^{-2}$	1,68	$61,68 \cdot 10^{-2}$	3,9	$93,62 \cdot 10^{-2}$
0,30	$5,47 \cdot 10^{-5}$	1,00	$25,00 \cdot 10^{-2}$	1,70	$62,43 \cdot 10^{-2}$	4,0	$94,01 \cdot 10^{-2}$
0,32	$1,28 \cdot 10^{-4}$	1,02	$26,32 \cdot 10^{-2}$	1,72	$63,17 \cdot 10^{-2}$	5,0	$96,61 \cdot 10^{-2}$
0,34	$2,69 \cdot 10^{-4}$	1,04	$27,63 \cdot 10^{-2}$	1,74	$63,90 \cdot 10^{-2}$	6,0	$97,89 \cdot 10^{-2}$
0,36	$5,17 \cdot 10^{-4}$	1,06	$28,94 \cdot 10^{-2}$	1,76	$64,61 \cdot 10^{-2}$	7,0	$98,61 \cdot 10^{-2}$
0,38	$9,21 \cdot 10^{-4}$	1,08	$30,25 \cdot 10^{-2}$	1,78	$65,30 \cdot 10^{-2}$	8,0	$99,03 \cdot 10^{-2}$
0,40	$1,54 \cdot 10^{-3}$	1,10	$31,55 \cdot 10^{-2}$	1,80	$65,98 \cdot 10^{-2}$	9,0	$99,30 \cdot 10^{-2}$
						10,0	$99,48 \cdot 10^{-2}$
0,42	$2,43 \cdot 10^{-3}$	1,12	$32,83 \cdot 10^{-2}$	1,82	$66,65 \cdot 10^{-2}$	15,0	$99,84 \cdot 10^{-2}$
0,44	$3,66 \cdot 10^{-3}$	1,14	$34,09 \cdot 10^{-2}$	1,84	$67,29 \cdot 10^{-2}$	20,0	$99,927 \cdot 10^{-2}$
0,46	$5,30 \cdot 10^{-3}$	1,16	$35,34 \cdot 10^{-2}$	1,86	$67,92 \cdot 10^{-2}$	30,0	$99,978 \cdot 10^{-2}$
0,48	$7,41 \cdot 10^{-3}$	1,18	$36,58 \cdot 10^{-2}$	1,88	$68,54 \cdot 10^{-2}$	40,0	$99,991 \cdot 10^{-2}$
0,50	$10,05 \cdot 10^{-3}$	1,20	$37,81 \cdot 10^{-2}$	1,90	$69,15 \cdot 10^{-2}$	50,0	$99,995 \cdot 10^{-2}$
						$\infty$	$100,0 \cdot 10^{-2}$
0,52	$1,33 \cdot 10^{-2}$	1,22	$39,02 \cdot 10^{-2}$	1,92	$69,75 \cdot 10^{-2}$		
0,54	$1,71 \cdot 10^{-2}$	1,24	$40,22 \cdot 10^{-2}$	1,94	$70,33 \cdot 10^{-2}$		
0,56	$2,16 \cdot 10^{-2}$	1,26	$41,40 \cdot 10^{-2}$	1,96	$70,89 \cdot 10^{-2}$		
0,58	$2,67 \cdot 10^{-2}$	1,28	$42,56 \cdot 10^{-2}$	1,98	$71,43 \cdot 10^{-2}$		
0,60	$3,25 \cdot 10^{-2}$	1,30	$43,71 \cdot 10^{-2}$	2,00	$71,96 \cdot 10^{-2}$		
0,62	$3,90 \cdot 10^{-2}$	1,32	$44,83 \cdot 10^{-2}$	2,1	$74,48 \cdot 10^{-2}$		
0,64	$4,61 \cdot 10^{-2}$	1,34	$45,93 \cdot 10^{-2}$	2,2	$76,72 \cdot 10^{-2}$		
0,66	$5,39 \cdot 10^{-2}$	1,36	$47,01 \cdot 10^{-2}$	2,3	$78,73 \cdot 10^{-2}$		
0,68	$6,22 \cdot 10^{-2}$	1,38	$48,07 \cdot 10^{-2}$	2,4	$80,53 \cdot 10^{-2}$		
0,70	$7,12 \cdot 10^{-2}$	1,40	$49,11 \cdot 10^{-2}$	2,5	$82,14 \cdot 10^{-2}$		
0,72	$8,07 \cdot 10^{-2}$	1,42	$50,13 \cdot 10^{-2}$	2,6	$83,58 \cdot 10^{-2}$		
0,74	$9,08 \cdot 10^{-2}$	1,44	$51,14 \cdot 10^{-2}$	2,7	$84,88 \cdot 10^{-2}$		
0,76	$10,14 \cdot 10^{-2}$	1,46	$52,12 \cdot 10^{-2}$	2,8	$86,05 \cdot 10^{-2}$		
0,78	$11,23 \cdot 10^{-2}$	1,48	$53,08 \cdot 10^{-2}$	2,9	$87,11 \cdot 10^{-2}$		
0,80	$12,37 \cdot 10^{-2}$	1,50	$54,03 \cdot 10^{-2}$	3,0	$88,07 \cdot 10^{-2}$		
0,82	$13,55 \cdot 10^{-2}$	1,52	$54,95 \cdot 10^{-2}$	3,1	$88,93 \cdot 10^{-2}$		
0,84	$14,75 \cdot 10^{-2}$	1,54	$55,86 \cdot 10^{-2}$	3,2	$89,72 \cdot 10^{-2}$		
0,86	$15,98 \cdot 10^{-2}$	1,56	$56,75 \cdot 10^{-2}$	3,3	$90,44 \cdot 10^{-2}$		
0,88	$17,23 \cdot 10^{-2}$	1,58	$57,61 \cdot 10^{-2}$	3,4	$91,10 \cdot 10^{-2}$		
0,90	$18,50 \cdot 10^{-2}$	1,60	$58,46 \cdot 10^{-2}$	3,5	$91,70 \cdot 10^{-2}$		

### 7.3 Émission du corps gris

L'évaluation de l'émission du corps réel se fait par rapport au corps noir placé dans les mêmes conditions de température et de longueur d'onde en utilisant des coefficients adimensionnels appelés *facteurs d'émission* ou *émissivités* (Figure 7.13) :

- l'*émissivité monochromatique directionnelle* :

$$\varepsilon_{Ox\lambda} = L_{Ox\lambda} / L_{\lambda}^0 \quad (7.36)$$

- l'*émissivité monochromatique hémisphérique* :

$$\varepsilon_{\lambda} = M_{\lambda} / M_{\lambda}^0 \quad (7.37)$$

- l'*émissivité totale directionnelle* :

$$\varepsilon_{Ox} = L_{Ox} / L^0 \quad (7.38)$$

- l'*émissivité totale hémisphérique* :

$$\varepsilon = M / M^0 \quad (7.39)$$

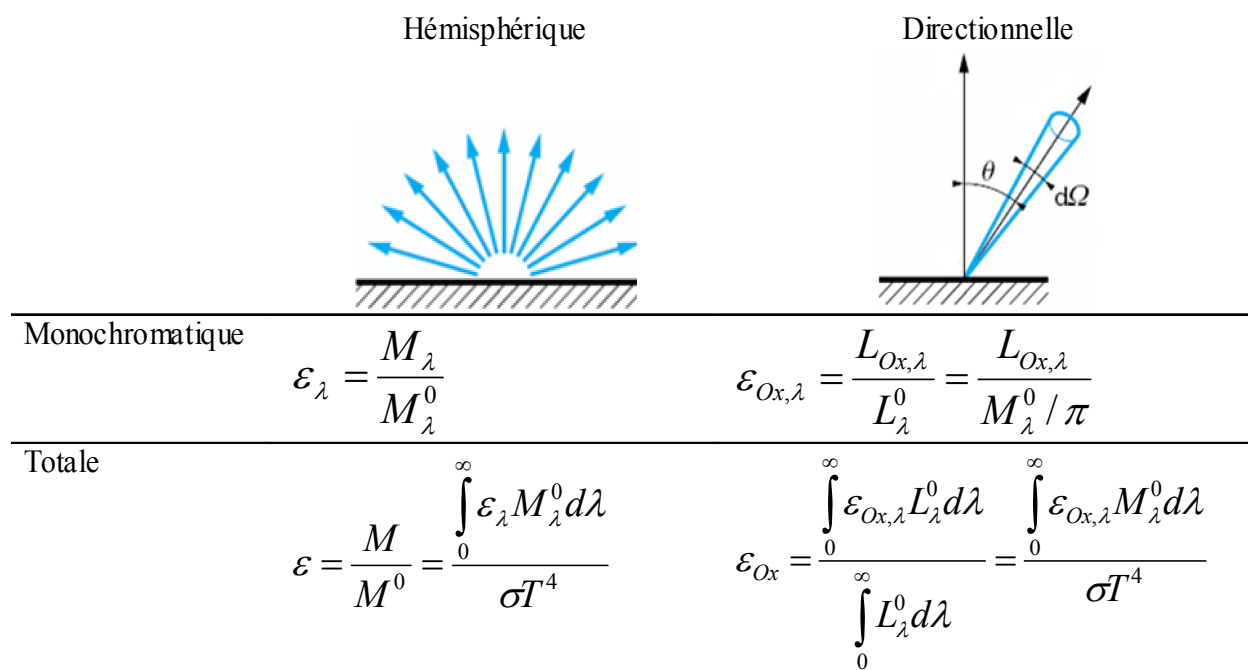
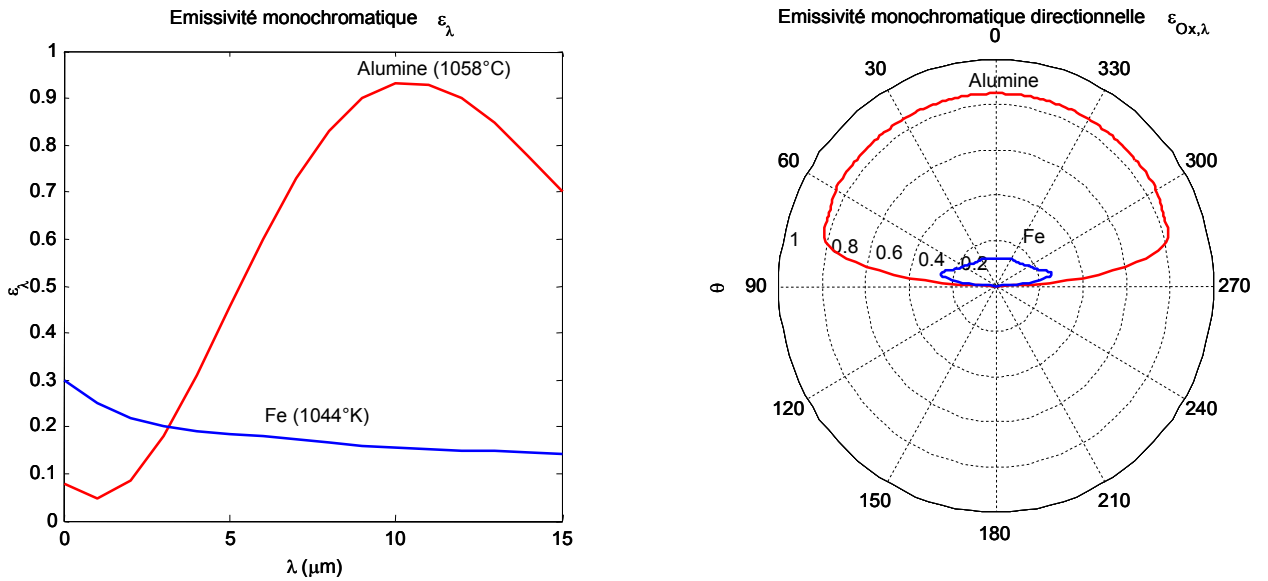


Figure 7.13 Émissivité

Comme l'énergie émise par un corps réel est inférieure à celle rayonnée par le corps noir, les émissivités ont des valeurs inférieures à l'unité. L'émissivité dépend de la nature physico-chimique des corps et de l'état de leurs surfaces (rugosité, couverture de la surface). Elle varie avec la température, la longueur d'onde et la direction du rayonnement (Figure 7.14).



monochromatique

$$\epsilon_\lambda = \frac{M_\lambda}{M_\lambda^0}$$

monochromatique directionnelle

$$\epsilon_{Ox,\lambda} = \frac{L_{Ox,\lambda}}{L_\lambda^0} = \frac{L_{Ox,\lambda}}{M_\lambda^0 / \pi}$$

Figure 7.14 Dépendance de l'émissivité en fonction de la longueur d'onde et de la direction

Dans la pratique, il est difficile d'obtenir les émissivités et on utilise trois grandes catégories de corps :

1. *corps gris* : l'émissivité est supposée indépendante de la longueur d'onde mais elle est en fonction de la direction du rayonnement ;
2. *corps à émission diffuse (ou isotrope)* : l'émissivité est indépendante de la direction mais varie en fonction de la longueur d'onde ;
3. *corps gris et diffusants* : l'émissivité est indépendante de la longueur d'onde et de la direction du rayonnement. Dans une zone de température et longueur d'onde, et pour un état donné de la surface, elle a une valeur moyenne unique,  $\epsilon$  (Tableau 7.3). Cette hypothèse est acceptable pour de nombreux problèmes de thermique du bâtiment, à condition de tenir compte des bandes d'émission sélective. Dans ce cas, l'émittance est

$$M = \epsilon \sigma T^4 \quad (7.40)$$

et la luminance est

$$L = \epsilon \sigma T^4 / \pi \quad (7.41)$$

Tableau 7.3 Émissivités à la température de 20°C des corps gris diffusants

Matériaux	état de surface	$\varepsilon$
Aluminium	poli	0,06
	oxydé	0,30
Cuivre	poli	0,04
	très oxydé	0,75
Or	pur très poli	0,02
Zinc	pur très poli	0,02
	galvanisé	0,20-0,30
Brique	ordinaire	0,93
	réfractaire (à 1000°)	0,60
Carbone (dépôt de noir de fumée)		0,95-0,98
Argile		0,90
verre ordinaire		0,94
Marbre		0,95
Peintures	Aluminium	0,30-0,60
	noire mâte	0,90
	blanche mâte	0,90-0,95
	peinture à l'huile toutes couleurs	~0,90
Papier		0,95
Bois	suites essences	0,75-0,95

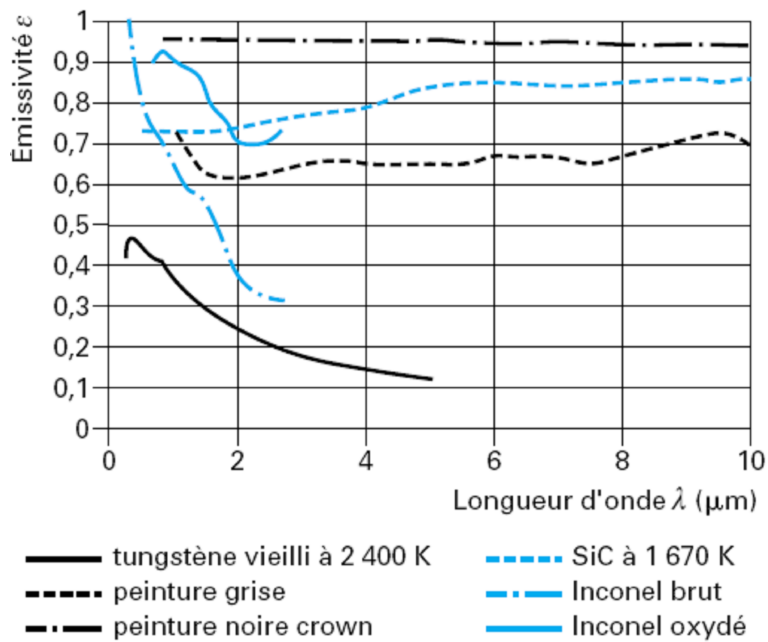


Figure 7.15 Émissivité isotrope des corps gris en fonction de la longueur d'onde (Dory et al. 1999)

## 7.4 Réception du corps gris

Lorsqu'un rayonnement d'une longueur de onde  $\lambda$  et d'éclairement  $E_\lambda$  atteint la surface d'un corps, une partie est réfléchi,  $\rho_\lambda E_\lambda$ , une autre partie est transmise directement,  $\tau_\lambda E_\lambda$ , et enfin la dernière partie est absorbée dans la masse du récepteur,  $\alpha_\lambda E_\lambda$ . Seule cette dernière partie correspond à l'apport énergétique du corps qui fait que le corps se chauffe.

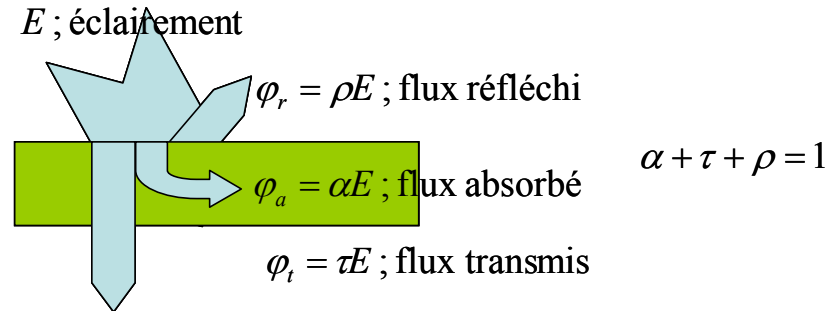


Figure 7.16 Interaction rayonnement – matière : absorption, réflexion, transmission

La conservation de l'énergie implique que

$$\rho_\lambda + \tau_\lambda + \alpha_\lambda = 1 \quad (7.42)$$

### 7.4.1 Réflexion

En fonction de la nature des corps, de leur état de surface, de la longueur d'onde et de la direction incidente, la réflexion du rayonnement thermique est *spéculaire* (de type miroir) ou *diffuse*. Les surfaces lisses (métaux, miroirs) ont une réflexion spéculaire qui suit la loi de l'optique géométrique : le rayon réfléchi se trouve dans le plan d'incidence et l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence (Figure 7.17 a). Les surfaces rugueuses (ou le diffuseur parfait) ont une réflexion diffuse qui suit la loi de Lambert retransmettant le rayonnement réfléchi dans tout l'espace avec une luminance constante (Figure 7.17 b). En infrarouge, les corps ont généralement ce comportement.

### 7.4.2 Absorption et transmission

#### 7.4.2.1 Types de milieux

Seul le rayonnement absorbé par le corps se transforme en chaleur. En fonction de leurs propriétés d'absorption, on distingue trois types de milieux :

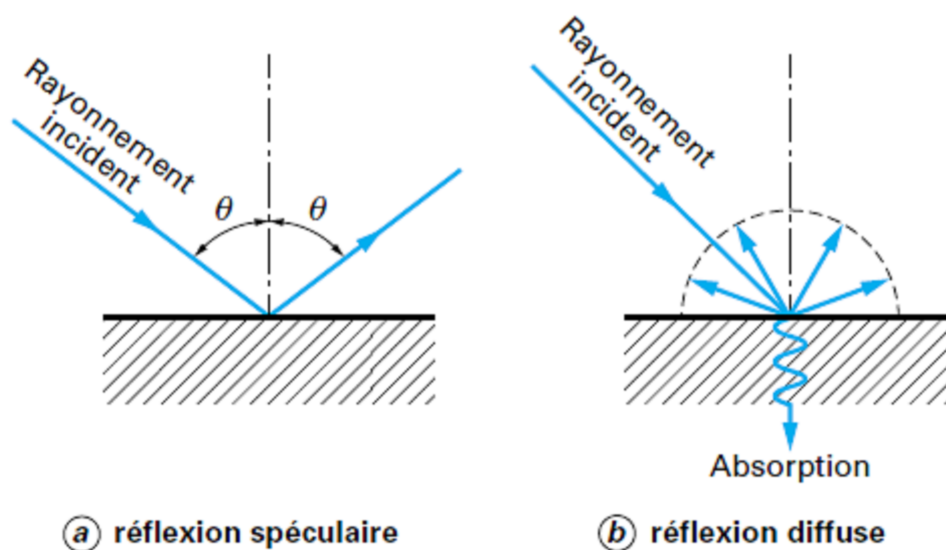


Figure 7.17 Types de réflexion (Dory et al., 1999)

- *opaques* : sont les solides ou les liquides pour lesquelles l'absorption se fait dans une couche superficielle mince et la transmissivité est nulle.
- *semi-transparents* : sont les milieux (gaz : vapeurs d'eau, dioxyde de carbone, solides : verre, films plastiques) qui absorbent partiellement le rayonnement qui peut parcourir une distance avant d'être complètement absorbée. La transmissivité dépend de l'épaisseur et de la longueur d'onde.
- *transparents* : sont les milieux dans lesquelles le rayonnement ne subit aucune atténuation ( $\alpha = 0$  ;  $\tau = 1$ ). C'est le cas du vide et, dans une première approximation pour infrarouge, de l'air.

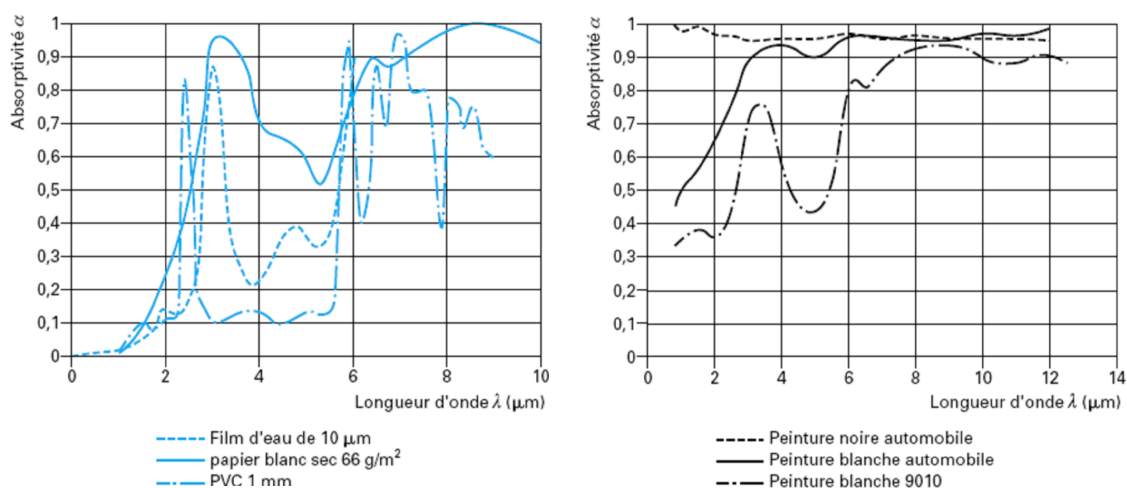


Figure 7.18 Spectre d'absorption (Dory et al., 1999)



### 7.4.2.2 Absorption sélective

L'absorption est un phénomène qui dépend de la *longueur d'onde incidente*. Les spectres d'absorption des corps opaques ou semi-transparents sont, généralement, des courbes continues (Figure 7.18). En adaptant le spectre d'absorption au domaine de longueur d'onde émises par la source on obtient l'effet de serre ou le chauffage radiatif.

## 7.5 Relation entre absorption et émission : loi de Kirchhoff

A une température donnée, pour chaque longueur d'onde et pour chaque direction de propagation, l'*absorptivité* et l'*émissivité* monochromatique directionnelles sont égales :

$$\varepsilon_{Ox,\lambda} = \alpha_{Ox,\lambda} \quad (7.43)$$

Dans le cas de l'émission diffuse,

$$\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda \quad (7.44)$$

Les facteurs d'émission totale,

$$\varepsilon(T) = \frac{M(T)}{M^0(T)} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda M_\lambda^0(T) d\lambda}{\int_0^\infty M_\lambda^0(T) d\lambda} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda M_\lambda^0(T) d\lambda}{\sigma T^4} \quad (7.45)$$

calculé à la température du corps, et de l'absorption totale,

$$\alpha = \frac{\varphi_a}{E} = \frac{\int_0^\infty \alpha_\lambda E_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty E_\lambda d\lambda} \quad (7.46)$$

calculé à la température de la source du rayonnement, sont différents. En pratique, on retient l'absorptivité correspondant à la bande spectrale d'émission de la source du rayonnement et l'émissivité correspondant à sa propre température. Dans le cas particulier des *corps gris*

$$\varepsilon = \alpha \quad (7.47)$$

et pour le *corps noir*,

$$\varepsilon = \alpha = 1 \quad (7.48)$$

## 7.6 Effet de serre : conséquence pratique de la variation des propriétés radiatives en fonction de la longueur d'onde

Les propriétés radiatives du verre varient en fonction de la longueur d'onde du rayonnement (Tableau 7.4). Les conséquences peuvent être visualisées en utilisant une camera thermique (qui enregistre les rayonnements infrarouge émis par les corps) et une camera normale (qui enregistre les rayonnements en spectre visible). Dans la Figure 7.19 (a) on regarde un bâtiment par une fenêtre ouverte. La camera thermique nous montre le flux en infrarouge reçu de la surface du bâtiment et des objets environnants (la transmissivité de l'air est proche de 1 en spectre visible et infrarouge). Dans la Figure 7.19 (b) on regarde le même paysage à travers le verre de la fenêtre fermée. Cette fois-ci le rayonnement visible passe à travers la vitre ( $\tau|_{T=5780\text{ K}} = 0.95$ ) mais le rayonnement infrarouge ne passe pas ( $\tau|_{T=300\text{ K}} = 0$ ). Ce qu'on voit est l'image de la personne prenant la photo, qui représente le rayonnement quittant la surface du verre (rayonnement émis due à la température du verre et rayonnement réfléchis par la surface du verre); si on considère les propriétés du Tableau 7.4 ( $\alpha|_{T=300\text{ K}} = 1.00$ ), le rayonnement est complètement absorbé.

Tableau 7.4 Exemple de propriétés radiatives du verre en fonction de la longueur d'onde

	Bande spectrale	Température de rayonnement	$\alpha$	$\rho$	$\tau$
1	$0.25 \leq \lambda \leq 2.5 \mu\text{m}$	5780 K ( $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$ )	0	0.05	0.95
2	$3 \leq \lambda \leq 30 \mu\text{m}$	450 K ( $\lambda = 6.1 \mu\text{m}$ )	0.65	0.30	0.05
3	$5 \leq \lambda \leq 50 \mu\text{m}$	300 K ( $\lambda = 9.8 \mu\text{m}$ )	1.00	0	0



(a)



(b)

Figure 7.19 Visualisation des propriétés radiatives du verre : a) Fenêtre ouverte : le rayonnement passe en courte longueur d'onde (dans le domaine visible du spectre) et en grande longueur d'onde (dans le domaine infrarouge) ; b) Fenêtre fermée : le rayonnement traverse le verre dans le domaine visible du spectre mais pas en infrarouge ; en infrarouge, le rayonnement est absorbé – on voit l'image de la personne du au rayonnement absorbé.

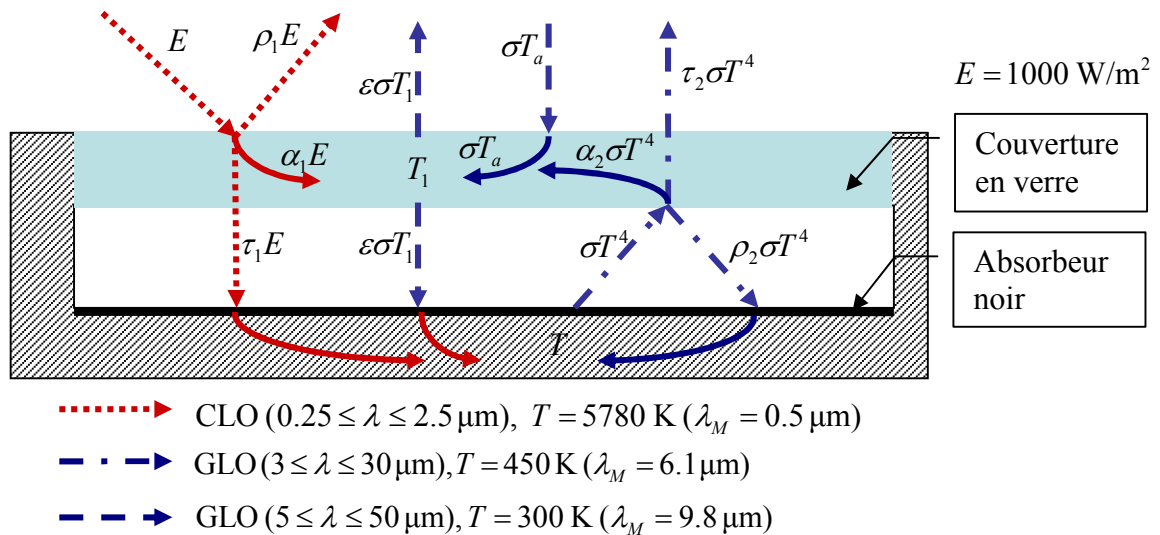


Figure 7.20 Panneau solaire : schéma de principe et bilan des flux

La variation des propriétés radiatives en fonction de la longueur d'onde est à l'origine de l'effet de serre ; ce phénomène est utilisé dans les panneaux solaires destinés au chauffage des bâtiments ou de l'eau chaude sanitaire. Un capteur solaire est composé d'un *absorbeur* de couleur noir, qui chauffe le fluide qui circule dans un réseau hydraulique et une *couverture* en verre. Le rôle de la couverture est de réduire les pertes de l'absorbeur par rayonnement (due à l'effet de serre) et par convection (due à la lame d'air immobile).

On se propose d'évaluer les températures de l'absorbeur et du vitrage en régime stationnaire en considérant que le rayonnement. On suppose que l'absorbeur n'a pas des pertes ni vers le réseau hydraulique ni vers le boîtier. L'éclairement solaire étant connu,  $E = 1000 \text{ W/m}^2$ , on cherche les températures de l'absorbeur,  $T$ , et de la vitre,  $T_1$ . En écrivant le bilan thermique en régime permanent sur l'absorbeur et sur le verre, on obtient deux équations avec deux les températures  $T$  et  $T_1$  comme inconnues.

Le bilan radiatif sur l'unité de surface la vitre est :

$$2\varepsilon \cdot \sigma T_1^4 = \alpha_1 E + \alpha_2 \sigma T^4 + \sigma T_a^4 \quad [\text{W/m}^2] \quad (7.49)$$

où

$2\varepsilon \cdot \sigma T_1^4$  est flux émis sur l'unité de surface par la vitre (à la température  $T_1$ ) ; le coefficient 2 exprime le fait que l'émission du rayonnement se fait sur les deux face de la vitre ;

$\alpha_1 E$  - la fraction du flux solaire absorbé par la vitre (coefficient d'absorption  $\alpha_1$  correspondant au domaine utile du rayonnement émis par une source à la température du soleil de 5780 K) ;

$\alpha_2 \sigma T^4$  - la fraction du flux émis par l'absorbeur (à la température  $T$ ) qui est absorbé par la vitre (coefficient d'absorption  $\alpha_2$  correspondant au domaine utile du rayonnement émis par une source à la température  $T = 450 \text{ K}$ ) ;

$\sigma T_a^4$  - la fraction du flux émis par l'air ambiant (à la température  $T_a$ ) qui absorbé par la vitre (coefficient d'absorption  $\alpha_3 = 1$  correspondant au domaine utile du rayonnement émis par une source à la température  $T_a = 300$  K).

Le bilan radiatif sur l'absorbeur, considéré comme un corps noir, est :

$$\sigma T^4 = \tau_1 E + \varepsilon \sigma T_1^4 + \rho_2 \sigma T^4 \quad (7.50)$$

où :

$\sigma T^4$  est le flux émis par l'unité de surface par l'absorbeur (à la température  $T$ ) ;

$\tau_1 E$  - le flux absorbé provenant du rayonnement solaire traversant ;

$\varepsilon \sigma T_1^4$  - le flux absorbé provenant du rayonnement émis par le verre (à la température  $T_1$ ) ;

$\rho_2 \sigma T^4$  - le flux absorbé provenant de la fraction du rayonnement émis par l'absorbeur qui est réfléchi par la vitre vers l'absorbeur.

En résolvant le système d'équations (7.49) et (7.50) pour les valeurs des coefficients données dans le Tableau 7.4, pour  $E = 1000$  W/m<sup>2</sup> et  $T_a = 20$  °C, on obtient  $T = 460$  K = 187 °C.

## 7.7 Échanges radiatifs entre des surfaces séparées par un milieu transparent

Le problème des échanges radiatifs est de déterminer le bilan énergétique de chaque corps, c. à d. la différence entre le flux qu'il émet et celui qu'il absorbe. Ces flux dépendent des températures respectives des corps, de la forme et de la position relative de leurs surfaces et de leurs coefficients d'émission et d'absorption.

### 7.7.1 Échanges radiatifs entre surfaces noires

#### 7.7.1.1 Facteurs de forme

La distribution du rayonnement d'une surface vers les surfaces sur lesquelles elle rayonne est indiquée par le *facteur de forme*. Considérons deux éléments de surface,  $dS_1$  et  $dS_2$  appartenant respectivement aux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . Le flux total émis par l'élément de surface  $dS_1$  vers l'élément de surface  $dS_2$  est donnée par la formule de Bouguer (7.23). Si la surface  $dS_1$  obéit à la loi de Lambert, l'équation (7.23) devient :

$$d^2\Phi_{12} = \frac{M_1^0}{\pi} dS_1 \cos \theta_1 \frac{dS_2 \cos \theta_2}{D^2} \quad (7.51)$$

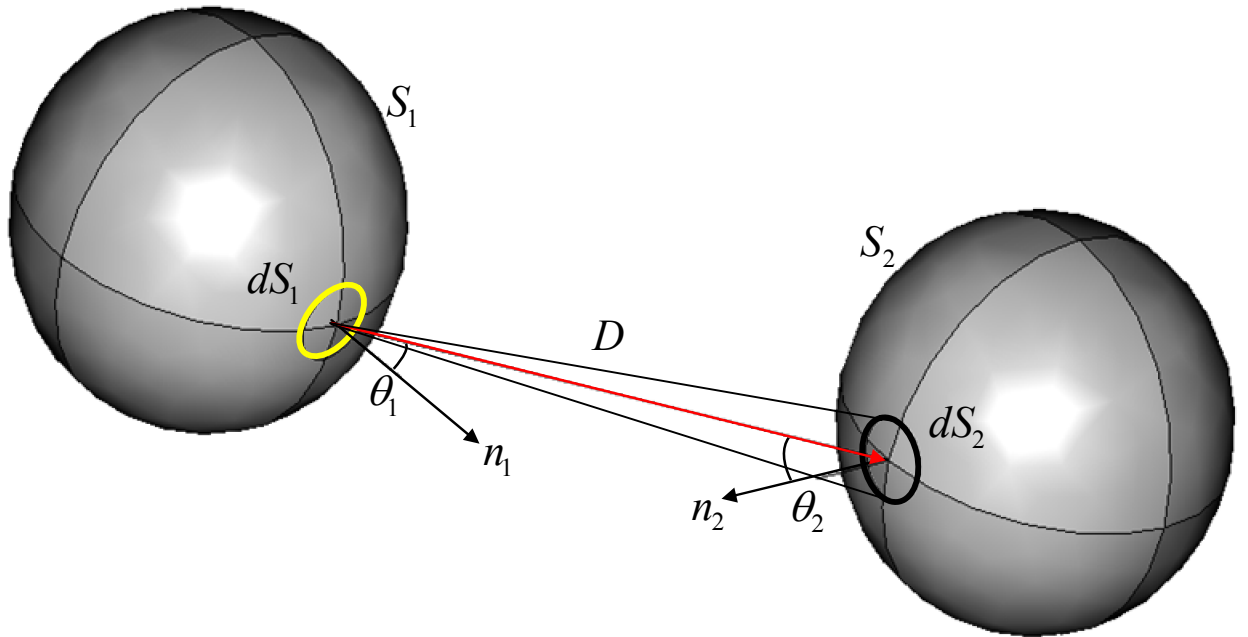


Figure 7.21 Échanges radiatifs entre deux surfaces

Le flux total émis par la surface  $S_1$  et arrivant sur la surface  $S_2$  est obtenu par intégration :

$$\Phi_{12} = M_1^0 \iint_{S_1 S_2} \frac{dS_1 \cos \theta_1 \cdot dS_2 \cos \theta_2}{\pi \cdot D^2} \quad (7.52)$$

Le rapport entre le flux total émis par la surface  $S_1$ ,  $q_1 = M_1^0 S_1$ , et le flux reçu par la surface  $S_2$  en provenance de la surface  $S_1$ ,

$$F_{12} \equiv \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{\Phi_{12}}{M_1^0 S_1} = \frac{1}{\pi S_1} \iint_{S_1 S_2} \frac{dS_1 \cos \theta_1 \cdot dS_2 \cos \theta_2}{D^2} \quad (7.53)$$

est appelé *facteur de forme de la surface  $S_1$  vis-à-vis de la surface  $S_2$* . La proportion du flux  $F_{21}$  émis par  $S_2$  et arrivant sur  $S_1$  est le *facteur de forme de  $S_2$  vis-à-vis de  $S_1$*  :

$$F_{21} \equiv \frac{\Phi_{21}}{\Phi_2} = \frac{1}{\pi S_2} \iint_{S_1 S_2} \frac{dS_1 \cos \theta_1 \cdot dS_2 \cos \theta_2}{D^2} \quad (7.54)$$

### 7.7.1.2 Relations entre les facteurs de forme

La symétrie des expressions (7.52) et (7.54) conduit à la relation de *réciprocité*

$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21} \quad (7.55)$$

Dans une enceinte fermée, le flux total  $\Phi_i$  émis par une surface  $S_i$  sera reçu par les autres  $n$  surfaces  $S_j$  qui forment l'enceinte

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n \Phi_{ij} \quad (7.56)$$

ou, comme  $\Phi_{ij} \equiv F_{ij} \Phi_j$ ,

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^n F_{ij} \Phi_j \quad (7.57)$$

Il en résulte la *relation de complémentarité*

$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1 \quad (7.58)$$

### 7.7.1.3 Estimations des facteurs de forme

Pour une enceinte fermée par  $n$  surface, il y a  $n \times n$  facteurs de forme qui peuvent être groupés dans la matrice des facteurs de forme :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{n1} & F_{n2} & \cdots & F_{nn} \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

Le calcul des facteurs de forme peut devenir très vite complexe et ne constitue pas ici l'objet de ce document. Citons toutefois les quatre grandes voies possibles.

*Utilisation des relations de réciprocité et de complémentarité.* Dans ce cas, ces deux relations permettent d'accéder simplement aux différents facteurs de forme. La formule de réciprocité (7.55) implique que les facteurs de forme symétriques relatif à la première diagonale de la matrice des facteurs de forme (7.59) sont en relation :

$$F_{ij} = \frac{S_j}{S_i} F_{ji} \quad (7.60)$$

La relations de complémentarité implique qu'un facteur de forme appartenant à une ligne de la matrice  $\mathbf{F}$  de (7.59) dépend des autre facteurs de forme :

$$F_{ik} = 1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n F_{ij} \quad (7.61)$$

Les relations de réciprocité et de complémentarité implique que il est nécessaire de calculer  $n(n-1)/2$  facteurs de forme ; les autres peuvent être déduits avec les équations (7.60) et (7.61).

*Méthode d'Ondracek.* Si l'on veut calculer le facteur de forme d'une surface élémentaire  $dS_1$  par rapport à une grande surface,  $S_2 \gg dS_1$ , une seule intégrale est à faire. Le flux reçu par un élément  $dS_2$  de la surface  $S_2$  en provenance de l'élément de surface  $dS_1$  est (Figure 7.22)

$$d^2\Phi_{12} = L_1^0 \cdot dS_1 \cos \theta_1 \cdot d\Omega_1 = \frac{M_1^0}{\pi} \cdot dS_1 \cos \theta_1 \cdot \frac{dS_2 \cos \theta_2}{D^2} \quad (7.62)$$

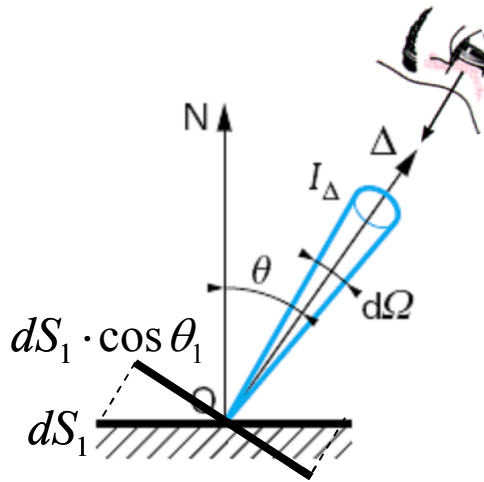


Figure 7.22 Flux transmis par une surface élémentaire  $dS_1$  dans une direction  $\Delta$

Le flux reçu par la surface  $S_2$  en provenance de  $dS_1$  est

$$\Phi_{12} = M_1^0 \iint_{dS_1 S_2} \frac{dS_1 \cos \theta_1 \cdot dS_2 \cos \theta_2}{\pi D^2} = M_1^0 dS_1 \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \cos \theta_1 \frac{dS_2 \cos \theta_2}{D^2} \quad (7.63)$$

Le facteur de forme de la surface  $dS_1$  vis-à-vis de la surface  $S_2$  est

$$F_{12} \equiv \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{\Phi_{12}}{M_1^0 \cdot dS_1} = \frac{1}{\pi} \int_{S_2} \cos \theta_1 \cdot \frac{dS_2 \cos \theta_2}{D^2} \quad (7.64)$$

où  $q_1 = M_1^0 \cdot dS_1$  est le flux total émis par la surface  $dS_1$ . La surface  $dS_2 \cos \theta_2$  est la surface  $dS_2$  vue du point  $dS_1$  (Figure 7.23). L'angle solide  $(dS_2 \cos \theta_2)/D^2$  sous lequel est vue la surface  $dS_2$  du point  $dS_1$  est égale à la surface  $d\sigma$  interceptée par cette angle solide sur la sphère unitaire ayant le centre au  $dS_1$ . La quantité  $d\sigma' = \cos \theta_1 d\sigma$  est la projection de la surface  $d\sigma$  dans le plan de la surface  $dS_1$  (Figure 7.23).

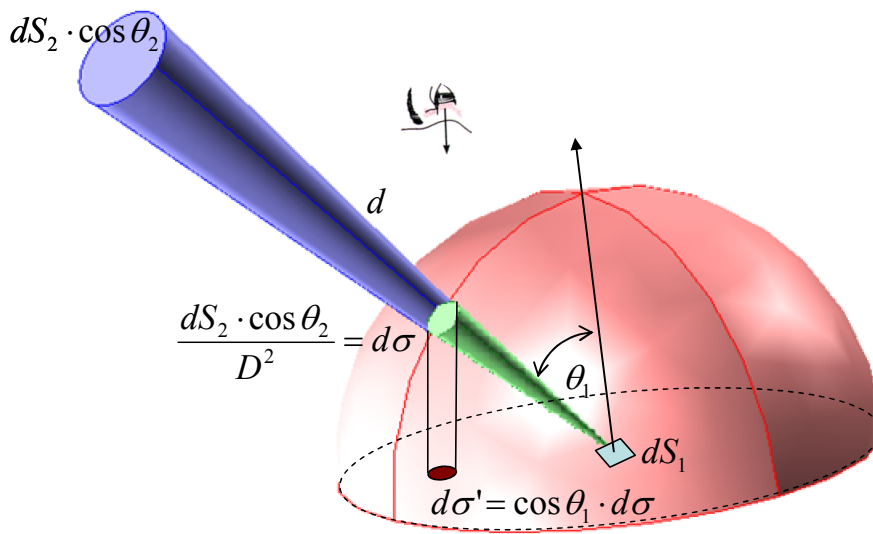


Figure 7.23 Méthode de la sphère unitaire

L'équation (7.64) devient :

$$F_{12} \equiv \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1} = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma} \cos \theta_1 \cdot d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma'} d\sigma' = \frac{1}{\pi} \sigma' \quad (7.65)$$

*Formules et abaques.* De nombreux travaux ont été faits pour des configurations types afin de déterminer ces facteurs de forme (Howell, 2001).

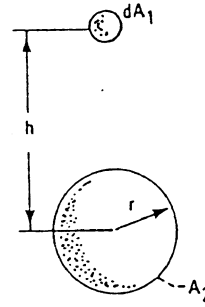
*Méthode de Monte-Carlo.* L'informatique a permis la mise au point de méthodes très adaptées, méthodes utilisées par l'imagerie numérique. Il suffit de "tirer" aléatoirement un rayon dans l'espace d'un point quelconque  $dS_1$  de la surface  $S_1$  et de vérifier s'il "touche" la surface  $S_2$ . En effectuant un grand nombre de tirages aléatoires, on obtient le facteur de forme entre  $S_1$  et  $S_2$ . Cette méthode permet de traiter des volumes complexes, contenant des obstacles.



**Source sphérique ponctuelle par rapport à une sphère de rayon  $r$**

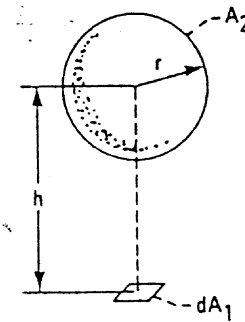
$$R = \frac{r}{h}$$

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - R^2} \right)$$



**Plan élémentaire  $dA_1$  par rapport à une sphère de rayon  $r$ . La normale de l'élément  $dA_1$  passe par le centre de la sphère.**

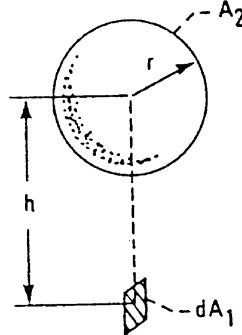
$$F_{12} = \left( \frac{r}{h} \right)^2$$



**Plan élémentaire  $dA_1$  par rapport à une sphère de rayon  $r$ . La tangente à l'élément  $dA_1$  passe par le centre de la sphère**

$$H = \frac{h}{r}$$

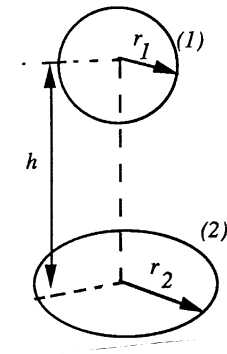
$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \left( \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{H^2 - 1}} - \frac{\sqrt{H^2 - 1}}{H^2} \right)$$



**Sphère de rayon  $r_1$  et disque de rayon  $r_2$  de même axe.**

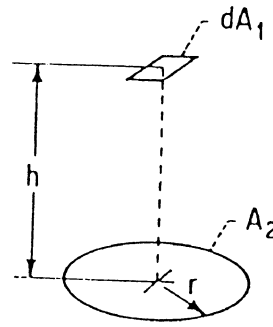
$$R_2 = \frac{r_2}{h}$$

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R_2^2}} \right]$$



*Plan élémentaire  $dA_1$  par rapport à un disque situé dans un plan parallèle à  $dA_1$  ; la normale à cet élément passe par le centre du disque.*

$$F_{12} = \frac{r^2}{h^2 + r^2}$$



*Prismes de longueur infinie, de section droite triangulaire. Les côtés AB, BC et AC peuvent être rectilignes ou curvilignes mais convexes (vers l'intérieur de l'enceinte)*

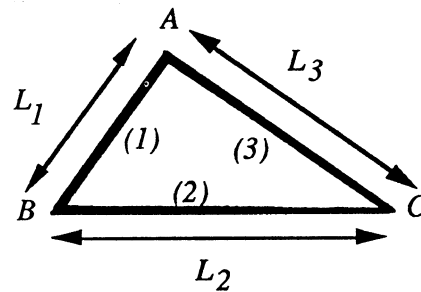
Il vient :

$$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$$

Compte tenu des relations d'enceinte et de réciprocité, on trouve :

$$F_{12} = \frac{L_1 + L_2 - L_3}{2L_1}$$

$F_{13}$  et  $F_{23}$  se déduisent de  $F_{12}$  par changement des indices.



Deux rectangles identiques X.Y et X'.Y' parallèles et exactement superposés à la distance Z.

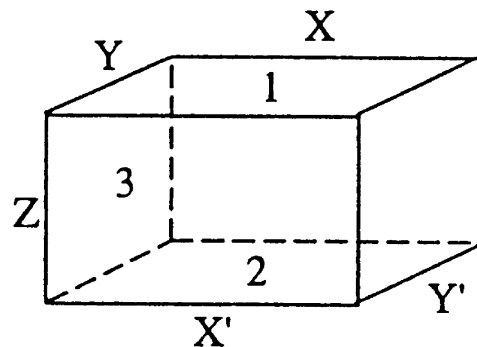
Introduisons la fonction de Gouffé G (k)

$$G(k) = \frac{1}{k} \operatorname{Arctg} k + \frac{k^2 - 1}{4k^2} \ln(1 + k^2) - \frac{1}{2} \ln k$$

posons :  $\frac{X}{Z} = p$  et  $\frac{Y}{Z} = q$

On a

$$F_{12} = \frac{2q}{\pi p} \left[ G\left(\frac{q}{\sqrt{p^2 + 1}}\right) - G(q) \right] + \frac{2p}{\pi p} \left[ G\left(\frac{p}{\sqrt{q^2 + 1}}\right) - G(p) \right]$$



Pour les 2 rectangles perpendiculaires X.Y et Y.Z se raccordant par leur arête Y

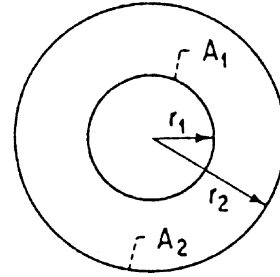
$$F_{13} = \frac{q}{\pi p} \left[ G(q) + G\left(\frac{q}{p}\right) - G\left(\frac{q}{\sqrt{p^2 + 1}}\right) \right]$$

**Cylindres concentriques de longueur infinie**

$$F_{12} = 1$$

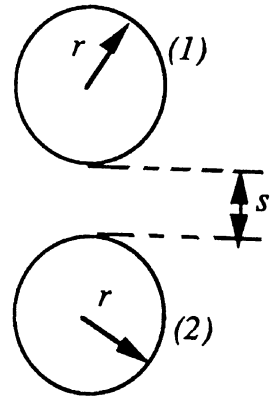
$$F_{21} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$F_{22} = 1 - \frac{r_1}{r_2}$$

**Cylindres infiniment longs d'axes parallèles et de même diamètre.**

$$X = 1 + \frac{s}{2r}$$

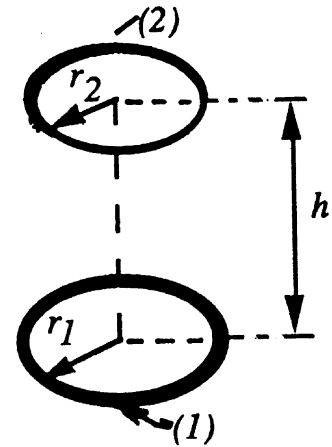
$$F_{12} = F_{21} = \frac{1}{\pi} \left[ \sqrt{X^2 - 1} + \arcsin \frac{1}{X} - X \right]$$

**Disques circulaires parallèles de même axe**

$$R_1 = \frac{r_1}{h} \quad R_2 = \frac{r_2}{h}$$

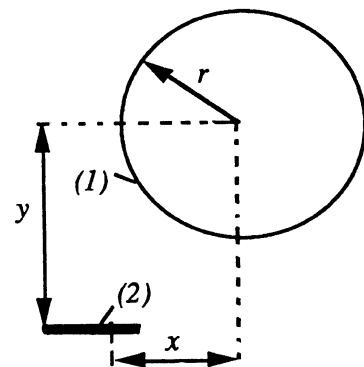
$$X = 1 + \frac{1 + R_2^2}{R_1^2}$$

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left[ X - \sqrt{X^2 - 4 \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2} \right]$$

**Bande élémentaire, de longueur quelconque, parallèle à l'axe d'un cylindre infiniment long.**

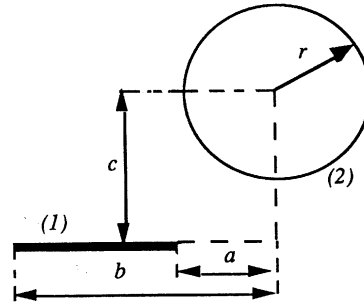
$$X = \frac{x}{r} \quad Y = \frac{y}{r}$$

$$F_{21} = \frac{Y}{X^2 + Y^2}$$



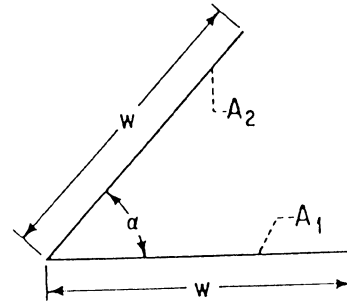
**Bande de largeur finie, de longueur infinie,  
parallèle à l'axe d'un cylindre infiniment long.**

$$F_{12} = \frac{r}{b-a} \left[ \operatorname{arctg} \frac{b}{c} - \operatorname{arctg} \frac{a}{c} \right]$$



**Deux portions de plan de longueur infinie, de largeur w,  
formant un dièdre d'angle plan  $\alpha$ .**

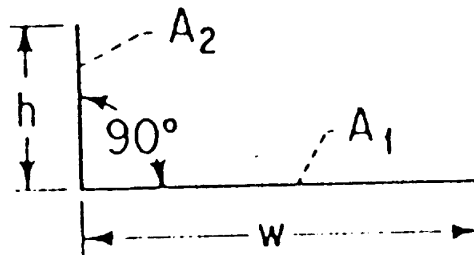
$$F_{12} = F_{21} = 1 - \sin \frac{\alpha}{2}$$



**Deux portions de plan de longueur infinie, de largeurs respectives h et w, formant un  
dièdre d'angle plan égal à  $90^\circ$**

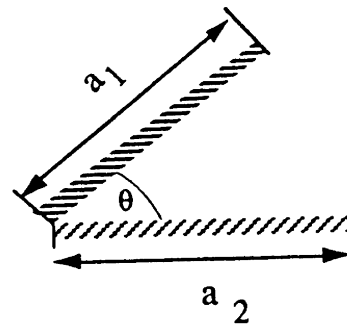
$$H = \frac{h}{w}$$

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left( 1 + H - \sqrt{1 + H^2} \right)$$



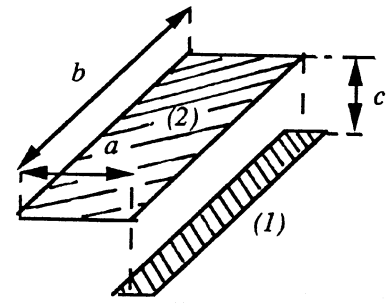
**Disposition bidimensionnelle : deux plaques ayant une arête commune et faisant un angle  
 $\theta$**

$$F_{12} = \frac{1}{2a_1} \left[ a_1 + a_2 - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \theta} \right]$$



**Bande élémentaire parallèle à un rectangle**

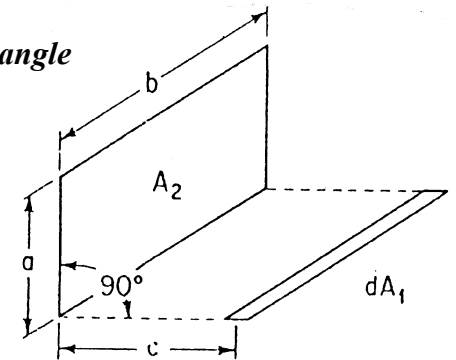
$$X = \frac{a}{c} \quad Y = \frac{b}{c}$$



$$F_{12} = \frac{1}{\pi Y} \left[ \sqrt{1+Y^2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} - \operatorname{arctg} X + \frac{XY}{\sqrt{1+X^2}} \operatorname{arctg} \frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} \right]$$

**Bande élémentaire dans un plan perpendiculaire à un rectangle**

$$X = \frac{a}{c} \quad Y = \frac{c}{b}$$

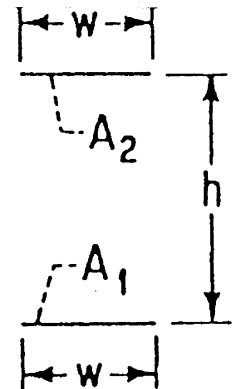


$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \left[ \tan^{-1} \frac{1}{Y} + \frac{Y}{2} \ln \frac{Y^2(X^2 + Y^2 + 1)}{(Y^2 + 1)(X^2 + Y^2)} - \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right]$$

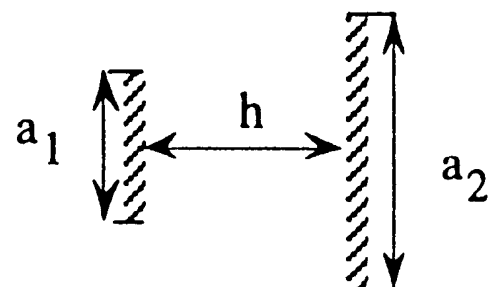
**Bandes de longueur infinie, parallèles, de même largeur  $w$  et opposées.**

$$H = \frac{h}{w}$$

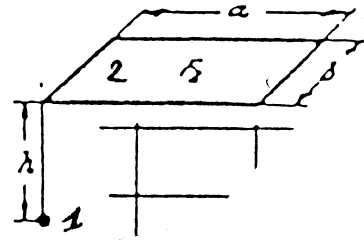
$$F_{12} = F_{21} = \sqrt{1+H^2} - H$$

**Disposition bidimensionnelle – deux plaques parallèles de largeurs différentes et ayant le même plan de symétrie :**

$$F_{12} = \frac{1}{a_1} \left[ \sqrt{\frac{1}{4}(a_1 + a_2)^2 + h^2} - \sqrt{\frac{1}{4}(a_1 - a_2)^2 + h^2} \right]$$

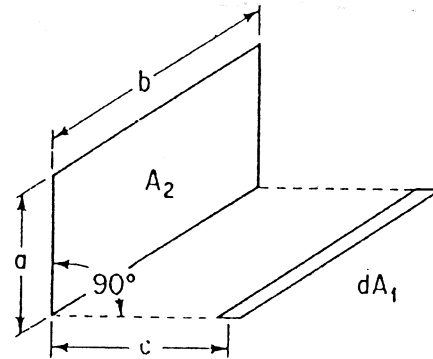


**Sphère élémentaire par rapport à une surface rectangulaire.**  
**La sphère est située sur la normale à la surface issue d'un angle.**



$$F_{12} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} \arctan g \cdot \frac{a}{\sqrt{b^2 + h^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \arctan g \frac{b}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right]$$

**Deux rectangles finis, ayant un bord commun et faisant entre-eux un angle de 90°.**

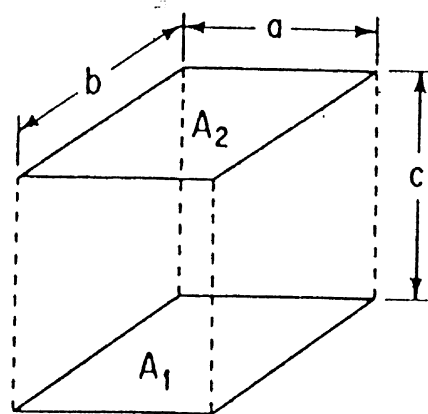


$$H = \frac{h}{l} \quad W = \frac{w}{l}$$

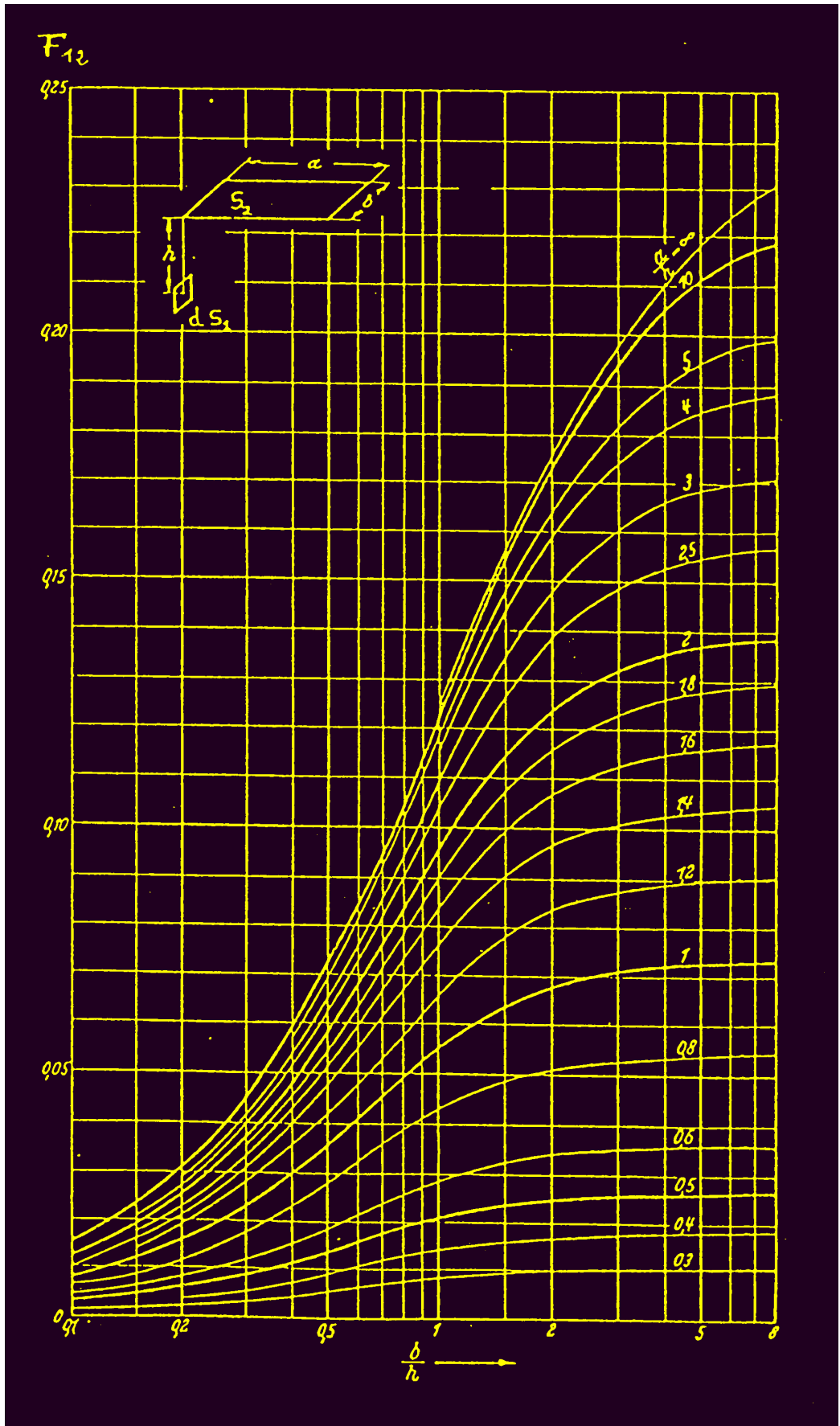
$$F_{12} = \frac{1}{\pi W} \left( W \tan^{-1} \frac{1}{W} + H \tan^{-1} \frac{1}{H} - \sqrt{H^2 + W^2} \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{H^2 + W^2}} \right) + \frac{1}{4} \ln \left\{ \frac{(1 + W^2)(1 + H^2)}{1 + W^2 + H^2} \left[ \frac{W^2(1 + W^2 + H^2)}{(1 + W^2)(W^2 + H^2)} \right]^{W^2} \left[ \frac{H^2(1 + H^2 + W^2)}{(1 + H^2)(H^2 + W^2)} \right]^{H^2} \right\}$$

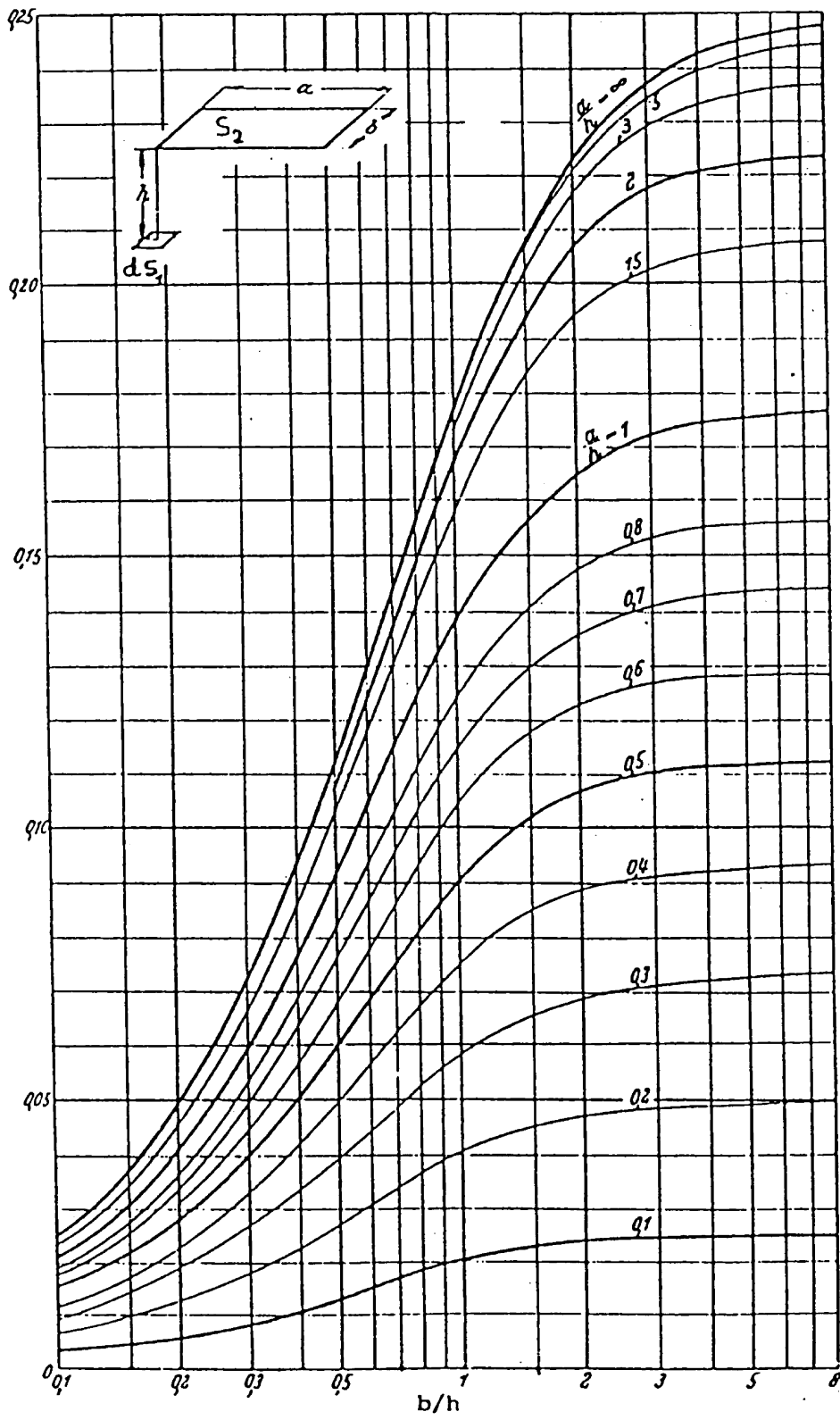
**Rectangles identiques, parallèles et directement opposés.**

$$X = \frac{a}{c} \quad Y = \frac{b}{c}$$

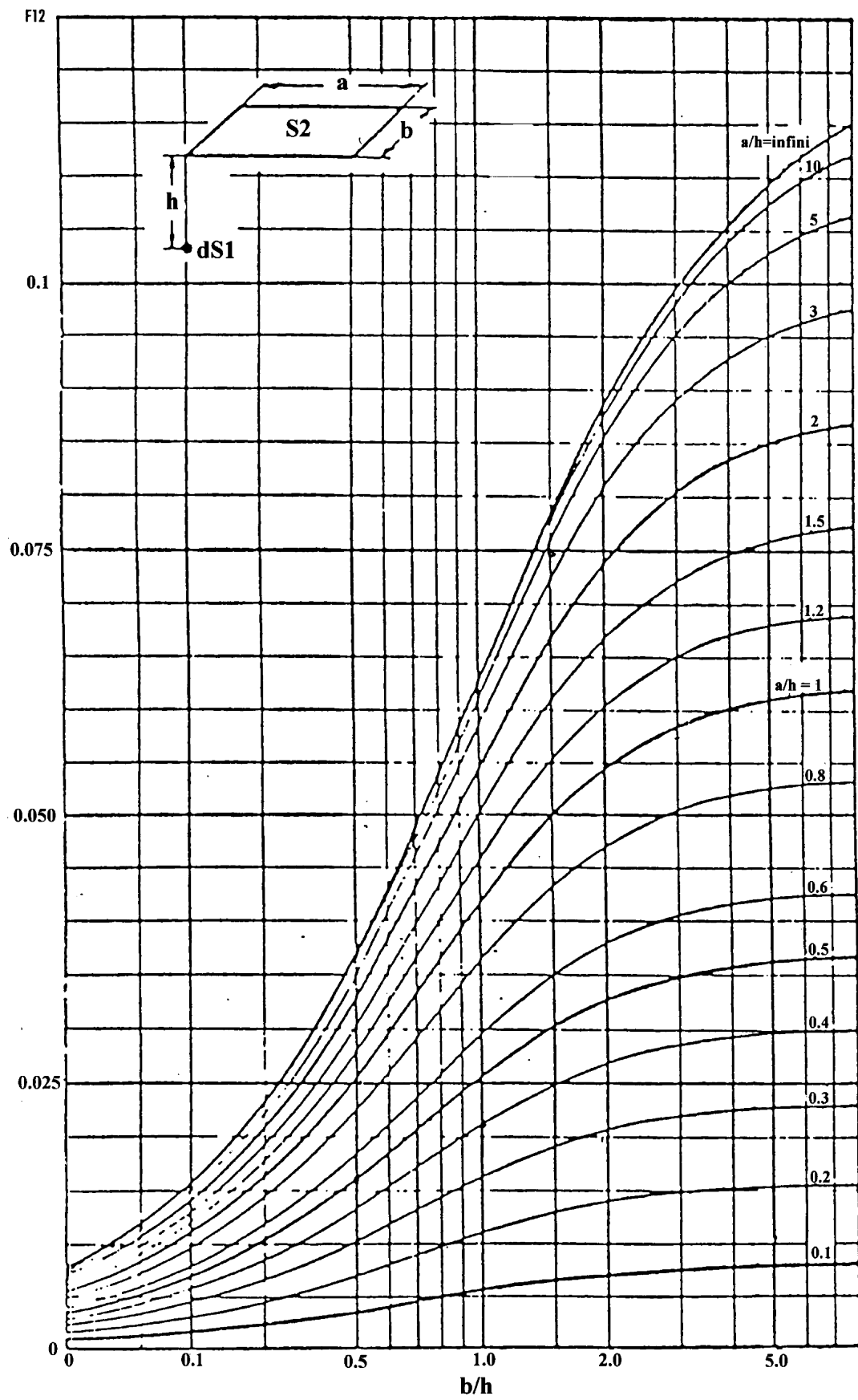


$$F_{12} = \frac{2}{\pi XY} \left\{ \ln \left[ \frac{(1 + X^2)(1 + Y^2)}{1 + X^2 + Y^2} \right]^{\frac{1}{2}} + X \sqrt{1 + Y^2} \tan^{-1} \frac{X}{\sqrt{1 + Y^2}} + Y \sqrt{1 + X^2} \tan^{-1} \frac{Y}{\sqrt{1 + X^2}} - X \tan^{-1} X - Y \tan^{-1} Y \right\}$$

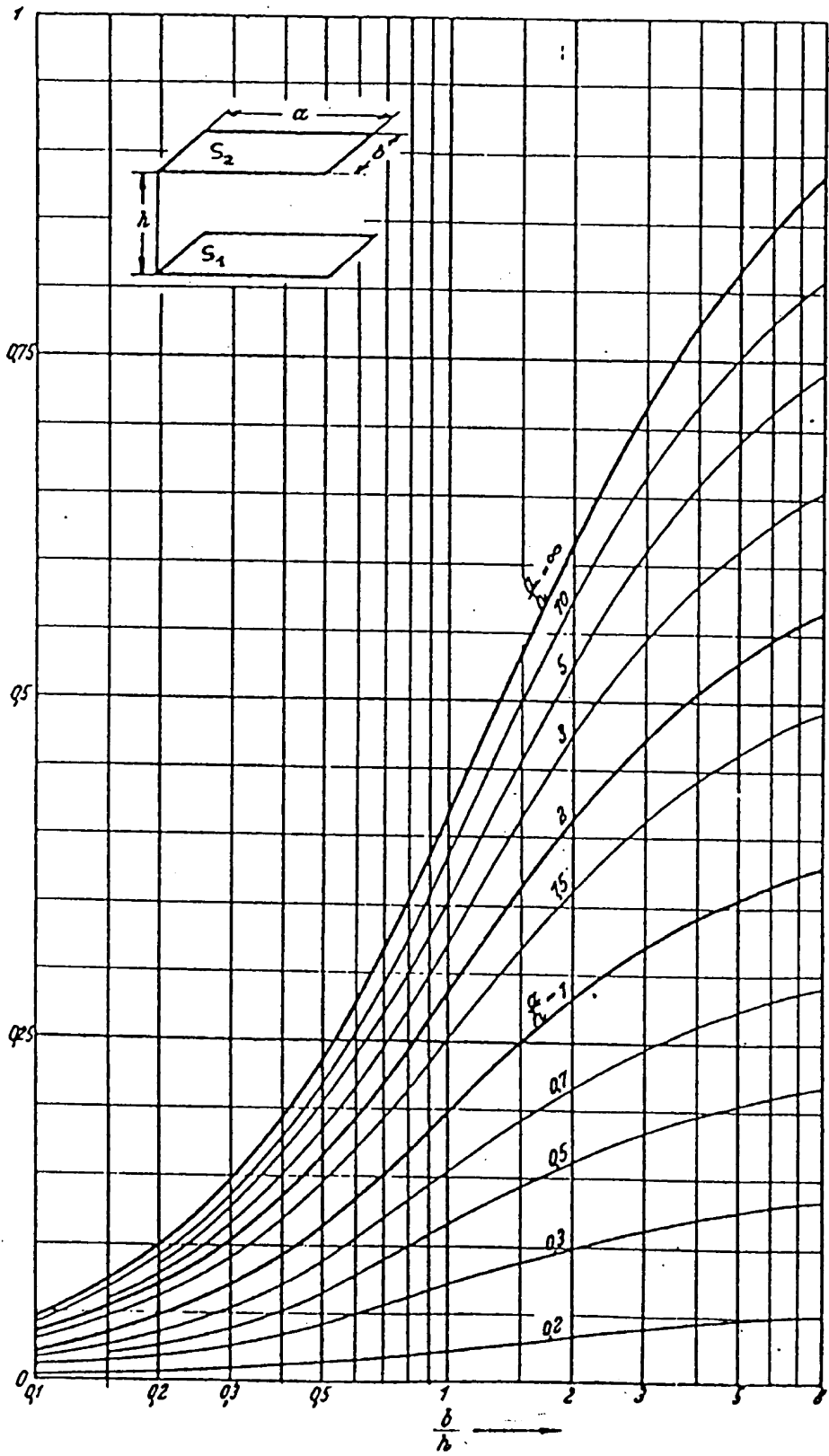


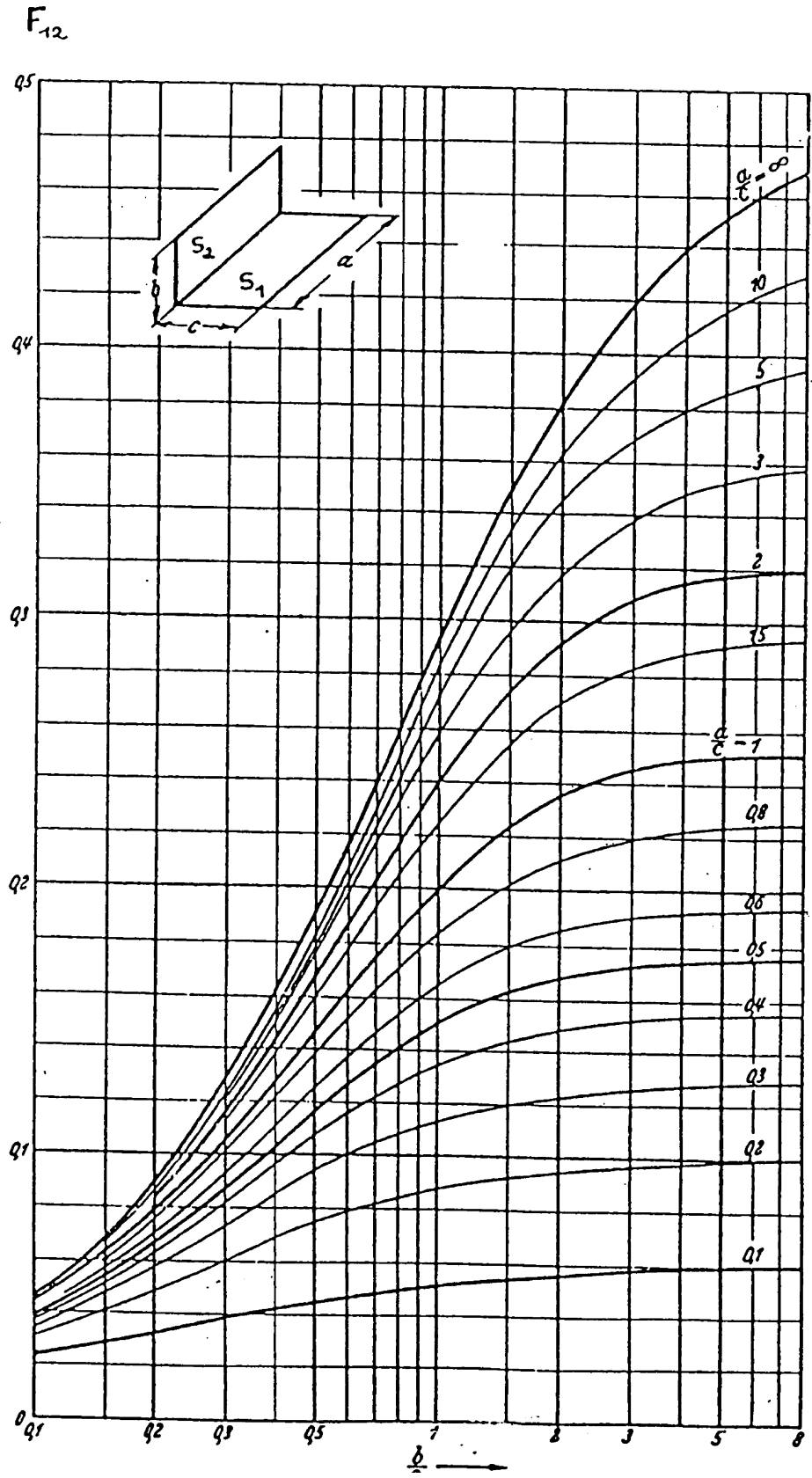
$F_{12}$ 





$F_{12}$





### 7.7.2 Échanges radiatifs dans une enceinte noire : flux net

On peut toujours considérer qu'un ensemble de surfaces constitue une enceinte fermée en comblant, si besoin, les vides par des surfaces fictives. Une telle surface se comporte comme un corps noir à zéro degré Kelvin : elle absorbe tout rayonnement et n'en émet pas. Le flux net est le flux nécessaire à la surface pour maintenir sa température quand il y a des échanges radiatifs :

$$q_i = \Phi_{net\ i} \quad (7.66)$$

En considérant chaque surface isotherme, le bilan du flux net d'une surface  $S_i$  dans les échanges radiatifs avec les autres surfaces,  $\Phi_{net\ i}$ , est (Figure 7.24)

$$\Phi_{net\ i} = \Phi_i - \sum_{j=1}^n \Phi_{ji} \quad (7.67)$$

où  $\Phi_i$  est le flux émis par la surface  $S_i$  et  $\sum_{j=1}^n \Phi_{ji}$  est la somme des flux émis par les surface  $j$  et reçus par la surface  $S_i$ . En utilisant les facteurs de forme, l'équation (7.67) devient :

$$\Phi_{net\ i} = \Phi_i - \sum_{j=1}^n F_{ji} \Phi_j \quad (7.68)$$

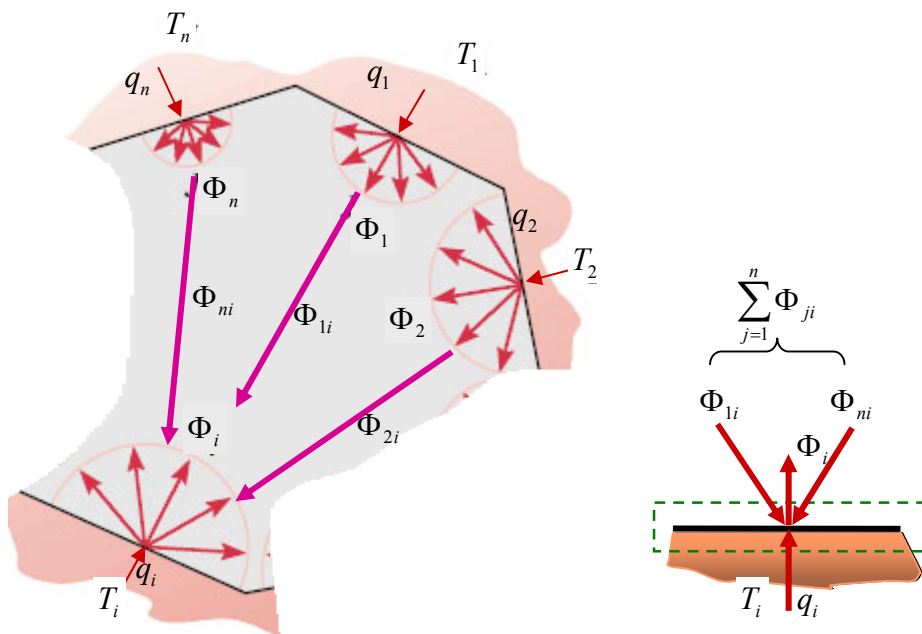


Figure 7.24 Échanges radiatifs dans une enceinte fermée

Toutes les surfaces étant noires, on peut exprimer les flux en fonction des émittances (et donc des températures) de chaque surface :

$$\Phi_{net i} = M_i^0 S_i - \sum_{j=1}^n F_{ji} S_j M_j^0 \quad (7.69)$$

En tenant compte de la relation de réciprocité (7.55),

$$S_j F_{ji} = S_i F_{ij} \quad (7.70)$$

on obtient

$$\Phi_{net i} = M_i^0 S_i - S_i \sum_{j=1}^n F_{ij} M_j^0 \quad (7.71)$$

En tenant compte de la relation de complémentarité (7.58), l'équation (7.71) devient

$$\Phi_{net i} = \sum_{j=1}^n S_i F_{ij} (M_i^0 - M_j^0) \quad (7.72)$$

ou, en notant  $\Phi_{net ij} = S_i F_{ij} (M_i^0 - M_j^0)$ ,

$$\Phi_{net i} = \sum_{j=1}^n \Phi_{net ij} \quad (7.73)$$

où  $\Phi_{net ij} \equiv q_{ij}$  est les flux net échangé par rayonnement entre la surface  $i$  et la surface  $j$ .

Si  $q_i = \Phi_{net i} = 0$ , alors les pertes par rayonnement de la surface  $S_i$  sont égales aux gains provenant des autres surfaces par rayonnement,  $\Phi_i = \sum_{j=1}^n \Phi_{ji}$ .

Si  $q_i = \Phi_{net i} > 0$ , alors les pertes radiatives  $\Phi_i$  de la surface  $S_i$  sont supérieures aux gains provenant par rayonnement des autres surfaces  $\sum_{j=1}^n \Phi_{ji}$ ,  $\Phi_i > \sum_{j=1}^n \Phi_{ji}$ . Pour garder la température de la surface  $S_i$  constante et empêcher le refroidissement dans le temps (maintenir le régime permanent), la surface  $S_i$  doit recevoir un flux  $q_i$  égal au flux net perdu par rayonnement,  $\Phi_{net i}$ .

Si  $q_i = \Phi_{net\ i} < 0$ , alors les pertes radiatives de la surface  $S_i$  sont inférieures aux gains provenant par rayonnement des autres surfaces,  $\Phi_i < \sum_{j=1}^n \Phi_{ji}$ . Pour maintenir constante la température de la surface, il faut extraire un flux de chaleur  $q_i$  égal au flux net  $\Phi_{net\ i}$  reçu par rayonnement.

### 7.7.3 Analogie électrique

La forme de l'équation du flux net émis par une surface  $S_i$  vers une surface  $S_j$ ,

$$q_{ij} = S_i F_{ij} (M_i^0 - M_j^0) \quad (7.74)$$

est similaire à la loi d'Ohm dans les circuits électriques (Tableau 7.5).

Tableau 7.5 Analogie entre le rayonnement thermique et les circuits électriques

Rayonnement thermique	Circuits électriques
Flux échangé par rayonnement $q_{12} = S_1 F_{12} (M_1^0 - M_2^0)$ $= S_2 F_{21} (M_1^0 - M_2^0)$	Intensité du courant électrique $i = \frac{1}{R} (V_i - V_j)$
Différence entre les émittances de deux surfaces noires $M_1^0 - M_2^0$	Différence de potentiel entre deux nœuds du réseau $V_1 - V_2$
Surface vue $S_1 F_{12} = S_2 F_{21}$	Conductance entre deux nœuds $K = 1/R$

L'équation (7.74), qui décrit l'échange radiatif entre deux surfaces, peut être représentée par un circuit électrique (Figure 7.25). Pour l'échange entre plusieurs surfaces, l'équation (7.74) peut être modélisé par un réseau électrique (Figure 7.26).

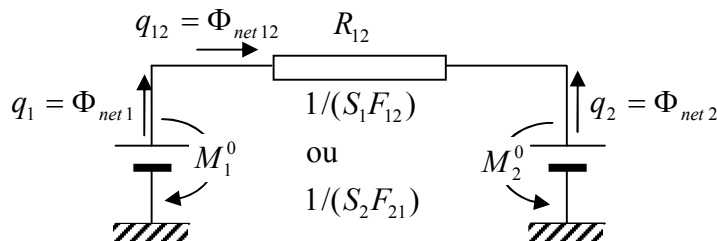


Figure 7.25 Circuit analogue électrique du rayonnement thermique entre deux surfaces

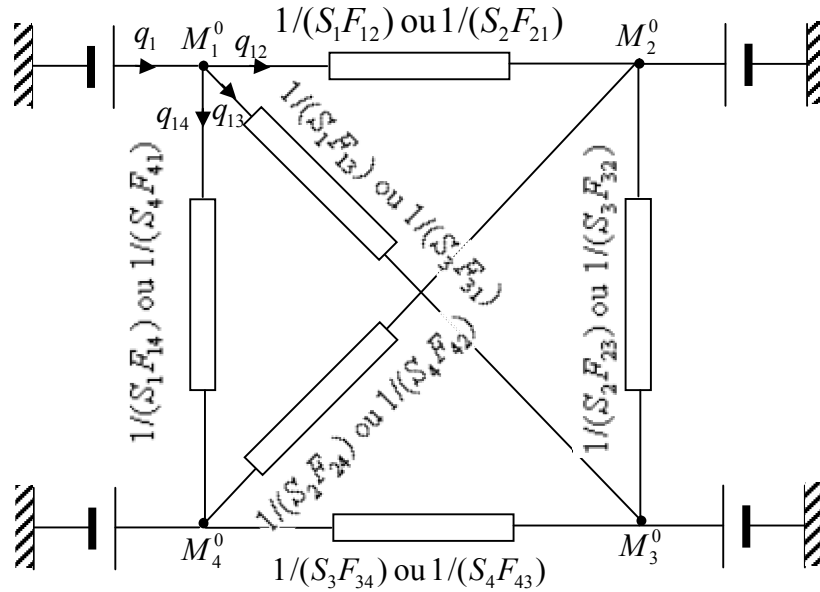


Figure 7.26 Échange radiatif entre quatre surfaces

## 7.8 Échanges radiatifs entre surfaces grises opaques et diffusantes séparées par un milieu transparent

### 7.8.1 Radiosité

Une surface grise renvoie du rayonnement par l'émission due à sa propre température et par réflexion des flux incidents. Le flux total rayonné qui atteint une surface grise est en partie réfléchi et en partie absorbé. Les échanges radiatifs entre surfaces grises sont plus complexes dus aux réflexions multiples.

L'étude de la réflexion multiple est simplifiée en utilisant la notion de *radiosité*. Chaque surface étant isotherme, grise et diffusante, on peut définir pour chacune d'entre eux la *radiosité*  $J$  qui caractérise globalement la densité de flux net émis, c. à d. la somme de la densité de flux émis et de la densité de flux réfléchi (Figure 7.27) :

$$J = \varepsilon M^0 + \rho E \tag{7.75}$$

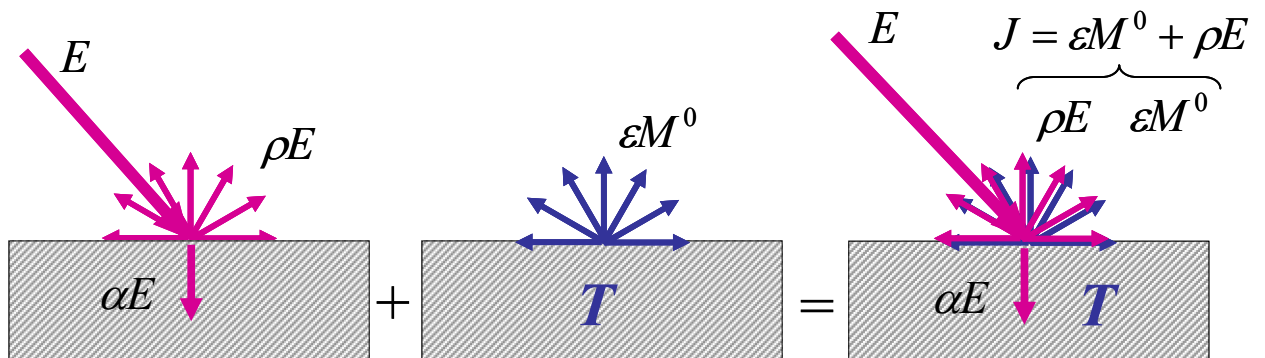


Figure 7.27 Radiosité

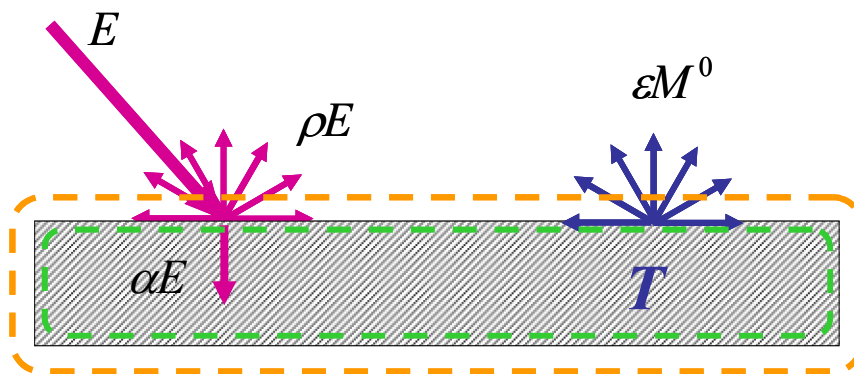


Figure 7.28 Bilan radiatif d'une surface

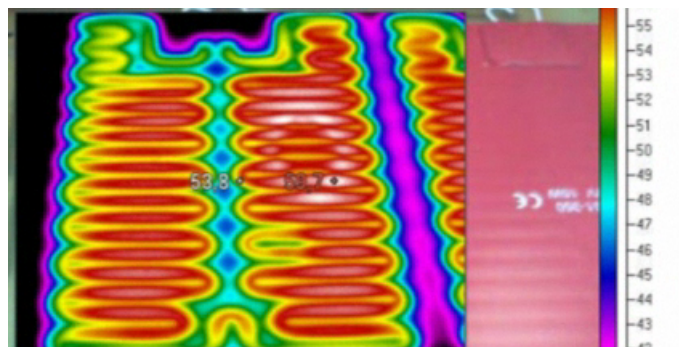


Figure 7.29 Température de surface d'un planché chauffant mesurée en utilisant la radiosité

La surface étant opaque,  $\tau = 0$ , il en résulte que le coefficient de réflexion est

$$\rho = 1 - \alpha \quad (7.76)$$

et, en tenant compte de la loi de Kirchoff, équation (7.47), on obtient la radiosité

$$J = \varepsilon M^0 + (1 - \varepsilon)E \quad (7.77)$$

d'où

$$E = \frac{1}{1 - \varepsilon} (J - \varepsilon M^0) \quad (7.78)$$

Le flux net émis par rayonnement,  $\Phi_{net}$ , est la différence entre le flux émis,  $\varepsilon M^0 S$ , et le flux absorbé,  $\alpha ES$  (Figure 7.28) :

$$\Phi_{net} = \varepsilon M^0 S - \alpha ES \quad (7.79)$$



Pour un corps gris et diffusant,  $\alpha = \varepsilon$ , en introduisant dans l'équation (7.79) l'expression de l'éclairement  $E$  de l'équation (7.78) on obtient :

$$\Phi_{net} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} (M^0 - J)S \quad (7.80)$$

En remplaçant  $M^0$  par son expression en fonction de  $E$  et  $J$  on obtient une autre expression du flux net :

$$\Phi_{net} = S(J - E) \quad (7.81)$$

Pour que la surface soit en équilibre (qu'elle maintient sa température) il faut lui injecter le flux

$$q = \Phi_{net} \quad (7.82)$$

### 7.8.2 Surface isotherme dans une enceinte fermée

Dans le cas d'une enceinte fermée, l'éclairement de la surface  $S_i$  est :

$$E_i = \frac{1}{S_i} \sum_{j=1}^n F_{ji} S_j J_j \quad (7.83)$$

Compte tenu de la réciprocité des facteurs de forme, équation (7.55), on obtient :

$$E_i = \sum_{j=1}^n F_{ij} J_j \quad (7.84)$$

L'expression (7.77) de la radiosité devient :

$$J_i = \varepsilon_i M_i^0 + (1 - \varepsilon_i) \sum_{j=1}^n F_{ij} J_j \quad (7.85)$$

### 7.8.3 Surface à flux net imposé dans une enceinte fermée

Si la surface  $S_i$  est à flux net imposé, alors, comme par définition  $\Phi_{net i} = (J_i - E_i)S_i$ , la radiosité est :

$$J_i = \frac{\Phi_{net i}}{S_i} + \sum_{j=1}^n F_{ij} J_j \quad (7.86)$$

### 7.8.4 Analogie électrique

Considérons deux surfaces grises opaques et diffusantes qui échangent de l'énergie par rayonnement (Figure 7.30). Le flux net émis par la surface  $S_1$  vers la surface  $S_2$ ,

$$q_{12} \equiv \Phi_{net12} = S_1 F_{12} J_1 - S_2 F_{21} J_2 \quad (7.87)$$

est la différence entre le flux émis,  $S_1 F_{12} J_1$ , et le flux reçu,  $S_2 F_{21} J_2$ .

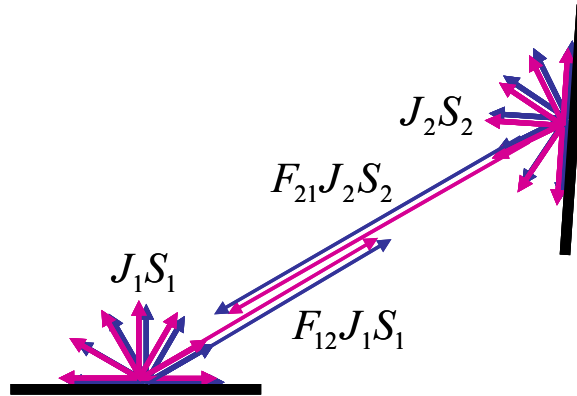


Figure 7.30 Échange radiatif entre deux surfaces grises opaques et diffusants

En tenant compte de la relation de réciprocité (7.55), l'équation (7.87) devient

$$q_{12} = S_1 F_{12} (J_1 - J_2) = S_2 F_{21} (J_1 - J_2) \quad (7.88)$$

La relation (7.88) a la forme de la loi d'Ohm ce qui permet l'analogie électrique : le flux net  $q_{12} \equiv \Phi_{net12}$  passe par la résistance  $1/(S_2 F_{21}) = 1/(S_1 F_{12})$  dû à une différence entre les radiosités,  $J_1 - J_2$ . La relation (7.80), mise sous la forme

$$\Phi_{net1} = \frac{\varepsilon_1 S_1}{1 - \varepsilon_1} (M_1^0 - J_1) \quad (7.89)$$

représente une source de type Thévenin (voir § 3.3.6). L'échange entre les deux surfaces grises opaques et diffusantes peut être représenté par un circuit analogue électrique (Figure 7.31).

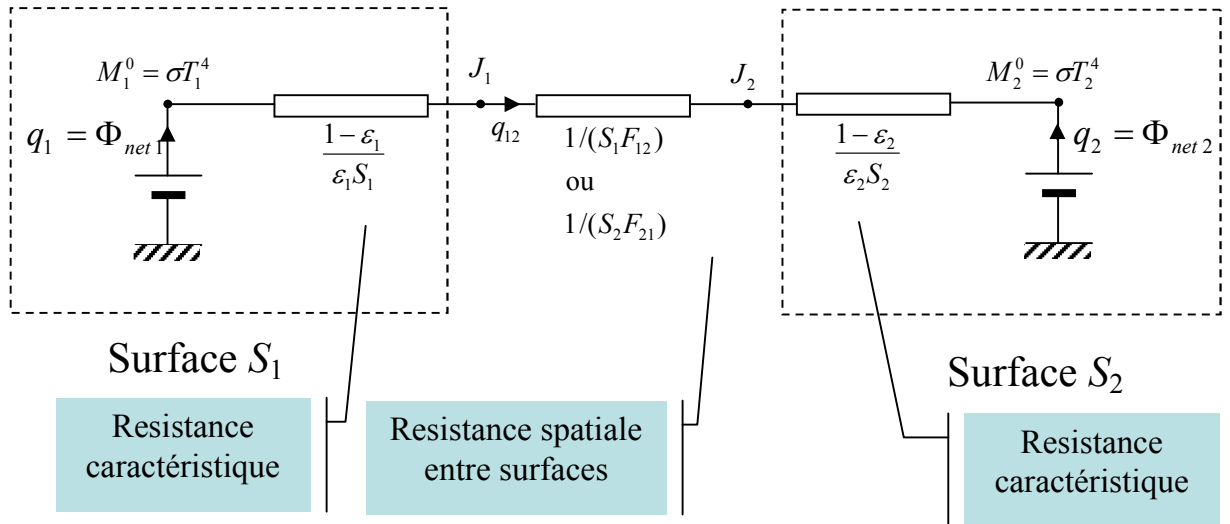


Figure 7.31 Circuit thermique du rayonnement entre de deux surfaces grises opaques et diffusantes

En comparant la Figure 7.25 avec la Figure 7.31 on constat que la modélisation de la géométrie du système par la résistance  $R = 1/(S_1F_{12}) = 1/(S_2F_{21})$  est exactement identique que les surfaces soient noires ou grises. Cette résistance dépend seulement des valeurs géométriques (surface et facteur de forme). Dans le cas des surfaces grises, chaque surface est caractérisée par une résistance de surface pour son flux net  $(1 - \varepsilon_i)/(\varepsilon_i S_i)$ .

Dans ces conditions, le problème du transfert radiatif peut être traité avec l'algorithme présenté dans la section 4.3 *Algorithme pour la résolution des problèmes linéaires d'équilibre thermique* où les températures  $\theta$  seront remplacées par les émittances  $\mathbf{M}$ . La solution est :

$$\mathbf{M} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{M} + \mathbf{f})$$

$$\theta = \mathbf{M}^{1/4} \tag{7.90}$$

## 8 Echanges couplées

Les transferts thermiques sont, en général, combinés : conduction, convection et rayonnement. Le couplage des transferts par conduction et/ou la convection, Equation (5.118), avec les transferts par rayonnement, Equation (7.90), introduit une non-linéarité. Le système des équations devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} &= -\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f} \\ \mathbf{M} &= (\mathbf{A}_R^T \mathbf{G}_R \mathbf{A}_R)^{-1} (\mathbf{A}_R^T \mathbf{G}_R \mathbf{M} + \mathbf{f}_R) \\ \boldsymbol{\theta}_R &= \mathbf{M}^{1/4} \end{aligned} \quad (8.1)$$

où l'index  $R$  représente le circuit thermique des échanges par rayonnement. Les températures  $\boldsymbol{\theta}_R$  seront incluses dans le vecteur des sources  $\mathbf{b}$ . On peut simplifier le système (8.1) en par la linéarisation de l'équation  $\boldsymbol{\theta}_R = \mathbf{M}^{1/4}$ . Dans ce cas, le système d'équations devient :

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{b} + \mathbf{f} \quad (8.2)$$

ou

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{K} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{K}_b \mathbf{b} + \mathbf{f} \quad (8.3)$$

où  $\mathbf{K} \equiv -\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A}$  et  $\mathbf{K}_b = \mathbf{A}^T \mathbf{G}$ .

### 8.1 Modèle d'état

Le problème est que, en général, la matrice des capacités,  $\mathbf{C}$ , n'est pas inversable ; les colonnes correspondants aux nœuds sans capacité sont zéro. Pour résoudre ce système, on peut éliminer les températures  $\boldsymbol{\theta}_0$  qui correspondent aux nœuds sans capacité. Pour cela, on écrit l'équation (8.3) sous la forme des matrice bloc :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_0 \\ \boldsymbol{\theta}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{b1} \\ \mathbf{K}_{b2} \end{bmatrix} \mathbf{b} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_C \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Pour éliminer  $\boldsymbol{\theta}_0$  de l'équation (8.4), on multiplie la première ligne des équations (8.4) avec  $-\mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1}$  ; on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{21} & -\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_0 \\ \boldsymbol{\theta}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{b1} \\ \mathbf{K}_{b2} \end{bmatrix} \mathbf{b} + \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_C \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

Dans l'équation (8.5), on remplace la deuxième ligne avec la somme de deux lignes :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\theta}}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\theta}}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22} \\ (-\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{b1} + \mathbf{K}_{b2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_0 \\ \boldsymbol{\theta}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_C \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

L'équation (8.6) ne dépend pas de températures dans les nœuds qui n'ont pas des capacités,  $\boldsymbol{\theta}_0$  :

$$\mathbf{C}_C \dot{\boldsymbol{\theta}}_C = (-\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22})\boldsymbol{\theta}_C + (-\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{b1} + \mathbf{K}_{b2})\mathbf{b} + \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_C \end{bmatrix} \quad (8.7)$$

Dans l'équation (8.7), la matrice  $\mathbf{C}_C$  est inversable. On obtient le modèle d'état :

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_C = \mathbf{C}_C^{-1}(-\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22})\boldsymbol{\theta}_C + \mathbf{C}_C^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{b1} + \mathbf{K}_{b2} & -\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_C \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

ou

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_C = \mathbf{A}_S \boldsymbol{\theta}_C + \mathbf{B}_S \mathbf{u} \quad (8.9)$$

où

$$\mathbf{A}_S = \mathbf{C}_C^{-1}(-\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22}), \quad (8.10)$$

$$\mathbf{B}_S = \mathbf{C}_C^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1}\mathbf{K}_{b1} + \mathbf{K}_{b2} & -\mathbf{K}_{21}\mathbf{K}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{22} \end{bmatrix} \quad (8.11)$$

et

$$\mathbf{u} = [\mathbf{b} \quad \mathbf{f}_0 \quad \mathbf{f}_C]^T \quad (8.12)$$

### Exemple

Considérons une pièce avec une paroi extérieure de  $2,5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$  en brique contenant une fenêtre avec deux ventaux (dimensions  $1,15 \text{ m} \times 1,00 \text{ m}$ ) (Figure 8.1 a). Les parois intérieures sont à la même température que celle de la pièce. La température extérieure est  $T_o$ . Le flux solaire incident sur les parois est  $\Phi_{so}$  et le flux solaire transmis directement à l'intérieure par le vitrage est  $\Phi_{si}$ . L'apport des sources internes de chaleur (occupants, appareillage électrique, etc.) est  $q_i$ . Le débit d'air neuf de l'extérieure  $\dot{m}_v$  est constant, ce qui implique un flux de chaleur par vecteur air  $q_v = \dot{m}_v c_a (T_o - \theta_i)$ . On considère que la paroi est homogène et à température constante. Les coefficients d'échange convectif sont  $h_o = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$  à l'extérieure et  $h_i = 8 \text{ W/m}^2\text{K}$  à l'intérieure.

Les propriétés physiques sont :

- paroi en brique : conductivité  $\lambda_p = 2 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ , masse volumique  $\rho_p = 1.4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , chaleur spécifique  $c_p = 900 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , surface  $S_p = 11.35 \text{ m}^2$ , épaisseur  $\delta_p = 0.250 \text{ m}$  ;
- fenêtre : coefficient global de transfert  $U_f = 2 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ , surface  $S_f = 1.15 \text{ m}^2$  ;
- air : masse volumique  $\rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$ , chaleur spécifique  $c_p = 1005 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$ , débit volumique d'air neuf (de l'extérieure)  $\dot{V}_a = 10 \text{ m}^3/\text{h}$ , volume d'air  $V = 50 \text{ m}^3$ .

Dans ces conditions, le modèle thermique peut être représenté par la Figure 8.1 (b), où

- les entrées sont :

$T_o$  - température extérieure ;

$\Phi_{so}$  - le flux solaire incident sur les parois extérieures ;

$\Phi_{si} + q_i$  - les apports gratuits, c. à d. la somme des flux solaire transmis directement à l'intérieure à travers le vitrage,  $\Phi_{si}$ , et des apports internes,  $q_i$  ;

- les paramètres du modèle sont :

$R_{co}$  - la résistance convective à l'extérieure des parois,  $R_{co} = \frac{1}{h_{co} S_p} = 3.52 \cdot 10^{-3} \text{ K/W}$  ;

$R_p$  - la résistance thermique de conduction de la paroi,  $R_p = \frac{1}{S_p} \frac{\delta_p}{\lambda_p} = 1.10 \cdot 10^{-2} \text{ K/W}$  ;

$R_{ci}$  - la résistance convective à l'intérieure,  $R_{ci} = \frac{1}{h_{ci} S_p} = 1.10 \cdot 10^{-2} \text{ K/W}$  ;

$R_v$  - la résistance thermique pour le transport par advection par le débit d'air et par conduction par la fenêtre,  $R_v = \dot{m}_a c_a + 1/(U_f S_f)$  où  $\dot{m}_a$  est le débit d'air et  $c_a$  est la chaleur spécifique de l'air,

$$R_v = \rho_a \dot{V}_a c_a + 1/(U_f S_f) = 3.35 \cdot 10^{-3} + 4.35 \cdot 10^{-1} = 4.38 \cdot 10^{-1} \text{ K/W} ;$$

$C_w$  - la capacité thermique de la paroi,  $C_p = m_p c_p = \rho_p S_p \delta_p c_p = 1.43 \cdot 10^5 \text{ J/K} ;$

$C_i$  - la capacité thermique de l'air intérieure,  $C_a = m_a c_a = 6.03 \cdot 10^4 \text{ J/K} ;$

- les variables d'état sont les températures résultantes dans les nœuds :

$\theta_o$  - température à la surface extérieure de la paroi ;

$\theta_w$  - température à l'intérieure de la paroi ;

$\theta_i$  - température de l'air intérieur.

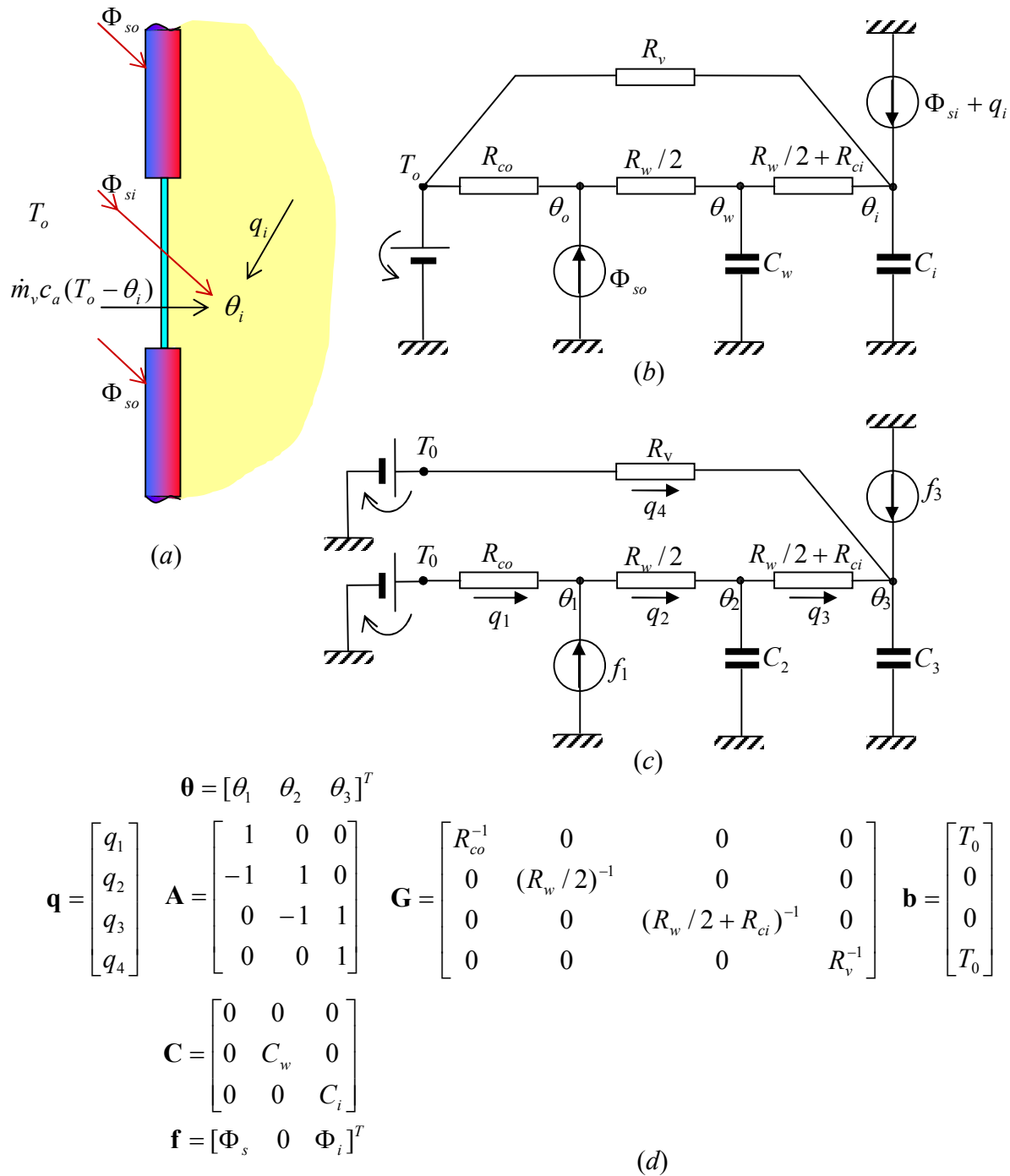


Figure 8.1 Modèle thermique d'une pièce simple : a) représentation de principe ; b) circuit thermique ; c) le même circuit thermique, mais avec les sources de température sur les branches ; d) description matricielle du circuit.

Dans ces conditions, les équations (8.2) ou (8.3)  $\mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{K} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{K}_b \mathbf{b} + \mathbf{f}$ , devient :



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 143 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 60.3 \cdot 10^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -466 & 182 & 0 \\ 182 & -242 & 60.6 \\ 0 & 60.6 & -62.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 284 & -182 & 0 & 0 \\ 0 & 182 & -60.6 & 0 \\ 0 & 0 & 60.6 & 2.28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ 0 \\ 0 \\ T_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_s \\ 0 \\ \Phi_i \end{bmatrix}$$

où

$$\mathbf{K}_{11} = -466 ; \mathbf{K}_{12} = [182 \ 0] ; \mathbf{K}_{b1} = [284 \ -182 \ 0 \ 0] ; \mathbf{I}_{11} = 1$$

$$\mathbf{C}_C = \begin{bmatrix} 143 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 60.3 \cdot 10^3 \end{bmatrix} ; \mathbf{K}_{21} = \begin{bmatrix} 182 \\ 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{K}_{22} = \begin{bmatrix} -242 & 60.6 \\ 60.6 & -62.9 \end{bmatrix} ;$$

$$\mathbf{K}_{b2} = \begin{bmatrix} 0 & 182 & -60.6 & 0 \\ 0 & 0 & 60.6 & 2.28 \end{bmatrix} ; \mathbf{I}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient le modèle d'état  $\dot{\boldsymbol{\theta}}_C = \mathbf{A}_S \boldsymbol{\theta}_C + \mathbf{B}_S \mathbf{u}$  où :

$$\mathbf{A}_S = \mathbf{C}_C^{-1} (-\mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22}) = \begin{bmatrix} -1.19 \cdot 10^{-3} & 0.424 \cdot 10^{-3} \\ 1.01 \cdot 10^{-3} & -1.04 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_S = \mathbf{C}_C^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{b1} + \mathbf{K}_{b2} & -\mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{22} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0.775 \cdot 10^{-3} & 0.775 \cdot 10^{-3} & -0.424 \cdot 10^{-3} & 0 & 2.729 \cdot 10^{-6} & 6.99 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 1.01 \cdot 10^{-3} & 37.8 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 & 16.6 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}_C = [\theta_2 \ \theta_3]^T ; \quad \mathbf{u} = [\mathbf{b}^T \ \mathbf{f}_0^T \ \mathbf{f}_C^T]^T = [T_0 \ 0 \ 0 \ T_0 \ \Phi_s \ 0 \ \Phi_i]^T$$

Comme  $u_1 = u_4 = T_0$ , les colonnes 1 et 4 de la matrice  $\mathbf{B}_S$  s'additionnent, et comme  $u_2 = u_3 = u_6 = 0$ , les colonnes 2, 3 et 6 de la matrice  $\mathbf{B}_S$  peuvent être effacées. Pour

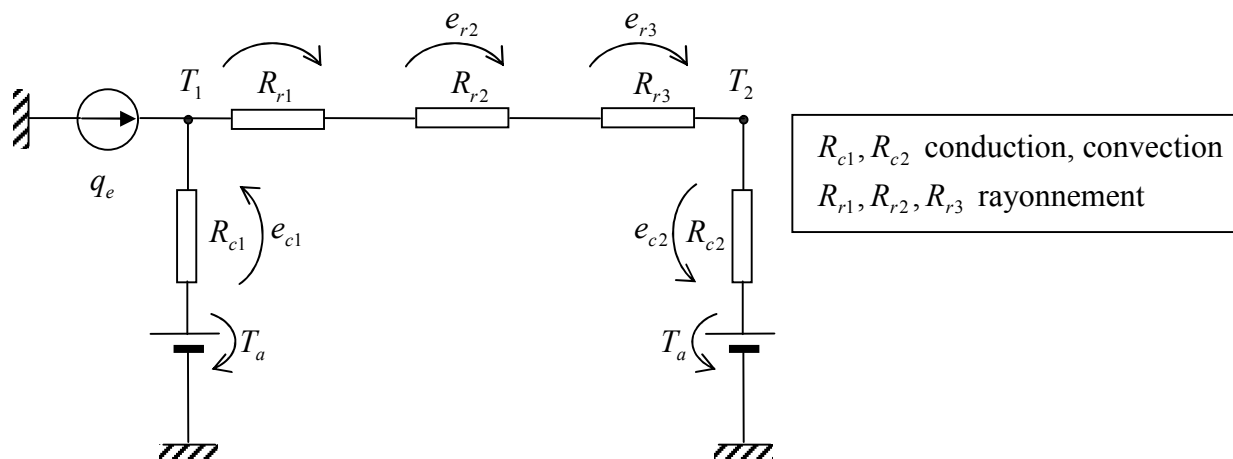
$\mathbf{u} = [T_0 \ \Phi_s \ \Phi_i]^T$ , la matrice  $\mathbf{B}_S$  devient :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.775 \cdot 10^{-3} & 2.729 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 37.8 \cdot 10^{-6} & 0 & 16.6 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Le modèle d'état est :

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.19 \cdot 10^{-3} & 0.424 \cdot 10^{-3} \\ 1.01 \cdot 10^{-3} & -1.04 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.775 \cdot 10^{-3} & 2.729 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 37.8 \cdot 10^{-3} & 0 & 16.6 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_0 \\ \Phi_s \\ \Phi_i \end{bmatrix}$$

## 8.2 Linéarisation du rayonnement



$$M_1 = \sigma T_1^4 \cong \sigma(T_{01}^4 + 4T_{01}^3(T_1 - T_{01})) = 4\sigma T_{01}^3 T_1 - 3\sigma T_{01}^4$$

$$M_2 = \sigma T_2^4 \cong 4\sigma T_{02}^3 T_2 - 3\sigma T_{02}^4$$

$$\begin{cases} e_{c1} - T_a = 0 - T_1 \\ e_{r1} = M_1 - J_1 \\ e_{r2} = J_1 - J_2 \\ e_{r3} = J_2 - M_2 \\ e_{c2} + T_a = T_2 - 0 \end{cases} \quad \begin{cases} e_{c1} = -T_1 + T_a \\ e_{r1} = 4\sigma T_{01}^3 T_1 - J_1 - 3\sigma T_{01}^4 \\ e_{r2} = J_1 - J_2 \\ e_{r3} = J_2 - 4\sigma T_{02}^3 T_2 + 3\sigma T_{02}^4 \\ e_{c2} = T_2 - T_a \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} e_{c1} \\ e_{r1} \\ e_{r2} \\ e_{r3} \\ e_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4\sigma T_{01}^3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4\sigma T_{02}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ J_1 \\ J_2 \\ T_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_a \\ -3\sigma T_{01}^4 \\ 0 \\ 3\sigma T_{02}^4 \\ -T_a \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = -\mathbf{A}^* \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} R_{c1}^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{r1}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{r2}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{r3}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{c2}^{-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \mathbf{G}\mathbf{e}$$

$$\mathbf{f} = [q_e \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\begin{cases} -q_e = q_{c1} - q_{r1} \\ 0 = q_{r1} - q_{r2} \\ 0 = q_{r2} - q_{r3} \\ 0 = q_{r3} - q_{c2} \end{cases} \quad \begin{bmatrix} q_e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{c1} \\ q_{e1} \\ q_{e2} \\ q_{e3} \\ q_{c2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = -\mathbf{A}^T \mathbf{q}$$

$$\mathbf{f} = -\mathbf{A}^T \mathbf{q} = -\mathbf{A}^T \mathbf{G}\mathbf{e} = \mathbf{A}^T \mathbf{G}\mathbf{A}^* \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{G}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{G}\mathbf{A}^*)^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{G}\mathbf{b} + \mathbf{f})$$

## 9 Exercices

### 9.1 Mur soumis aux conditions limites de type Dirichlet

Considérons un mur d'épaisseur  $e$  et de surface  $S$  dont les faces  $x=0$  et  $x=e$  sont respectivement maintenues aux températures  $T_0$  et  $T_e$ . On supposera que les transferts de chaleur sont monodimensionnels et en régime permanent, sans création de chaleur interne, et que la conductivité du matériau est constante.

Figurer le circuit thermique. Donner l'expression de la distribution de température  $T(x)$ , de la densité de flux  $\varphi$  [W/m<sup>2</sup>] et du flux traversant  $q$  [W] le mur.

A.N.  $T_0 = -5\text{ °C}$ ,  $T_e = 25\text{ °C}$ ,  $\lambda = 0,8\text{ W/m}\cdot\text{K}$ ,  $e = 0.1\text{ m}$ ,  $S = 15\text{ m}^2$

### 9.2 Mur en régime permanent avec création interne de chaleur

On considère une vitre d'épaisseur  $e$  et de conductivité thermique constante  $\lambda_v$ , séparant deux milieux à température parfaitement régulée  $T(0) = T_0$  à l'extérieure et  $T(e) = T_e$  à l'intérieure. Cette vitre, supposée infinie dans les deux autres directions, reçoit un ensoleillement  $E$  dont elle absorbe uniformément une partie en fonction de son coefficient d'absorption  $\alpha$ . On considère le régime permanent.

1. Déterminer l'expression analytique de la répartition de la température dans la vitre.
2. Donner l'expression de la densité de flux de chaleur traversant la vitre et vérifier que la somme algébrique des flux sortants par les deux faces est égale au flux absorbé.
3. En utilisant cette expression, calculer la valeur maximale atteinte par la température dans la vitre et sa position géométrique.
4. Pour le cas où  $T_0 = 20\text{ °C}$ ,  $T_e = 20\text{ °C}$ , traiter les mêmes problèmes dans une approche numérique en discrétisant la vitre en 1, 3 et 5 couches. Donner le schéma du circuit thermique et les valeurs des températures dans les nœuds. Comparer ces valeurs avec les valeurs obtenues analytiquement. Trouver les flux thermiques traversant la surface de la vitre et vérifier que la somme des flux sortants par les deux faces est égale au flux absorbé. Comparer les valeurs des flux sortants obtenues numériquement et analytiquement.
5. Le même problème pour le cas où  $T_0 = 10\text{ °C}$ ,  $T_e = 20\text{ °C}$ , traité pour une discrétisation en 5 couches.

A. N.  $E = 800\text{ W/m}^2$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $e = 0.5\text{ cm}$ ,  $\lambda_v = 1\text{ W/m}\cdot\text{K}$

Cas a)  $T_0 = 20\text{ °C}$ ,  $T_e = 20\text{ °C}$                       b)  $T_0 = 10\text{ °C}$ ,  $T_e = 20\text{ °C}$

### 9.3 Mur en régime permanent avec conductivité variable

Pour de nombreux matériaux soumis à des écarts de température importants, il faut prendre en compte la variation de la conductivité avec la température. Cette variation est donnée généralement par une loi linéaire

$$\lambda = \lambda_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

On considère une plaque d'épaisseur  $e$  soumise sur ses deux faces à un contact parfait avec deux milieux de températures  $T(0) = T_0$  et  $T(e) = T_e$ .

En supposant que la conductivité du matériau constitutif de la plaque varie linéairement avec la température, déterminer la répartition interne des températures dans quatre points équidistantes à l'intérieure du matériau, ainsi que la valeur du flux de chaleur traversant cette paroi. Utilisez une approche analytique et une approche numérique ; comparez les résultats.

A. N.  $e = 5 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 1 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ,  $\alpha = 2 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ,  $T_0 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_e = 550 \text{ }^\circ\text{C}$

### 9.4 Mur soumis aux échanges superficiels

Donner l'expression de la distribution de température dans un mur d'épaisseur  $e$ , dont les températures de l'air sont respectivement  $T_e$  à l'extérieur et  $T_i$  à l'intérieur. Donner l'expression de la densité de flux  $\varphi$  et du flux traversant un mur de surface  $S$ . On supposera que les transferts de chaleur sont monodimensionnels et permanents.

A.N.  $T_e = -5 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_i = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\lambda = 0,8 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ ,  $e = 0,1 \text{ m}$ ,  $S = 15 \text{ m}^2$ ,  $h_e = 30 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ,  $h_i = 5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$

### 9.5 Mur multicouche en régime permanent

On considère une paroi constituée de trois couches homogènes de béton, isolant et enduit. L'enduit protège l'isolant (c. à d. l'enduit est entre l'isolant et l'air).

	Béton ( <i>be</i> )	Isolant ( <i>i</i> )	Enduit ( <i>en</i> )
Épaisseur, $e$ [cm]	15	4	1,5
Conductivité thermique, $\lambda$ [W/m · K]	1,5	0,04	1,5
Chaleur spécifique, $c_p$ [J/kg · K]	920	920	920
Masse volumique, $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2700	75	2700

Les températures de l'air extérieur et intérieur sont, respectivement,  $T_e = -5 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $T_i = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Les coefficients d'échange superficiels à l'extérieur et à l'intérieur sont, respectivement,  $h_e = 16,7 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  et  $h_i = 9,1 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ .

#### 1. Isolation à l'intérieure

L'isolant étant vers l'intérieur (c.à d. que les 15 cm de béton sont à l'extérieur du mur),

- donner les différentes résistances thermiques des couches et la résistance totale du mur ;
- dessiner le réseau analogique électrique ;
- calculer la densité de flux traversant le mur,  $\varphi$  ;
- en utilisant la valeur du flux, calculer les températures aux interfaces des matériaux ;
- en utilisant la méthode nodale (matricielle), calculer les températures aux interfaces des matériaux ;
- figurer la répartition des températures dans le mur.

## 2. Isolation à l'extérieur

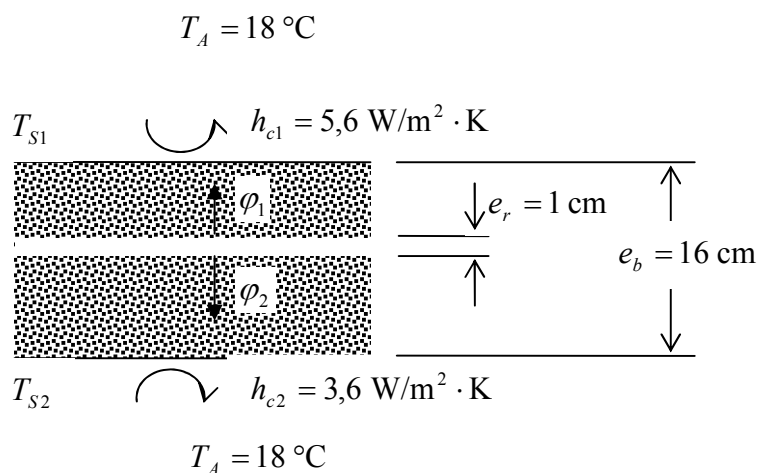
Répondre aux mêmes questions que précédemment quand le béton est côté intérieur du mur.

## 3. Volant thermique

Pour les deux positions de l'isolant, comparer le volant thermique de la paroi (pour  $1\text{m}^2$ ), c'est à dire la quantité de chaleur accumulée dans la paroi.

## 9.6 Etude en régime permanent d'un chauffage électrique par plancher

Un système de chauffage électrique par plancher est constitué de câbles électriques chauffants (que l'on pourra assimiler à une plaque de 1 cm d'épaisseur) noyés dans une dalle de béton (épaisseur totale : 16 cm) de conductivité thermique  $\lambda = 1,2\text{ W/m}\cdot\text{K}$ .



Le flux de chaleur par unité de surface créée par le câble électrique,  $\varphi$ , est de  $100\text{ W/m}^2$  ; ce flux se partage en un flux ascendant,  $\varphi_1$  (chauffage par le plancher), et un flux descendant,  $\varphi_2$  (chauffage par le plafond). Les coefficients d'échange superficiel par convection des surfaces horizontales sont respectivement :

$$h_1 = 5,6\text{ W/m}^2 \cdot \text{K}, \text{ pour la surface supérieure}$$

$h_2 = 3,6 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ , pour la surface inférieure.

La température  $T_A$  de l'air de chaque côté du plancher est de  $18 \text{ }^\circ\text{C}$  ; la température de l'élément chauffant est supposée uniforme et égale à  $T_E$ .

1. En négligeant les échanges de chaleur par rayonnement et dans le cas où le plan chauffant est situé au centre du plancher, déterminer :
  - la température de l'élément chauffant,  $T_E$  ;
  - les températures superficielles,  $T_{S1}$  et  $T_{S2}$ .
2. Considérant que la température de surface du plancher est trop importante (inconfort thermique), on se propose de déplacer le plan chauffant à une distance  $x$  de la surface du plancher pour que la température de surface ne dépasse pas  $24^\circ\text{C}$ . Quelle est cette distance  $x$  ?
3. La solution obtenue étant aberrante, le local est isolé pour que la puissance dissipée soit inférieure à  $100 \text{ W/m}^2$ . Quelle doit être cette puissance pour que la température de surface soit de  $24^\circ\text{C}$ , le plan chauffant étant situé au centre du plancher.

### 9.7 Isolation thermique des tubes cylindriques

De la vapeur d'eau à la température  $T_{1m}$  s'écoule dans un tube (conductivité du matériau  $\lambda_i$ ) de rayon intérieur  $r_1$  et de rayon extérieur  $r_2$ . Ce tube traverse une salle dont la température moyenne est prise égale à  $T_{2m}$ .

1. Evaluer le flux de chaleur  $\varphi$  qui passe de l'intérieur à l'extérieur du tube pour une longueur  $l$  de celui-ci. Les coefficients d'échange superficiel sont désignés par les lettres  $h_1$  (coefficients vapeur d'eau-tube) et  $h_2$  (coefficient tube-air ambiant).
2. Les pertes de chaleur calculées précédemment étant jugées trop importantes, on décide de calorifuger la conduite sur toute la longueur  $l$ . A cet effet, on recouvre le tube d'un manchon de rayon intérieur  $r_2$  et de rayon extérieur  $r_3$  (conductivité du matériau isolant employé  $\lambda_i$ ). On suppose que le nouveau coefficient d'échange superficiel calorifuge-air ambiant est le même que le coefficient tube air ambiant, soit  $h_2$ . On demande d'évaluer le nouveau flux de chaleur  $\varphi'$  traversant le tube et son manchon isolant, pour la longueur  $l$ .
3. Evaluer l'accroissement  $\Delta R$  de la résistance thermique totale  $R$  dû au calorifugeage de la conduite.
4. Etudier les variations de  $\Delta R$  en fonction de  $r_3$  lorsque celui-ci varie de  $r_2$  à l'infini. On utilisera la variable secondaire  $x = r_2 / r_3$ ,  $0 < x < 1$  et on posera  $\alpha = r_2 h_2 / \lambda_i$ . Discuter les différents cas obtenus en fonction des valeurs de  $\alpha$ .
5. On demande de déterminer la valeur de l'épaisseur de l'isolant pour laquelle les pertes calorifiques sont les mêmes qu'en l'absence du calorifuge. On fera le calcul dans le cas suivant :

- le calorifuge est de mousse de conductibilité  $\lambda_i = 0,20 \text{ W/m} \cdot \text{K}$  ;
- le coefficient d'échange superficiel isolant – air ambiant est  $h_2 = 7 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  ;
- le rayon extérieur de la conduite est  $r_2 = 25 \text{ mm}$  .

Pour résoudre cette question, on se servira de la fonction  $y = \frac{x-1}{\ln x}$  dont quelques valeurs numériques sont :

$x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\frac{x-1}{\ln x}$	0	0,391	0,498	0,582	0,656	0,721	0,785	0,844	0,902	0,956	1

### 9.8 Création de chaleur en coordonnées cylindriques

Un câble conducteur protégé par une gaine isolante est immergé dans l'eau à  $T_0$ . On fait passer dans ce conducteur un courant électrique  $I$  de densité constante dans toute la section.

Calculer les températures au centre du câble, à l'interface entre le câble et l'isolant et à la surface extérieure de l'isolant lorsque le régime permanent est obtenu.

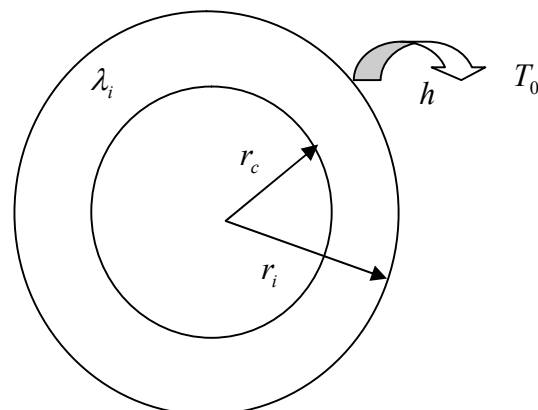
Notations :

$R_l$  - résistance linéique électrique du conducteur ;

$\lambda_c$  - conductivité thermique du conducteur ;

$\lambda_i$  - conductivité thermique de la gaine isolante ;

$h$  - coefficient d'échange superficiel gaine-eau.



### 9.9 Trempe d'une bille métallique (régime dynamique)

On considère une bille homogène qui est à une température uniforme  $T_0$ . Cet objet est brutalement immergé dans un fluide qui reste à une température uniforme et constante,  $T_f$ .

1. Vérifier l'hypothèse de l'uniformité de la température dans la bille.
2. Donner l'évolution temporelle de la température de la bille,  $T(t)$ .



3. Au bout de combien de temps atteint-on pratiquement l'équilibre thermique à  $1/10$  °C près.

Application numérique:

Conductivité thermique  $\lambda = 100 \text{ W/m} \cdot \text{K}$

Coefficient d'échange  $h = 100 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$

Masse volumique  $\rho = 7500 \text{ kg/m}^3$

Chaleur massique  $c = 1000 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$

Rayon de la bille  $r = 0,01 \text{ m}$

Températures :  $T_0 = 80 \text{ °C}$ ,  $T_f = 20 \text{ °C}$

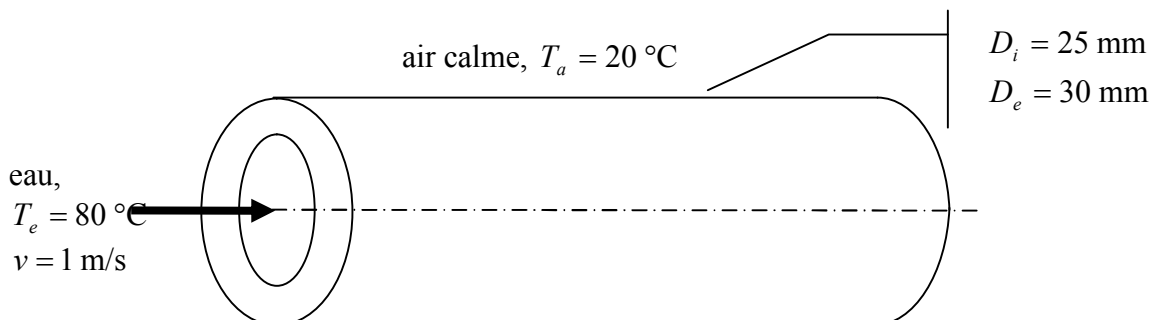
### 9.10 Oscillation thermique dans le sol

Le sol, qui peut être considéré comme un milieu unidimensionnel semi-infini, est soumis sur sa face supérieure à une variation de température périodique  $T(0,t) = T_a \sin \omega t$ . La diffusivité thermique du sol est  $\alpha = 6 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{h}$ .

1. Quelle est l'expression de la température dans le sol  $T(x,t)$ . On définira au préalable les deux conditions aux limites du problème.
2. En considérant une sollicitation journalière de période 24 h, donner :
  - a. la profondeur à laquelle l'amplitude de température est de  $1/100$  de celle en surface.
  - b. la profondeur à laquelle la température est minimale lorsqu'elle est maximale en surface.
3. Si la sollicitation est annuelle (été-hiver), que deviennent les profondeurs demandées en 2a) et 2b) ?

### 9.11 Estimation des coefficients d'échange superficiel

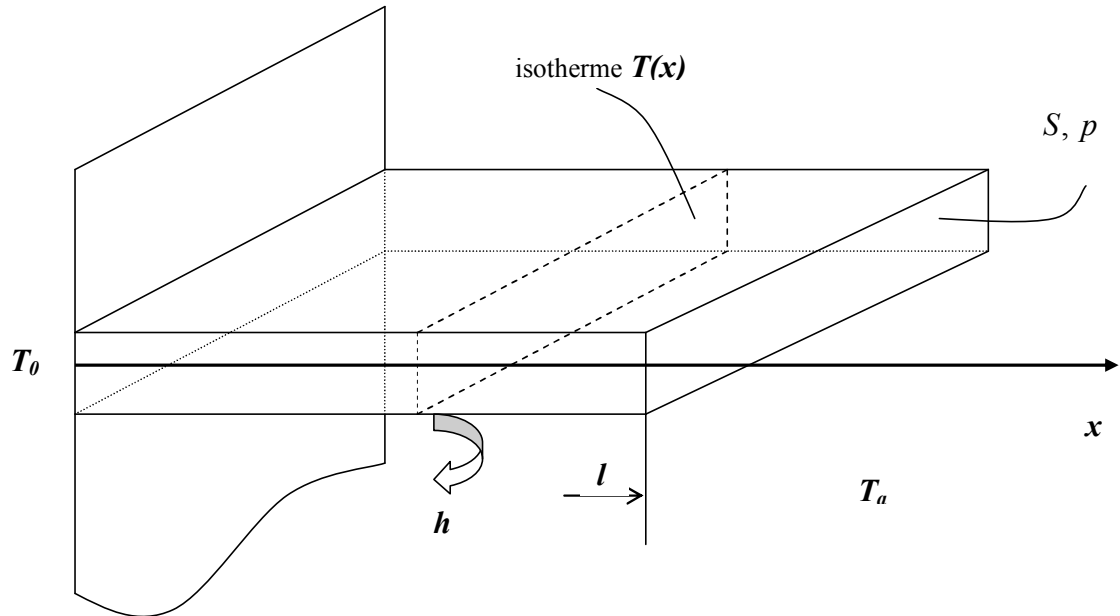
A partir des différentes corrélations existantes, donner les valeurs des coefficients d'échange convectif dans le tube (eau - tube) et à l'extérieur du tube (air - tube). On considère la conductivité thermique de l'acier  $\lambda = 100 \text{ W/m K}$ .





### 9.12 Ailette de refroidissement

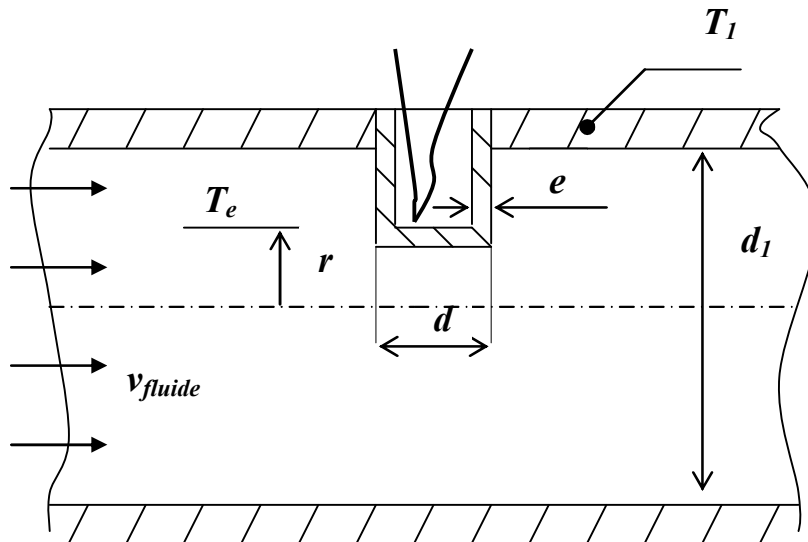
Soit une ailette de refroidissement de section droite, uniformément chauffée à sa base à la température  $T_0$  et placée dans un milieu ambiant à la température  $T_a$ . On suppose que la température est uniquement en fonction de  $x$ , donc les isothermes sont planes et perpendiculaires à l'axe  $x$ . On note  $p$  le périmètre de base,  $S$  la section droite,  $\lambda$  la conductivité thermique et  $h$  le coefficient d'échange superficiel de l'ailette.



1. L'ailette est de longueur infinie. Calculer  $T = f(x)$  et son efficacité  $E = \Phi_0 / \Phi'_0$ , où  $\Phi_0$  est le flux évacué au pied de l'ailette et  $\Phi'_0$  est le flux évacué par la section  $S$  s'il n'y avait pas d'ailette.
2. L'ailette est de longueur  $l$  finie et isolée (flux nul) en  $x = l$ . Mêmes questions.
3. L'ailette est de longueur finie avec un échange superficiel en  $x = l$ . Mêmes questions.

### 9.13 Le doigt de gant

Dans un tube en acier inoxydable de diamètre intérieur  $d_1 = 25$  mm circule de l'eau dont on veut connaître la température  $T_e$  considérée comme indépendante de  $r$  (voir schéma). Pour ce faire, on soude sur le tube un cylindre creux en acier inoxydable appelé doigt de gant de diamètre extérieur  $d = 5$  mm et  $e = 0,5$  mm d'épaisseur, destiné à recevoir un thermocouple qui est sensé mesurer la température du fluide.



Les hypothèses énoncées sont les suivantes : chaque section droite du doigt de gant est supposée isotherme (approximation de l'ailette). La conductivité de l'acier et les coefficients d'échange superficiel régissant les échanges acier-eau sont données :  $\lambda = 40$  W/m·K,  $h = 300$  W/m<sup>2</sup>·K. Le pied de l'ailette est à la température  $T_1$  de la paroi. Les échanges de chaleur entre l'extrémité du doigt et l'eau seront considérés comme négligeables. On supposera de plus que les transferts causés par l'air dans le doigt de gant lui-même sont négligeables et que le contact thermocouple extrémité du doigt de gant est parfait.

1. Dans ces conditions, quelle doit être la longueur  $L$  du doigt de gant pour que l'écart entre la température mesurée et la température réelle de l'eau  $T_e$  ne soit pas supérieur à 1% de la différence de température entre l'eau et la paroi du tube,  $T_e - T_1$ .
2. Compte tenu de la valeur numérique trouvée pour  $L$ , on demande de préciser la manière dont sera placé le doigt de gant dans le tube d'acier.

### 9.14 Eclairage à la surface de la terre

Une sphère noire, que l'on peut assimiler à la Terre, reçoit le rayonnement solaire. Le Soleil peut être considéré comme un corps noir à 5800 K ; son diamètre apparent est :  $2\theta = 32'$ . Calculer l'éclairage reçu normalement par un panneau solaire d'un satellite qui tourne autour de la Terre. On considère que le panneau est orienté vers le soleil.

### 9.15 Rayonnement d'un disque

Le rayonnement solaire ( $E = 700 \text{ W/m}^2$ ) est reçu normalement sur un disque plat ; on suppose que le disque n'est pas transparent au rayonnement thermique ( $\tau = 0$ ) et on ne prend pas en considération les autres échanges avec l'ambiance (par convection et rayonnement avec l'air et par rayonnement avec les autres surfaces). Calculer la température d'équilibre du disque dans les huit cas suivants :

- les deux faces du disque sont noires ;
- les deux faces sont grises (même valeur du coefficient d'absorption pour les deux faces) ;
- la face éclairée est grise et l'autre parfaitement réfléchissante ;
- la face éclairée est parfaitement réfléchissante, l'autre face est grise ;
- les deux faces sont parfaitement réfléchissantes ;
- le disque est remplacé par une sphère noire, supposée être la terre ; dans ce cas, l'éclairage solaire à l'extérieure de l'atmosphère est  $E =$
- les deux faces sont noires pour un petit intervalle de longueur d'onde autour de  $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ . Pour tout le reste du spectre les deux faces du disque sont parfaitement réfléchissantes.
- les deux faces sont noires pour un petit intervalle de longueur d'onde autour de  $\lambda = 8 \mu\text{m}$ . Pour tout le reste du spectre les deux faces du disque sont parfaitement réfléchissantes.

### 9.16 Effet de serre

Le disque supposé noir sur la face éclairée et parfaitement réfléchissant sur la face opposée, reçoit le rayonnement solaire à travers une vitre. Cette vitre est parallèle au disque. L'ensemble est perpendiculaire au rayonnement solaire.

- La vitre est considérée comme parfaitement transparente au rayonnement solaire de courte longueur d'onde (CLO) et parfaitement absorbante pour le rayonnement du disque de grande longueur d'onde (GLO). Calculer la température d'équilibre du disque et la comparer avec celle du disque non protégé.
- La vitre a un facteur de réflexion  $\rho_1$  et un facteur de transmission  $\tau_1$  pour le rayonnement solaire. Elle a un facteur de réflexion  $\rho_2$  et un facteur de transmission  $\tau_2$  pour le rayonnement qu'elle reçoit du disque. Calculer la température d'équilibre prise par le disque ainsi protégé et la comparer avec celle du disque non protégé.

Application Numérique :  $\rho_1 = 0.05$ ,  $\tau_1 = 0.95$ ,  $\rho_2 = 0.30$ ,  $\tau_2 = 0.05$

- c. Traiter les deux questions précédentes en considérant que l'ambiance environnante, à la température  $T_a$ , rayonne au dessus de la vitre comme un corps noir

Application Numérique :  $T_a = 300 \text{ K}$

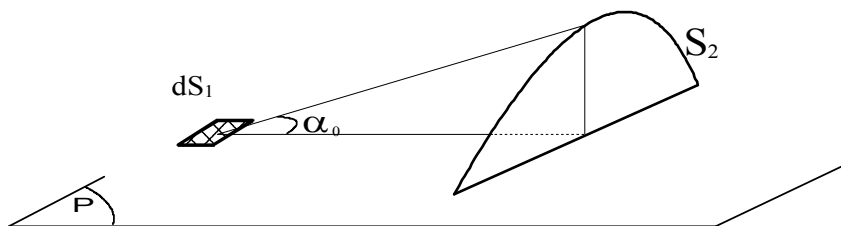
## 9.17 Facteur de forme

### Estimation d'un facteur de forme

Un cylindre fermé de diamètre de 1 mètre et de hauteur de 1 mètre est placé au centre d'une sphère de rayon égal à 1 mètre. Donner la valeur du facteur de forme de la surface intérieure de la sphère avec le cylindre.

### Facteur de forme entre une petite surface et un demi – disque

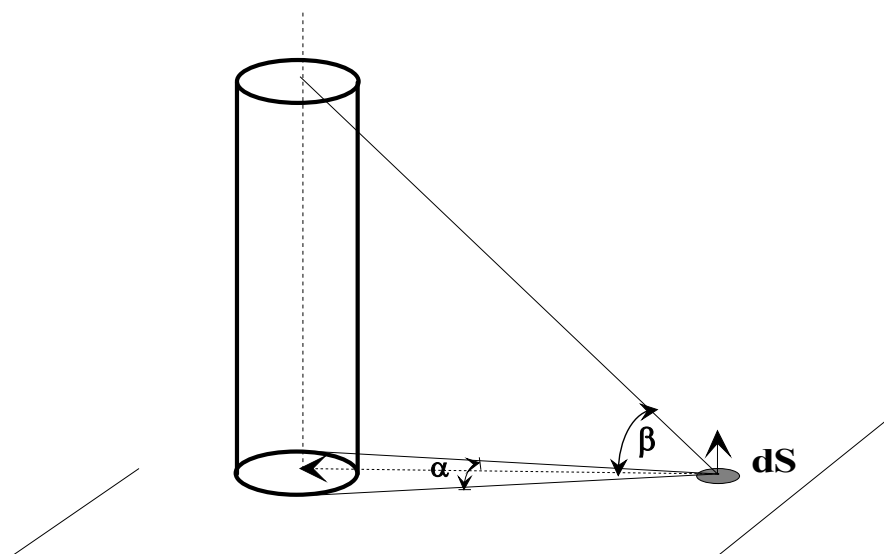
Calculer le facteur de forme d'une petite surface  $dS_1$  située dans un plan horizontal  $P$  par rapport à un demi-disque  $S_2$  vertical dont le grand diamètre est situé dans le plan  $P$ . Ce demi-disque est vu de la surface  $dS_1$  sous un angle  $\alpha_0$ .



### Facteur de forme entre une petite surface et un cylindre

Considérons une petite surface  $dS$  située dans un plan horizontal et un cylindre d'axe vertical. Le diamètre apparent de ce cylindre (angle sous lequel on le voit depuis la petite surface  $dS$ ) est appelé  $\alpha$ .

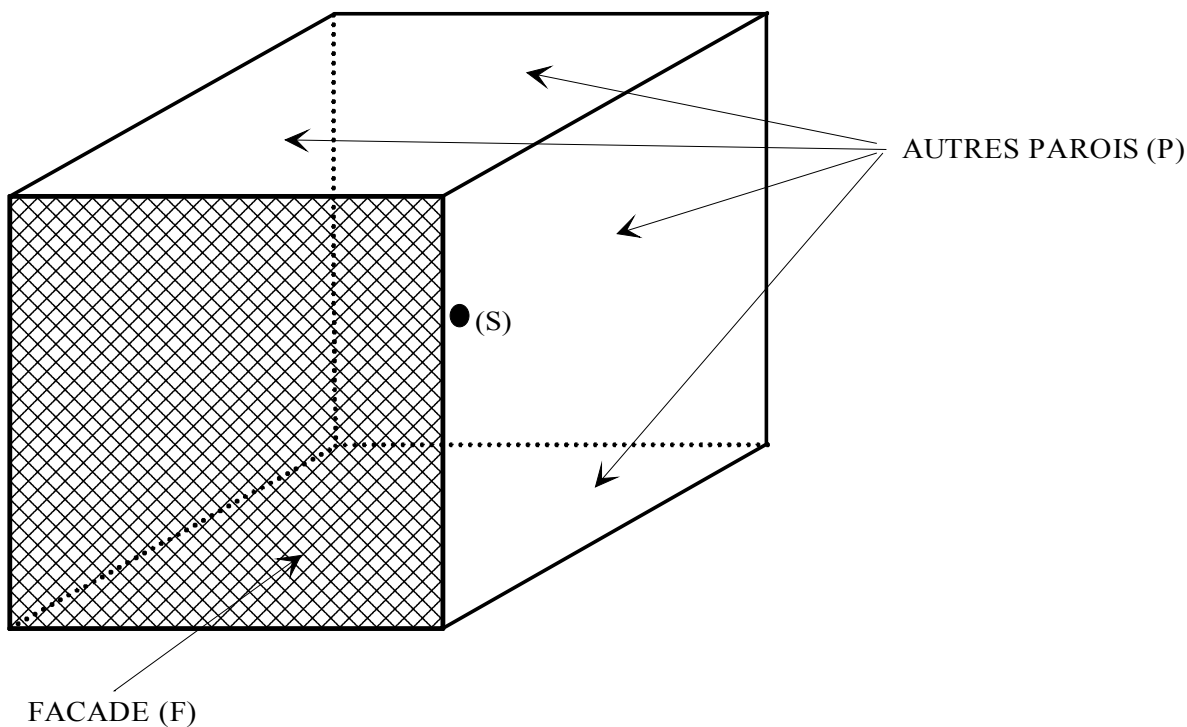
- Calculer le facteur de forme de la petite surface par rapport au cylindre. Le cylindre est supposé de longueur semi-infinie. Sa base est dans le plan qui contient la petite surface.
- Calculer l'éclairement de la petite surface sachant que le cylindre rayonne comme le corps noir à la température  $T$ .



### 9.18 Echanges radiatifs dans un local de forme cubique

On appelle température radiante la température d'équilibre d'une très petite sphère noire soumise uniquement au rayonnement (pas de convection).

Considérons une pièce carrée possédant une façade  $F$  à la température de  $0^\circ\text{C}$  et les autres parois  $P$  à la température de  $20^\circ\text{C}$ . La sphère  $S$ , permettant de mesurer la température radiante, est située au centre de gravité de la pièce. Dans tout le problème, on suppose que la surface  $S$ , étant infiniment petite, elle ne perturbe pas les échanges entre la façade et les autres parois.



a. Toutes les surfaces sont noires.

- i. Déterminer les facteurs de forme entre les surfaces  $S$ ,  $S_F$  et  $S_P$  et calculer la température moyenne radiante.
- ii. Tracer le réseau analogique du système traduisant les échanges entre les trois surfaces et déduire le flux net parois-façade (ce flux sera rapporté à l'unité de surface de la façade). On tiendra compte du fait que la sphère a une surface infiniment petite et ne perturbe pas les échanges entre la façade et les autres parois.

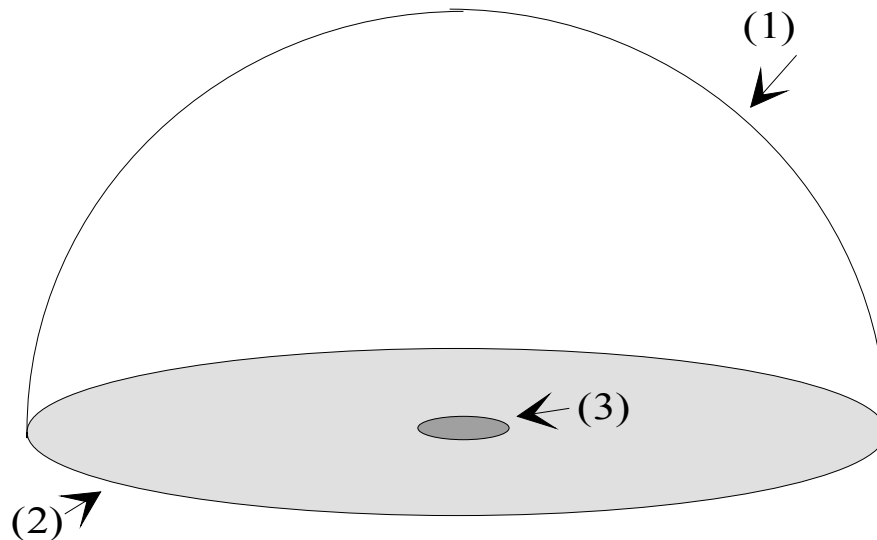
b. La façade est grise ( $\varepsilon_F = 0.5$ ). Les autres parois sont également grises ( $\varepsilon_P = 0.9$ ). La sphère est toujours noire.

- i. Tracer le réseau analogique du système et déduire le flux net des parois à la façade (comme précédemment ce flux sera rapporté à l'unité de surface de la façade et la sphère sera supposée infiniment petite).
- ii. Calculer la température radiante moyenne.



### 9.19 Estimation de la température de la voûte céleste

La voûte céleste peut être considérée comme un corps noir constitué d'une demi-sphère (indice 1). Afin d'estimer la température de la voûte céleste,  $T_1$ , on place une petite surface plane (indice 3) de surface totale (les 2 faces)  $S_3$  au voisinage du sol (indice 2). La surface  $S_2$  est parallèle la surface  $S_3$ .



Les trois surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_3$  échangent du rayonnement. L'objet de ce problème est d'estimer indirectement la température  $T_1$  en mesurant les deux seules températures accessibles,  $T_2$  et  $T_3$ .

- Donner les différents facteurs de forme des surfaces.
- Les surfaces  $S_2$  et  $S_3$  sont noires. Exprimer  $T_1$  en fonction de  $T_2$  et  $T_3$ .  
Application numérique :  $T_2 = 20\text{ °C}$ ,  $T_3 = 15\text{ °C}$ .
- Seule la surface  $S_3$  n'est pas noire ( $\varepsilon_3 = 0.9$ ). Exprimer  $T_1$  en fonction de  $T_2$  et  $T_3$ .
- Si la face inférieure de la surface  $S_3$  est supposée parfaitement réfléchissante, donner  $T_1$  en fonction de  $T_2$  et  $T_3$ .

### **9.20 Echanges radiatifs entre surfaces noires et grises**

Un câble chauffant électrique (1) de longueur 20 cm est placé au centre d'une gaine (2), le vide étant fait entre le câble et la gaine. Le diamètre du câble est de 5 mm et celui de la gaine de 2 cm.

- a. En négligeant les effets de bords aux extrémités, donner la valeur des différents facteurs de forme.
- b. Le câble doit dissiper une puissance de 30 W sans que sa température ne dépasse 800 K. Sachant que les deux surfaces sont noires, donner la température maximale que doit avoir la gaine.
- c. Que devient cette température si le câble a un coefficient d'émission de 0.9 et la gaine un coefficient de 0.8
- d. Dans les conditions de la question précédente, donner la température maximale de la gaine si l'on place un cylindre écran de diamètre 1 cm et de coefficient d'émission égal à 0.6



## 10 Bibliographie

- ASHRAE (2001). Heat transfer. *Fundamentals*. American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers, Inc. Atlanta, GA
- Degiovanni, A. (1999). Transmission de l'énergie thermique – Conduction. *Technique de l'Ingénieur*.
- Dory, J.-P., Evin F., Piro, M. (1999). Chauffage par rayonnement infrarouge. *Technique de l'Ingénieur*.
- Eyglument, B. (1997). *Manuel de Thermique*, Editions Hermès, Paris
- Howell, J. (2001). A Catalog of Radiation Heat Transfer Configuration Factors. 2<sup>nd</sup> Edition. (<http://www.me.utexas.edu/~howell/>) dans *Thermal Radiation Heat Transfer*, 4th ed., Robert Siegel and John R. Howell, Taylor and Francis, New York, 2001
- Incropera, F. et al. (2007). *Fundamentals of heat and mass transfer 6th edition*. John Wiley & Sons.
- Lefebvre, G. (1994). Comportement thermique dynamique des bâtiments : simulation et analyse. *Techniques de l'ingénieur*. B2041.
- Leleu R (1988). Transfert de chaleur. *Technique de l'ingénieur, Génie des procédés*, vol. J1, p. 1-18
- Padet, J. (2005). Convection thermique et massique. Principes généraux. *Technique de l'ingénieur*. BE 8 205.
- Padet, J. (2005b). Convection thermique et massique. Nombre de Nusselt : partie 1. *Technique de l'ingénieur*. BE 8 206.
- Strang, G. (1986). *Introduction to applied mathematics*. Welley-Cambridge Press