Transferts de chaleur

Christian Ghiaus

Bât. Freyssinet salle 1.05
Bât. Carnot salle 3.06

- *10h cours (5 séances)*
- *18h TD (9 séances)*

- *Conduction*
- *Convection*
- *Rayonnement*
- *Transferts de chaleur « multimodes »*

Documents de cours sur:

https://moodle.insa-lyon.fr Mes cours : Transferts de chaleur

https://moodle.insa-lyon.fr/course/view.php?id=4885

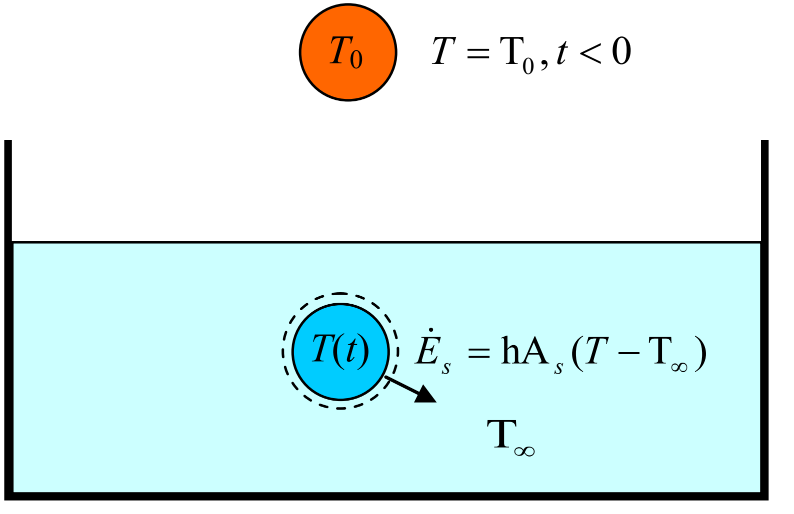
Homogénéité spatiale de la température
Chauffage instantané

- **variation conditions équilibre ➔ dynamique**
- **homogénéité spatiale de la température**
  - ➔ *pas de conduction*
  - ➔ *résistance conduction << résistance convection*

- **chauffage instantané**
  - – bilan d'énergie

$$\frac{dE_{st}}{dt} = \cancel{\dot{E}_e} - \dot{E}_s + \cancel{\dot{E}_g}$$

$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = -hA_s(T - T_\infty)$$



Homogénéité spatiale de la température

Chauffage instantané

- **changer le zéro** $\theta \equiv T - \mathrm{T}_\infty$

$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = -\mathrm{h}\mathrm{A}_s (T - \mathrm{T}_\infty)$$

$$\frac{\rho V c_p}{\mathrm{h}\mathrm{A}_s} \frac{d\theta}{dt} = -\theta$$

- **séparer les variables**

$$\frac{\rho V c_p}{\mathrm{h}\mathrm{A}_s} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = -\int_0^t dt$$

$$\frac{\rho V c_p}{\mathrm{h}\mathrm{A}_s} \ln \frac{\theta_0}{\theta} = t$$

Homogénéité spatiale de la température

Chauffage instantané

- **température en fonction du temps**

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \exp(-t/\tau_t)$$

$$\tau_t \equiv \frac{\rho V c_p}{h A_s} = R_t C_t$$

$$R_t \equiv 1/hA_s \qquad C_t \equiv \rho V c_p$$

- **flux d'énergie transférée en fonction du temps**

$$Q = hA_s \int_0^t \theta \cdot dt = \rho V c_p \theta_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_t}\right)\right]$$

- **variation de l'énergie interne**

$$-Q = \Delta E_{st}$$

Homogénéité spatiale de la température
Validité de l'hypothèse d'homogénéité

$$\forall\, t, \text{grad}(T) \approx 0$$

- **à la surface**

flux conduction = flux convection

$$-\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_S = \mathrm{h}(T_S - \mathrm{T}_\infty)$$

$$\lambda \frac{T_{S-\Delta x} - T_S}{\Delta \mathrm{x}} \cong \mathrm{h}(T_S - \mathrm{T}_\infty)$$

- **nombre de Biot**

résistance conduction

Variation témp. dans le solide

$$\mathrm{Bi} = \frac{\dfrac{\Delta \mathrm{x}}{\lambda}}{\dfrac{1}{\mathrm{h}}} = \frac{\mathrm{T}_{S-\Delta x} - T_S}{T_S - \mathrm{T}_\infty}$$

résistance convection

Variation témp. dans la couche limite

Homogénéité spatiale de la température

Validité de l'hypothèse d'homogénéité

- **nombre de Biot**

$$\mathrm{Bi} \equiv \frac{h L_c}{\lambda} \qquad L_c = \frac{V}{A_s}$$

- **longueur caractéristique en 1D**
  - paroi plan $L_c = L/2$
  - cylindre $L_c = r/2$
  - sphère $L_c = r/3$

$$\mathrm{Bi} << 1 \Longrightarrow \forall\, t,\ \mathrm{grad}(T) \approx 0$$

Variation 1D de la température

Equation de la chaleur

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}(\lambda\, \mathbf{grad} T) + p$$

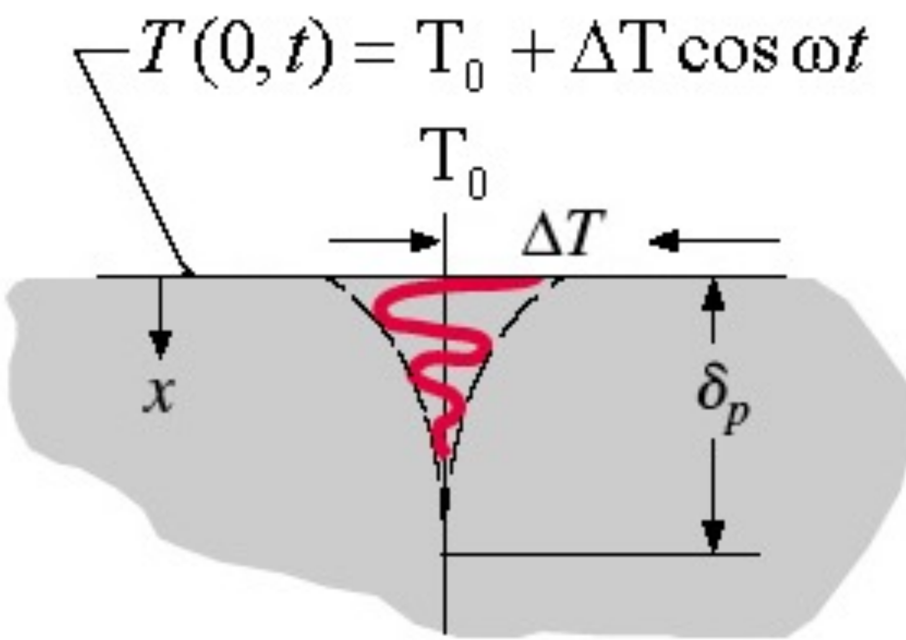
diffusivité thermique

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad \alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$$

- **3 conditions aux limites :**
  - 1 valeur initiale
  - 2 conditions aux limites spatiales

Variation 1D de la température
Chauffage périodique espace semi-infini

- **surface du sol**



$$\lim_{x \to \infty} T = T_0$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \, {}^{1}\!/_{jour} = 2\pi \frac{1}{24 \times 3600 \text{ s}} = 72 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$$

Séparation des variables

$$T(x,t) = T_0 + X(x)T^*(t)$$

- **température périodique**

$$T(0,t) \equiv T_s = \mathrm{T}_0 + \Delta\mathrm{T}\cos\omega t$$

- **équation de la chaleur linéaire**
- **➔ variation périodique dans le sol**

$$T(x,t) = T_0 + X(x)\cos(\omega t + \varphi(x))$$

$$\downarrow \qquad \cos(\omega t + \varphi) = \cos\varphi \cdot \cos\omega t - \sin\varphi \cdot \sin\omega t$$

$$T(x,t) = \mathrm{T}_0 + X_1(x)\cos\omega t + X_2(x)\sin\omega t$$

Variation 1D de la température

Chauffage périodique espace semi-infini

$$T(x,t) = T_0 + X_1(x)\cos\omega t + X_2(x)\sin\omega t$$

- **équation de la chaleur**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$-\omega X_1 \sin\omega t + \omega X_2 \cos\omega t = \alpha \frac{d^2 X_1}{dx^2}\cos\omega t + \alpha \frac{d^2 X_2}{dx^2}\sin\omega t$$

Variation 1D de la température
Chauffage périodique espace semi-infini

- **facteurs du *sin* et du *cos***

$$\begin{cases} -\omega X_1 = \alpha \dfrac{d^2 X_2}{dx^2} \\ \omega X_2 = \alpha \dfrac{d^2 X_1}{dx^2} \end{cases}$$

- **élimination de X_1**

$$\frac{d^4 X_2}{dx^4} + \frac{\omega^2}{\alpha^2} X_2 = 0$$

- **forme de la solution**

$$X_2(x) = \mathrm{c}e^{\mathrm{a}x}$$

Variation 1D de la température

Chauffage périodique espace semi-infini

- **solution générale**

$$X_2 = c_1 \exp\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x\right) + c_2 \exp\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x\right)$$
$$+ c_3 \exp\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x\right) + c_4 \exp\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}x\right)$$

$$X_2 = \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right)\left[b_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x\right) + b_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x\right)\right]$$

$$X_1 = \exp\left(-x\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right)\left[b_3 \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x\right) + b_4 \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x\right)\right]$$

Variation 1D de la température

Chauffage périodique espace semi-infini

- **variation de la température**

$$T = T_0 + \Delta T \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x\right)\cdot\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}x\right)$$

- **profondeur pour diminution avec 1/e**

$$d = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}}$$

Variation 1D de la température

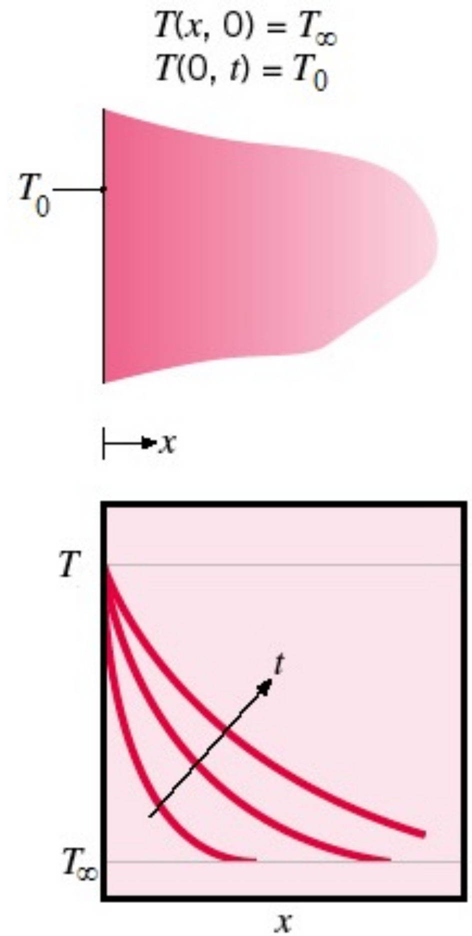
Chauffage instantanée espace semi-infini

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, x > 0,\ t > 0$$

$$T = \mathrm{T}_\infty, \quad x > 0 \quad t = 0$$

$$T = \mathrm{T}_0, \quad x = 0 \quad t > 0$$

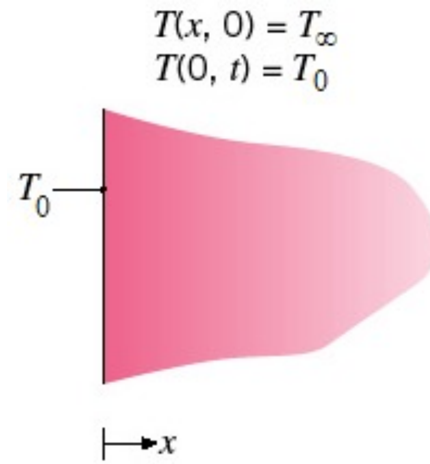
$$T \to \mathrm{T}_0, \quad x \to \infty \quad t > 0$$



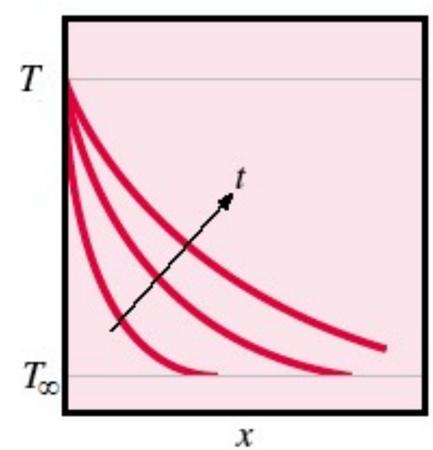
Variation 1D de la température

Chauffage instantanée espace semi-infini

$$\theta \equiv \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$



$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, x > 0,\ t > 0$$



$$\theta(x,0) = 0$$

$$\theta(0,t) = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \theta(x,t) = 0$$

Variation 1D de la température

Chauffage instantanée espace semi-infini

- **transformation : similarité = témp. dépend seulement de la *distance de diffusion thermique***

$$\eta \equiv \frac{x}{2\sqrt{t/\alpha}}$$

- **dérivation des fonctions composées**

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{d\theta}{d\eta}\left(-\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{t/\alpha}}\frac{1}{t}\right) = \frac{d\theta}{d\eta}\left(-\frac{1}{2}\frac{\eta}{t}\right)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{d\theta}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{d\theta}{d\eta}\frac{1}{2\sqrt{t/\alpha}}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{2\sqrt{t/\alpha}}\frac{d\theta}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{1}{4t/\alpha}\frac{d^2\theta}{d\eta^2}$$

- **Equation différentielle ordinaire**

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} = -2\eta \frac{d\theta}{d\eta}$$

$$\eta(\infty) = 0$$

$$\eta(0) = 1$$

Variation 1D de la température
Chauffage instantanée espace semi-infini

- **changement de variable**

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2} = -2\eta\frac{d\theta}{d\eta} \xrightarrow{\phi \equiv \frac{d\theta}{d\eta}} \frac{d\phi}{d\eta} = -2\eta\phi$$

- **séparation des variables**

$$\frac{d\phi}{\phi} = -2\eta d\eta$$

$$\ln\phi - \ln c = -\eta^2$$

$$\phi \equiv \frac{d\theta}{d\eta} = c\exp(-\eta^2)$$

Variation 1D de la température

Chauffage instantanée espace semi-infini

- **variation de la température**

$$\theta = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t/\alpha}}\right) = \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t/\alpha}}\right)$$

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

- **NOTE**

$$x = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{erfc}(0) = 1\,;\, T = T_0$$

$$t = 0\,;\, x \to 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{erfc}(\infty) = 0\,;\, T = T_\infty$$

- **variation instantanée de la témp. dans l'espace : impossible (limite de la loi de Fourier)** $\dfrac{\rho\alpha}{\Delta t} << 1$

Application de la transformé de Laplace

Transformé de Laplace

- **fonction de type exponentiel**
  - continue par portions
  - croissance exponentielle

$$\exists M, \exists k \text{ pour que } |f(t)| \leq M e^{kt}, \forall t \geq 0$$

- **admet une transformé de Laplace**

$$\mathbf{L}[f(t)] = \tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

Application de la transformé de Laplace

Transformé de Laplace

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) x^n \equiv A(x)$$ série entière

$$\int_0^{\infty} a(t) x^t dt \equiv A(x)$$ analogue continu

$$x \equiv e^{\ln x} \; ; x^t \equiv (e^{\ln x})^t ; \; x > 0, x < 1 \Rightarrow \ln x < 0 \text{ (pour la convergence)}$$

$$s \equiv -\ln x > 0 \Rightarrow x = e^{-s} \; ; x^t = e^{-st}$$

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \equiv F(s)$$ Transformée de Laplace

$$\mathbf{L}(f(t)) = F(s)$$

$$f(t) \xrightarrow{\mathbf{L}} F(s)$$

t temps

$s = \sigma + j\omega$ fréquence

Application de la transformée de Laplace

Transformée de Laplace

$\tilde{f}(s)$	$f(t)$	
1	$\delta(t)$	Impulse unitaire (Dirac)
$\dfrac{1}{s}$	$u(t)$	Échelon unitaire (Heaviside), $u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t > 0 \end{cases}$
$\dfrac{1}{s^2}$	t	Échelon de vitesse
$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	t^n	
$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}	
$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$	
$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	
$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$	$\cosh \omega t$	
$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\sinh \omega t$	

- **utiles pour l'équation de la chaleur**

$\exp(-k\sqrt{s}),\ k>0$	$\frac{k}{2t\sqrt{\pi t}},\ t>0$
$\frac{1}{\sqrt{s}}\exp(-k\sqrt{s}),\ k\geq 0$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{k^2}{4t}\right),\ t>0$
$\frac{1}{s}\exp(-k\sqrt{s}),\ k>0$	$\mathrm{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right),\ t>0$

$$\mathrm{erfc}(z)=1-\mathrm{erf}(z);\ \ \mathrm{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-x^2)dx$$

Application de la transformée de Laplace

Transformée de Laplace

- **Propriétés**
  - superposition

$$\mathbf{L}[f(t)+g(t)] = \mathbf{L}[f(t)] + \mathbf{L}[g(t)]$$

$$\mathbf{L}[Kf(t)] = K\mathbf{L}[f(t)]$$

  - théorème valeur initiale

$$\lim_{s\to\infty} s\tilde{f}(s) = \lim_{t\to 0} f(t) = f(0^+)$$

  - théorème valeur finale

$$\lim_{s\to 0} s\tilde{f}(s) = \lim_{t\to \infty} f(t) = f(\infty)$$

Application de la transformée de Laplace

Transformée de Laplace

- **inverse du produit : produit de convolution**

$$\mathbf{L}^{-1}(\tilde{f}(s)\cdot\tilde{g}(s)) = f(t) * g(t)$$

$$f(t) * g(t) \equiv \int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)\cdot dt$$

- **dérivation**

$$\mathbf{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \tilde{f}(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$

- **dérivation pour cond. init. nulles**

$$\mathbf{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \tilde{f}(s)$$

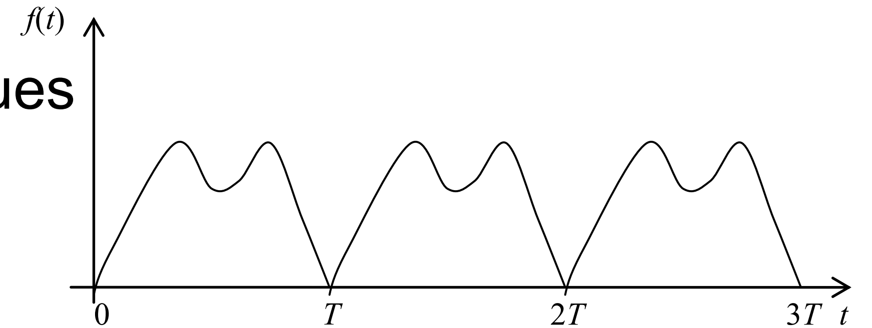
- **intégration**

$$\mathbf{L}\left[\int_0^t x dt\right] = \frac{1}{s}\tilde{x}(s)$$

- **translation**

$$\mathbf{L}(e^{\tau t} f(t)) = \tilde{f}(s-\tau)$$

  - fonctions périodiques



$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)$$

$$f_k(t) = \begin{cases} f(t), t \in [kT \quad (k+1)T], k = 1,\dots,n \\ 0, t \notin [0\ T] \end{cases}$$

  - décalage d'une période

$$f_2(t) = f_1(t-T) = f_1(t-T) \cdot u(t-T)$$

$$f_{k+1}(t) = f_1(t-kT) = f_1(t-kT) \cdot u(t-kT)$$

Transformée de Laplace

- **fonction**

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_1(t-kT)\cdot u(t-kT)$$

- **transformée de Laplace**

$$\mathbf{L}[f(t)] = \mathbf{L}\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_1(t-kT)\cdot u(t-kT)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{L}[f_1(t-kT)\cdot u(t-kT)]$$

$$\mathbf{L}[f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-skT)\tilde{f}_1(s) = \tilde{f}_1(s)\sum_{k=0}^{\infty} \exp(-skT)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$\mathbf{L}(f(t)) = \frac{\tilde{f}_1(s)}{1-e^{-sT}}$$

Application de la transformée de Laplace
Transformée inverse de Laplace

- **transformée de Laplace : rapport polynômes**

$$\tilde{f}(s) = \frac{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}{s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m} \equiv \frac{N(s)}{D(s)}$$

- **décomposé en somme de fractions simples**

$$\tilde{f}(s) = \frac{N(s)}{\prod_{k=1}^{m} (s - s_k)}$$

$$\tilde{f}(s) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{s - s_k} \qquad c_k = \tilde{f}(s)(s - s_k)\Big|_{s=s_k}$$

- **exemple**

$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$$

- **coefficients**

$$\tilde{f}(s)(s+1)\Big|_{s=-1} = \left(\frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}\right)(s+1)\Big|_{s=-1} = c_1 + \frac{c_2(s+1)}{s+2}\Big|_{s=-1} = c_1$$

$$c_1 = \frac{1}{(s+1)(s+2)}(s+1)\Big|_{s=-1} = 1$$

$$c_2 = \frac{1}{(s+1)(s+2)}(s+2)\Big|_{s=-2} = -1$$

- **fractions simples**

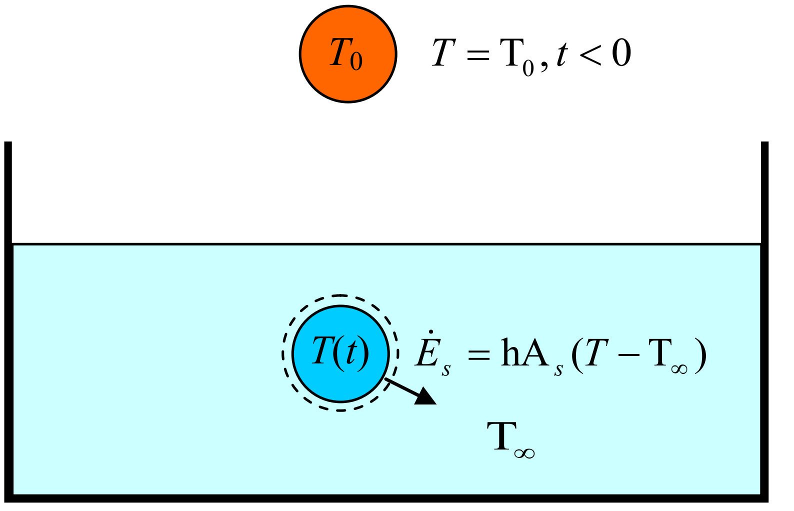
$$\tilde{f}(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 1} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

- **inverse**

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

- **équation diff**

$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = -hA_s(T - T_\infty)$$



- **cond. initiales**

$$\theta \equiv T - T_\infty$$

$$\frac{\rho V c_p}{hA_s}\frac{d\theta}{dt} = -\theta$$

$$\begin{cases} \tau_t \dfrac{d\theta}{dt} = -\theta, t > 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases}$$

Application de la transformée de Laplace
Homogénéité spatiale de la température

$$\begin{cases} \tau_t \dfrac{d\theta}{dt} = -\theta, t > 0 \\ \theta(0) = 0 \end{cases}$$

- **transformée de Laplace**

$$\tau_t\left(s\tilde{\theta} - \theta(0)\right) = -\tilde{\theta} \qquad \tau_t\left(s\tilde{\theta} - \theta_0\right) = -\tilde{\theta}$$

$$\frac{\tilde{\theta}}{\theta_0} = \frac{1}{s + 1/\tau_t}$$

- **transformée inverse**

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp(-t/\tau_t);\ \ t > 0$$

Application de la transformée de Laplace

Chauffage instantanée d'un espace semi-infini

- **éq. diff. deriv. part. avec cond. limites**

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, x > 0,\ t > 0$$

$$\theta(0,t) = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \theta(x,t) = 0$$

$$\theta(x,0) = 0$$

- **transformée de Laplace : eq. diff. ordinaire**

$$s\tilde{\theta} - \tilde{\theta}(x,0) = \alpha \frac{d^2\tilde{\theta}}{dx^2},\ \ x > 0,\ \ \tilde{\theta}(x,0) = 0$$

$$\tilde{\theta}(0,s) = \frac{1}{s}$$

$$\tilde{\theta}(\infty,s) = 0$$

Application de la transformée de Laplace
Chauffage instantanée d'un espace semi-infini

- **solution générale**

$$\tilde{\theta} = Ae^{-x\sqrt{s/\alpha}} + Be^{x\sqrt{s/\alpha}}$$

- **constantes**

$$\tilde{\theta}(\infty, s) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$$

$$\tilde{\theta}(0, s) = 1/s \;\Rightarrow\; A = 1/s$$

- **solution**

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{s} e^{-x\sqrt{s/\alpha}}$$

- **transformée inverse**

$$\theta = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t/\alpha}} \right)$$

Résolution numérique
Circuit équivalent

- **équation de la chaleur**

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\mathrm{div}(-\lambda\,\mathbf{grad}\,T) + p$$

- **1D**

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + p$$

- **forme discrète 1D**

$$\rho \cdot c\,\dot{\theta}_m = \lambda \frac{1}{\Delta x^2}\left[(\theta_{m-1} - \theta_m) + (\theta_{m+1} - \theta_m)\right] + p$$

$$\rho \cdot A\,\Delta x \cdot c\,\dot{\theta}_m = \lambda \frac{A}{\Delta x}(\theta_{m-1} - \theta_m) + \lambda \frac{A}{\Delta x}(\theta_{m+1} - \theta_m) + \dot{q} \cdot A\,\Delta x$$

- **circuit équivalent 1D**

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\mathrm{div}(-\lambda\, \mathbf{grad}\, T) + p$$

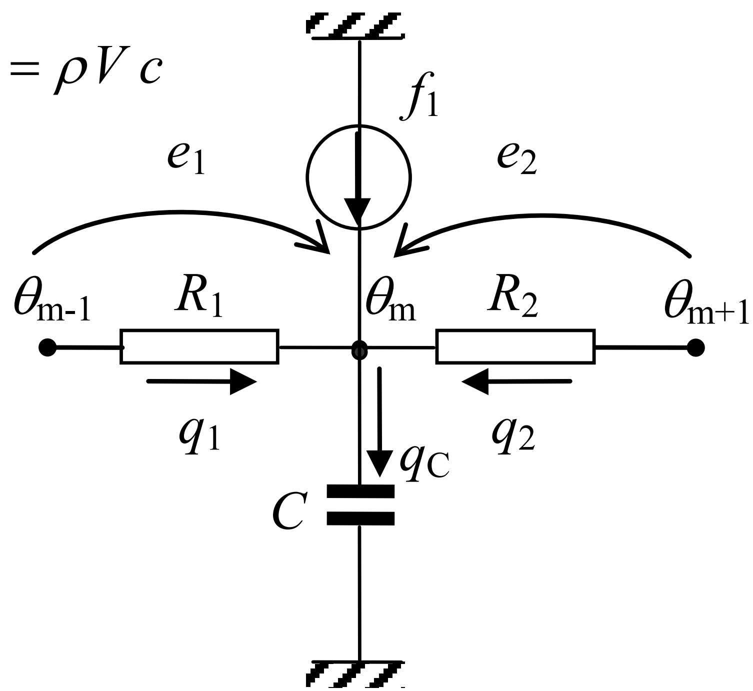
$$\rho \cdot A\,\Delta x \cdot c\,\dot{\theta}_m = \lambda \frac{A}{\Delta x}(\theta_{m-1} - \theta_m) + \lambda \frac{A}{\Delta x}(\theta_{m+1} - \theta_m) + \dot{q} \cdot A\,\Delta x$$

$$C \equiv \rho\, A\, \Delta x\, c = \rho\, V\, c$$

$$R_1 \equiv \lambda \frac{A}{\Delta x}$$

$$R_2 \equiv \lambda \frac{A}{\Delta x}$$

$$f_1 \equiv \dot{q}\, A\, \Delta x$$



Résolution numérique
Modèle d'état

- **équation de la chaleur**
- **statique**

$$0 = -\mathrm{div}(-\lambda\, \mathbf{grad}\, T) + p$$

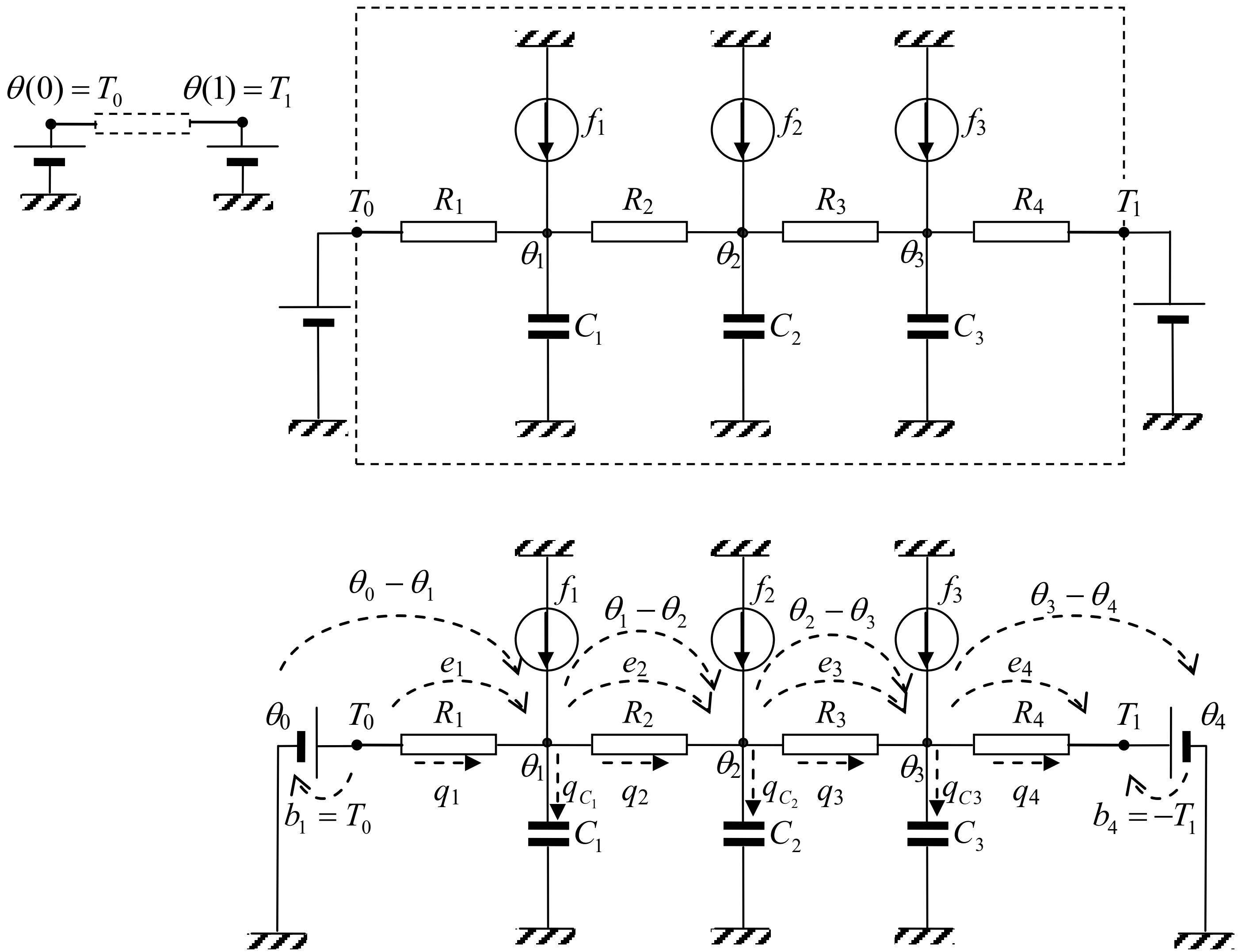
$$0 = -\mathbf{A}^T\, \mathbf{G}\, \mathbf{A}\, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{f}_T \;;\quad \mathbf{f}_T \equiv \mathbf{A}^T\, \mathbf{G}\, \mathbf{b} + \mathbf{f}$$

- **dynamique**

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\mathrm{div}(-\lambda\, \mathbf{grad}\, T) + p$$

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{f}_T \;;\; \mathbf{f}_T \equiv \mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{b} + \mathbf{f}$$

Résolution numérique
Modèle d'état



Résolution numérique
Modèle d'état

Conduction

- Homogen. spatiale
  - Chauffage instant.
  - Validité
- Variation 1D
  - Equation chaleur
  - Chauff. périodique
  - Chauff. instantané
- Transf. Laplace
  - Transf. directe
  - Transf. inverse
  - Homogen. spatiale
  - Chauff. instantané
- Résol. numérique
  - Circuit équivalent
  - Modèle d'état
  - Méthode explicite
  - Méthode implicite

$$\begin{cases} e_1 - b_1 = \theta_0 - \theta_1 \\ e_2 - b_2 = \theta_1 - \theta_2 \\ e_3 - b_3 = \theta_2 - \theta_3 \\ e_4 - b_4 = \theta_3 - \theta_4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{e} - \mathbf{b} = -\mathbf{A}\boldsymbol{\theta}$$

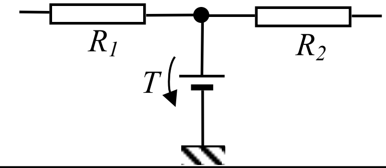
$$\begin{cases} q_1 = G_1 e_1 \\ q_2 = G_2 e_2 \\ q_3 = G_3 e_3 \\ q_4 = G_4 e_4 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}$$

$$\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}^T \mathbf{q} + \mathbf{f}$$

$$\begin{cases} C_1 \dot{\theta}_1 = q_1 - q_2 + f_1 \\ C_2 \dot{\theta}_2 = q_2 - q_3 + f_2 \\ C_3 \dot{\theta}_3 = q_3 - q_4 + f_3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}\,\dot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{A}^T \mathbf{G}\,\mathbf{A}\,\boldsymbol{\theta} + \mathbf{A}^T \mathbf{G}\,\mathbf{b} + \mathbf{f}$$

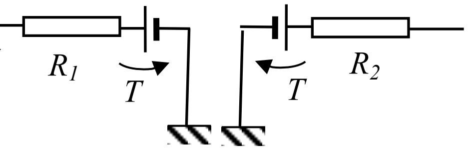
Résolution numérique
Modèle d'état - algorithme

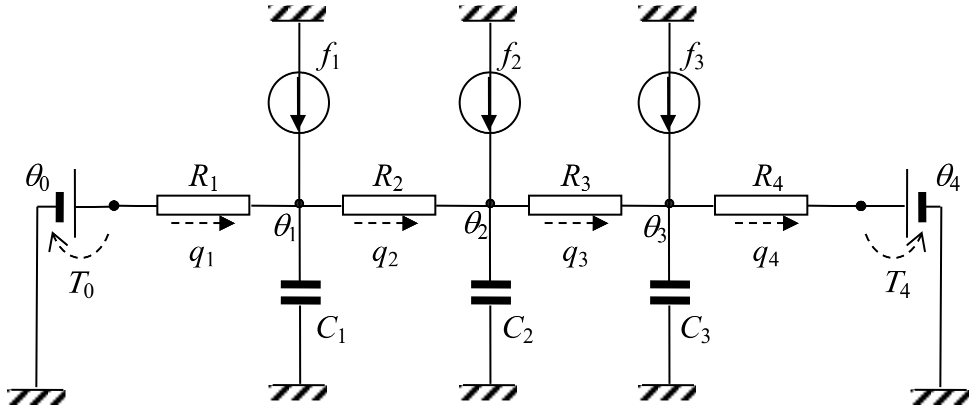


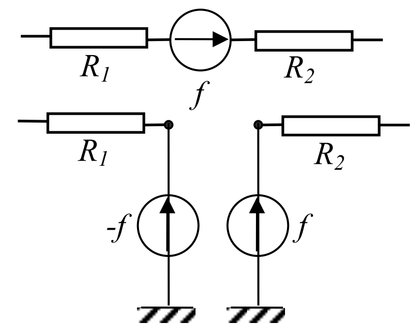
Conduction

Homogen. spatiale
Chauffage instant.
Validité
Variation 1D
Equation chaleur
Chauff. périodique
Chauff. instantané
Transf. Laplace
Transf. directe
Transf. inverse
Homogen. spatiale
Chauff. instantané
Résol. numérique
Circuit équivalent
Modèle d'état
Méthode explicite
Méthode implicite

- **Placer les sources, donner les sens des flux**



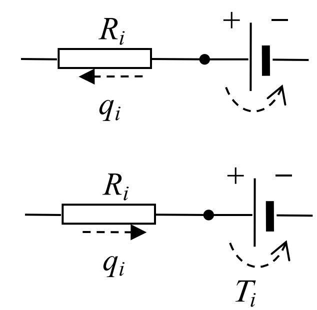




- **Décrire le circuit**

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} T_0 \\ 0 \\ 0 \\ -T_4 \end{bmatrix}$$



$b_i = T_i$

$b_i = -T_i$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = [f_1 \quad f_2 \quad f_3]^T$$

- **Donner la solution**

$$\mathbf{C} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{f}_T \; ; \qquad \text{où } \mathbf{f}_T \equiv \mathbf{A}^T \mathbf{G} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{f}$$

- **modèle d'état, si** $\exists C^{-1}$

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}_s\,\boldsymbol{\theta} + \mathbf{B}_s\,\mathbf{f}_T$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_s\,\boldsymbol{\theta} + \mathbf{D}_s\,\mathbf{f}_T$$

où $\boldsymbol{\theta}$ est le vecteur d'état, contient les températures,

$\mathbf{f}_T = [\mathbf{b} \quad \mathbf{f}]^T$ - vecteur des entrées,

$\mathbf{y}$ - vecteur des sortie, les variables d'intérêt,

$\mathbf{A}_s = -\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{G}\mathbf{A}$ est la matrice dynamique, si $\exists\mathbf{C}^{-1}$

$\mathbf{B}_s = \mathbf{C}^{-1}[\mathbf{A}^T\mathbf{G} \quad \mathbf{I}]$ - matrice de commande, si $\exists\mathbf{C}^{-1}$

$\mathbf{C}_s$ - matrice d'observation,

$\mathbf{D}_s$ - matrice d'action directe.

Résolution numérique
Méthode explicite

- **approximation d'Euler**

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial t}\right|_{m,n} \cong \frac{\theta_{m,n}^{p+1} - \theta_{m,n}^{p}}{\Delta t}$$

- **évaluation au pas de temps précédent**

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}_s\, \boldsymbol{\theta} + \mathbf{B}_s\, \mathbf{f}_T$$

$$\frac{\boldsymbol{\theta}_{p+1} - \boldsymbol{\theta}_p}{\Delta t} = \mathbf{A}_s\, \boldsymbol{\theta}_p + \mathbf{B}_s\, \mathbf{f}_{T,p}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{p+1} = (\mathbf{I} + \Delta t\, \mathbf{A})\, \boldsymbol{\theta}_p + \Delta t\, \mathbf{B}_s\, \mathbf{f}_{T,p}$$

Résolution numérique
Méthode explicite

- **Stabilité**
  - choisir la discrétisation spatiale
  - pas de temps imposé

  (analyse de stabilité de von Neumann)
  - *1D :* $$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$
    2D : $$\frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{4}$$

$\alpha = \lambda / (\rho c)$ diffusivité thermique

$|1 + \lambda_i \, \Delta t| \leq 1, \forall i$ $\quad \lambda_i$ sont les valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}$

Résolution numérique
Méthode implicite

- **approximation d'Euler**

$$\left.\frac{\partial \theta}{\partial t}\right|_{m,n} \cong \frac{\theta_{m,n}^{p+1} - \theta_{m,n}^{p}}{\Delta t}$$

- **évaluation au même pas de temps**

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{A}_s \boldsymbol{\theta} + \mathbf{B}_s \mathbf{f}_T$$

$$\frac{\boldsymbol{\theta}_{p+1} - \boldsymbol{\theta}_p}{\Delta t} = \mathbf{A}_s \boldsymbol{\theta}_{p+1} + \mathbf{B}_s \mathbf{f}_{T,p}$$

$$\boldsymbol{\theta}_{p+1} = (\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{A})^{-1} (\boldsymbol{\theta}_p + \Delta t\, \mathbf{B}_s \mathbf{f}_{T,p})$$

Convection

Christian Ghiaus

Bât. Freyssinet salle 1.05
Bât. Carnot salle 2.10

- *10h cours*
- *18h TD*

- *Conduction*
- *Convection*
- *Rayonnement*

Documents du cours sur :

\\Insa2gcu\insa2gcu-enseignants_vers_etudiants

\3GCU_Transferts_de_chaleur

Introduction

- **Transfert de chaleur dans les *fluides***
  - *advection*
  - *diffusion*

- **Etude en régime stationnaire**
- **Fluide – parois solides**
  - densité de flux thermique à la paroi

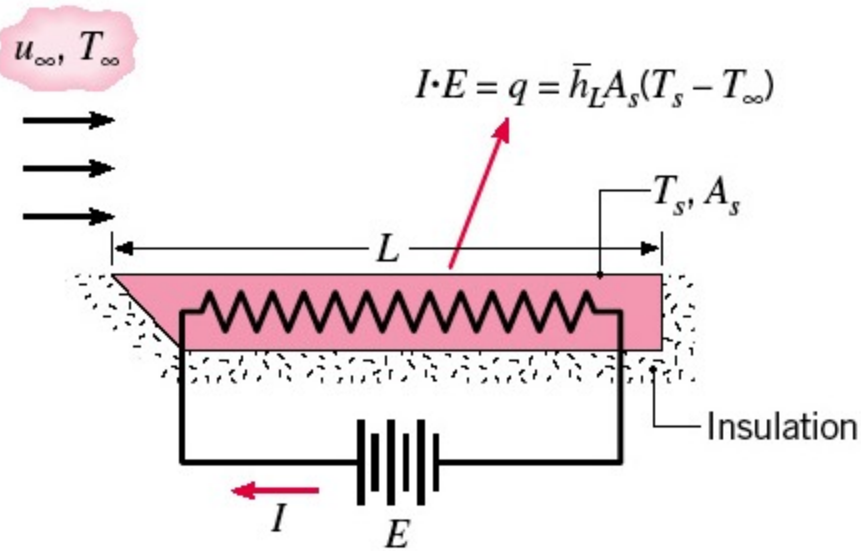
$$\varphi_p = -\lambda_{ps} \left.\frac{\partial \theta}{\partial n}\right|_{ps} = -\lambda_{pf} \left.\frac{\partial \theta}{\partial n}\right|_{pf}$$

  - continuité de la température à la paroi

$$\left.\theta_s\right|_M = \left.\theta_f\right|_M$$

- **Loi de Newton**

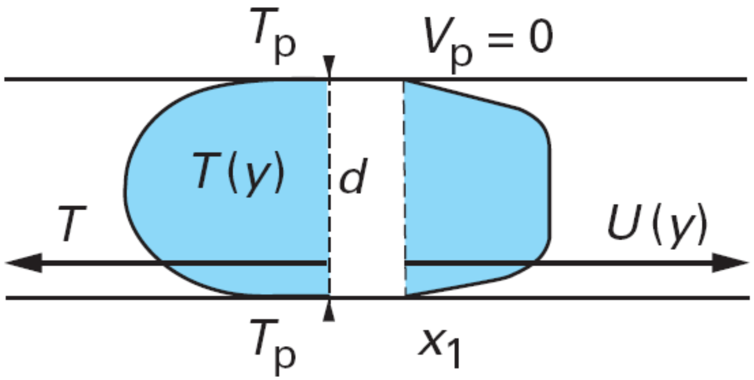
$$\varphi_p = h_c(\theta_p - \theta_M)$$



- **Problème de la convection**
  - température de référence
  - coefficient d'échange

Température caractéristique

- **Température caractéristique en espace confiné**

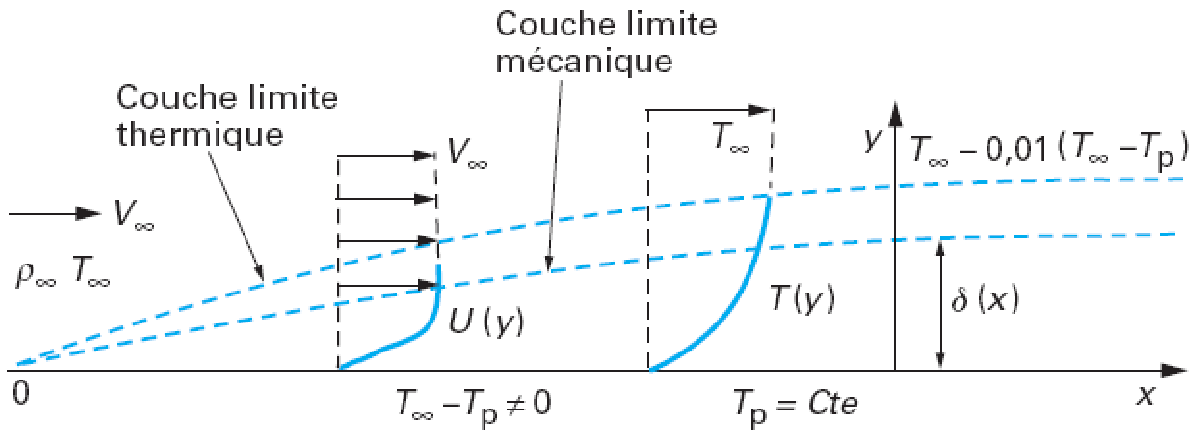


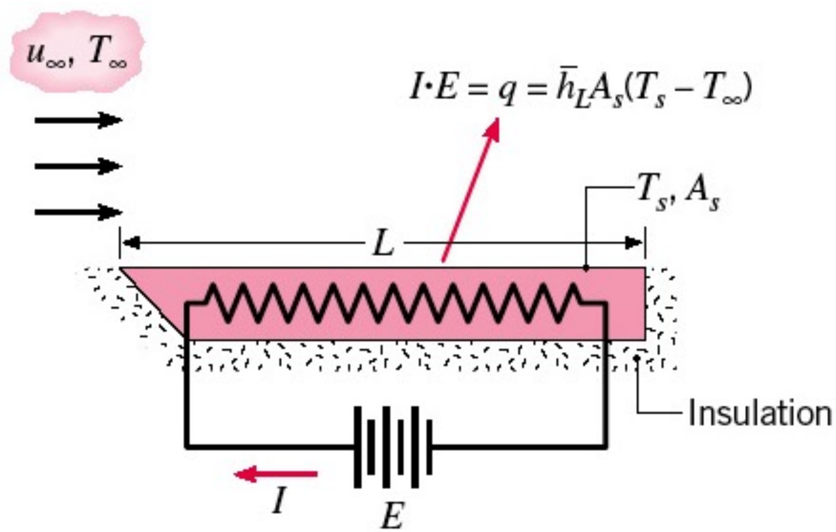
$$\dot{m}_x = \int_0^d \rho\, v\, dy = d\ \rho\, v_M \qquad v_M \equiv \frac{1}{d}\int_0^d v\, dy$$

$$\dot{H}_x = \int_0^d \rho\, c\, v\, \theta\, dy \qquad \theta_M = \frac{\dot{H}_x}{c\ \dot{m}_x} = \frac{\int_0^d \rho\, v\, \theta\, dy}{\int_0^d \rho\, v\, dy}$$

Température caractéristique

- **Température caractéristique en espace semi-infini** $\theta_M = \theta_\infty$





Coefficient d'échange convectif

- **Coefficient d'échange convectif**
  - Ordre de grandeur

	Convection	
	naturelle (W/m² K)	forcée (W/m² K)
gaz	3 …30	12 … 200
éau	30 …300	200…7500

- **Expression mathématique d'une loi physique**

$$f(E_1,\dots,E_p)=0$$

$$\Big\downarrow \text{ Théorème de Vachy – Buckingham}$$

$$F(\pi_1,\dots,\pi_{p-q})=0$$

q nombre d'unités fondamentales

(L, T, M, I, …)

- **Exemple : échange de chaleur dans un tube infiniment long**

Grandeurs qui influencent le flux thermique dans un tube

	Grandeurs	Symbole	Unité SI	Dimension
1	Diamètre du tube	(a) D	m	$[L]$
2	Vitesse du fluide	(b) U_∞	m/s	$[LT^{-1}]$
3	Masse volumique du fluide	(c) ρ	kg/m^3	$[ML^{-3}]$
4	Viscosité dynamique du fluide	(d) μ	$kg/(m\cdot s)$	$[ML^{-1}T^{-1}]$
5	Conductivité thermique du fluide	(e) λ	$\mathrm{W/(m\cdot K)}$	$[MLT^{-3}\theta^{-1}]$
6	Chaleur spécifique à pression constante	(f) c_p	$\mathrm{J/(kg\cdot K)}$	$[L^2T^{-2}\theta^{-1}]$
7	Coefficient d'échange de chaleur	(g) h_c	$\mathrm{W/(m^2K)}$	$[MT^{-3}\theta^{-1}]$

7 [grandeurs physiques] - 4 [dimensions (L, M, T, θ)] = 3 [produits]

$$\pi = D^a \cdot v^b \cdot \rho^c \cdot \mu^d \cdot \lambda^e \cdot c_p^f \cdot h_c^g$$

dimensions :

$$[\pi] = [L]^{a+b-3c-d+e+2f}[M]^{c+d+e+g}[T]^{-b-d-3e-2f-3g}[\theta]^{-e-f-g}$$

Coefficient d'échange convectif

Analyse dimensionnelle er similitude

– produits sans dimensions (4 eq. 7 inconnues)

$$\begin{cases} a+b-3c-d+e+2f=0 \\ c+d+e+g=0 \\ -b-d-3e-2f-3g=0 \\ -e-f-g=0 \end{cases}$$

– choix possible des solutions

$$a=1; e=-1; g=1; b=c=d=f=0; \Rightarrow \pi_1 = \frac{h \cdot D}{\lambda} \equiv Nu$$

$$a=1; b=1; c=1; d=-1; e=f=g=0; \Rightarrow \pi_2 = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} \equiv Re$$

$$d=1; e=-1; f=1; a=b=c=g=0; \Rightarrow \pi_3 = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda} \equiv Pr$$

$$F(Nu, Re, Pr) = 0$$

Coefficient d'échange convectif

Interprétation des nombres adimensionnels

- **Reynolds** : rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu} = \frac{\rho v^2 D^2}{\mu v D}$$

  - *inertie*

$$\rho v^2 D^2 = \rho v D^2 \cdot v = \rho l D^2 \cdot \frac{v}{t} \propto \rho V \cdot \frac{v}{t} = m \cdot a$$

  - *forces visqueuses*

$$\mu v D \propto \mu S \frac{dv}{dz}$$

Coefficient d'échange convectif

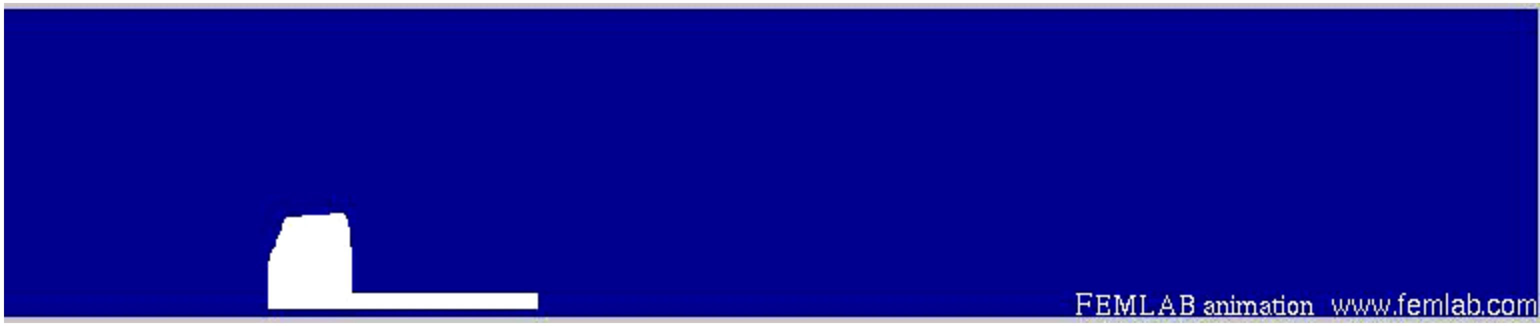
Interprétation des nombres adimensionnels

Coefficient d'échange convectif

Interprétation des nombres adimensionnels

Conduction

- Homogen. spatiale
  - Chauffage instant.
  - Validité
- Coefficient d'échange
  - Equation chaleur
  - Nombre adim.
  - Chauff. instantané
- Transf. Laplace
  - Transf. directe
  - Transf. inverse
  - Homogen. spatiale
  - Chauff. instantané
- Résol. numérique
  - Circuit équivalent
  - Modèle d'état
  - Méthode explicite
  - Méthode implicite



Coefficient d'échange convectif

Interprétation des nombres adimensionnels

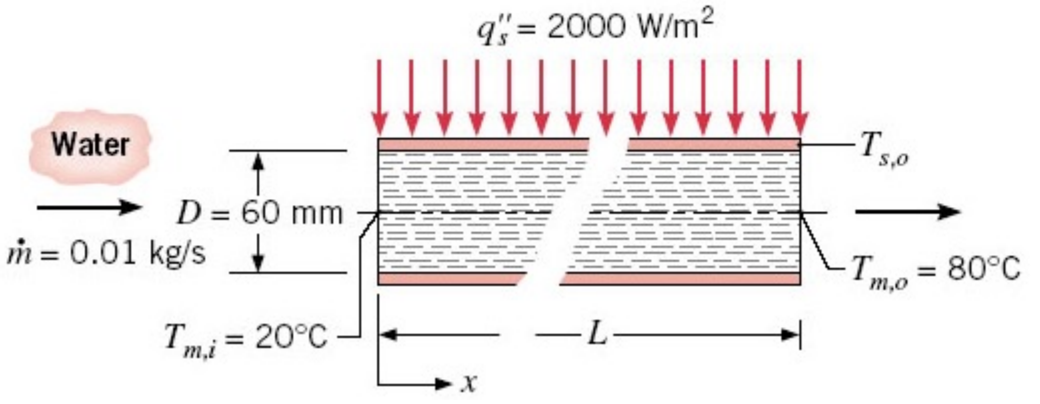
- **Prandtl** : rapport entre diffusivité cinématique et diffusivité thermique

$$Pr = \frac{\mu \cdot c_p}{\lambda} = \frac{\mu / \rho}{\lambda / (\rho \cdot c_p)} = \frac{\nu}{\alpha}$$

- **Nusselt** : transfert thermique dans le cas de la convection comparé avec la conduction

$$Nu = \frac{hD}{\lambda} = \frac{h\Delta T}{\lambda \dfrac{\Delta T}{D}} = \frac{D / \lambda}{1 / h}$$

- **dans un tube**



h_c dépend de :

- v_M , vitesse moyenne du fluide, m/s
- ρ , masse volumique du fluide, kg/m^3
- c , chaleur spécifique du fluide, J/kg.°C
- μ , viscosité dynamique du fluide, P$_a$.s
- λ , conductivité thermique du fluide, W/m °C
- D , diamètre intérieur du tube m
- x , abscisse, m.

Convection forcée

- **dans un tube**

quatre unités fondamentales (nombres adimensionnels) :

$Nu = \dfrac{h\,D}{\lambda}$ nombre de Nusselt, qui caractérise l'échange thermique entre le fluide et la paroi ;

$\mathrm{Re} = \dfrac{\rho\, v_m\, D}{\mu}$ nombre de Reynolds, qui caractérise le régime d'écoulement :

$Re < 2000$ écoulement laminaire
$Re > 3000$ écoulement turbulent

$Pr = \dfrac{\mu\, c}{\lambda}$ nombre de Prandtl, qui caractérise les propriétés thermiques du fluide

$\dfrac{x}{D}$ abscisse réduite.

$$Nu = 0.023\, \mathrm{Re}^{0.8}\ \mathrm{Pr}^{0.33}$$ Formule de Colburn

Convection forcée

- **dans un tube**
  - quatre unités fondamentales (nombre adimensionnels):

$Nu = \frac{h\,D}{\lambda}$ nombre de Nusselt, échange fluide - paroi.

$Re = \frac{\rho\, v_m\, D}{\lambda}$ nombre de Reynolds, régime de l'écoulement :

$Re < 2000$ laminaire

$Re > 3000$ turbuent

$Pr = \frac{\mu\, c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha}$ nombre de Prandtl, propriétés du fluide

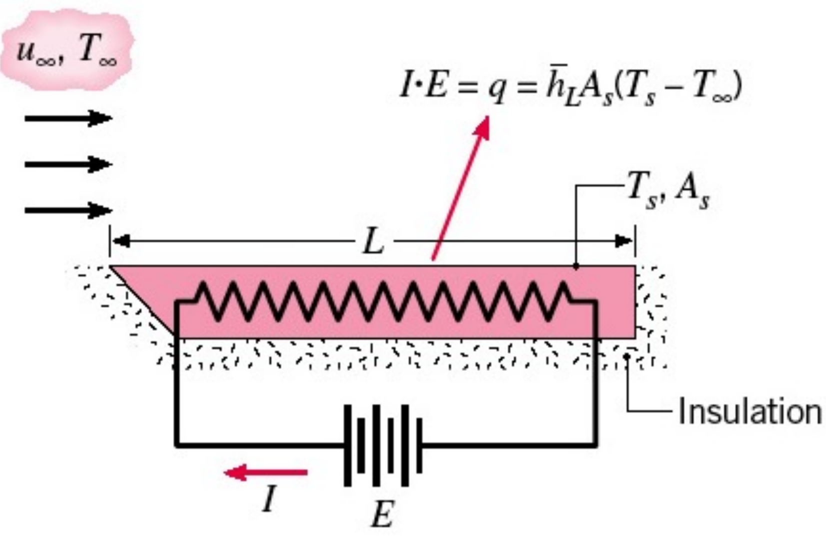
$\frac{l}{D}$ abscisse réduite,

$l/D > 60$

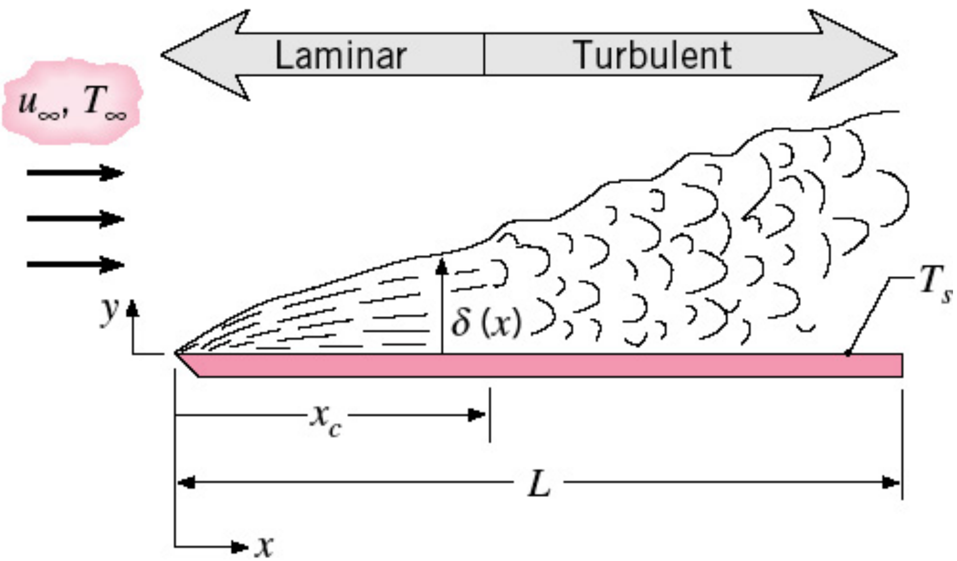
$$Nu = 0.023\ \mathrm{Re}^{0.8}\ \mathrm{Pr}^{0.33}$$

Convection forcée

- **fluide et plaque**



$$\overline{Nu} = 0.035\,\mathrm{Re}^{0.80}\ \mathrm{Pr}^{0.33}$$



Convection naturelle

- **Forces de gravité et forces ascensionnelles**
- **Nombre de Grashof (équivalent du nombre de Reynolds pour la conv. nat.)**

$$Gr = \frac{g\beta\rho^2 D^3(\theta_p - \theta_\infty)}{\mu^2}$$

  – forces ascensionnelles (d'Archimède)

  – forces visqueuses

- **Corrélation pour la convection naturelle**

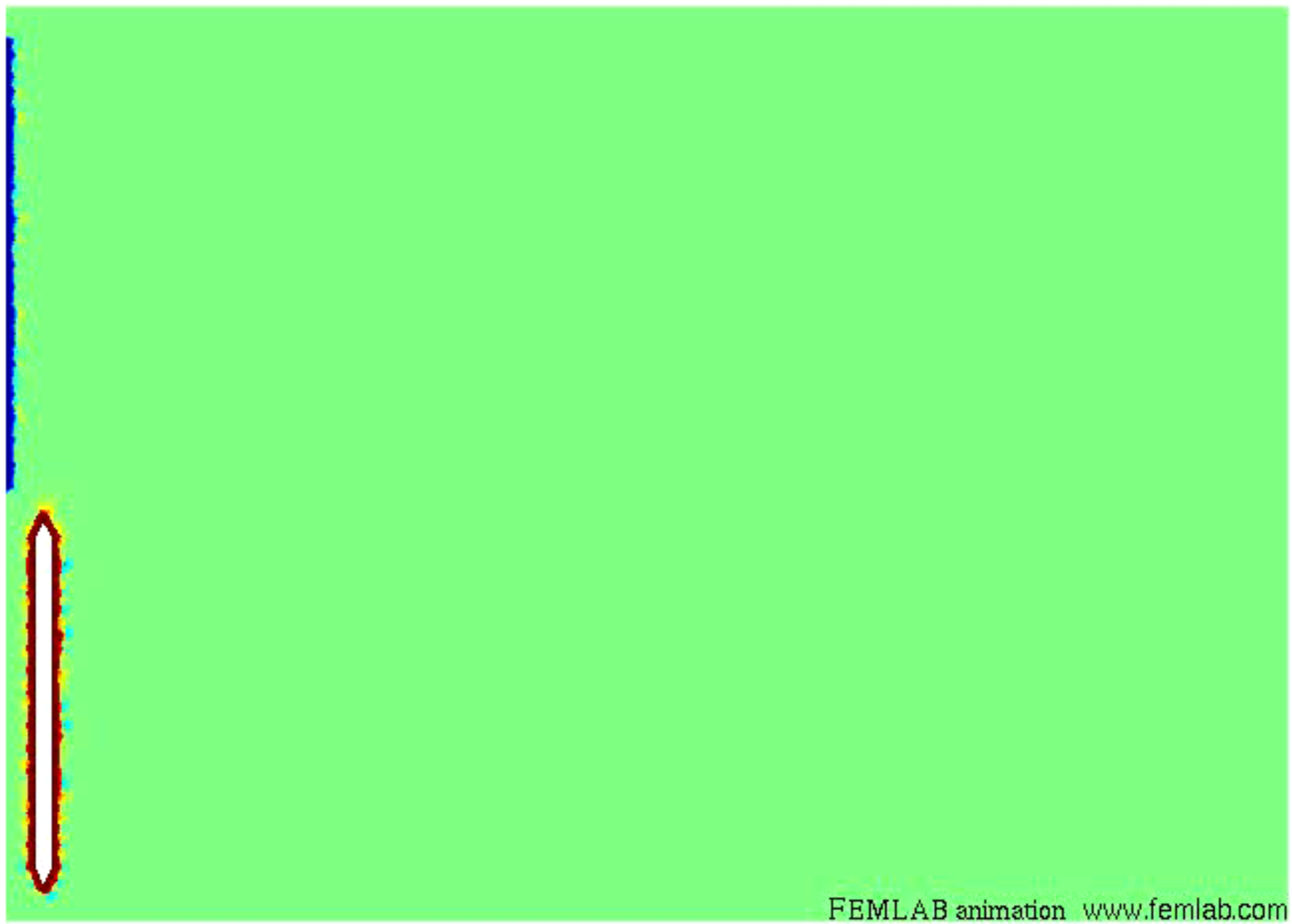
$$Nu = C(Gr\ Pr)^n$$

$$10^3 < Gr < 10^9 \Rightarrow C = 0.2 \ldots 0.6; n = 1/4 \ \ laminaire$$
$$10^9 < Gr < 10^{12} \Rightarrow C = 0.07 \ldots 0.15; n = 1/3 \ \ turbulent$$

$Ra \equiv Gr\ Pr$ (N° de Rayleigh)

Convection naturelle

- **Chauffage**



Equations de Naviers-Stokes

- **Description du mouvement du corps déformable**
  - **Lagrangienne** consiste à suivre les particules de fluides
    - *Mouvement : centre de gravité*
    - *3 coordonnées spatiales*
    - *3 angles*

Equations de Naviers-Stokes

- **Description du mouvement du corps déformable**
  - **Eulérienne** consiste à se placer en position fixe

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(t,\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} v_1(t,x_1,x_2,x_3) \\ v_2(t,x_1,x_2,x_3) \\ v_3(t,x_1,x_2,x_3) \end{bmatrix} \equiv \mathbf{v}(t,x_1,x_2,x_2) \equiv \mathbf{v}(t,x_i) \equiv v_j(t,x_i)\Big|_{\substack{i=1,2,3;\\ j=1,2,3}}$$

  - champs vectorielle

$$\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}(t,\mathbf{x}) \equiv \mathbf{G}(t,x_i) = G_j(t,x_i)\Big|_{\substack{i=1,2,3\\ j=1,2,3}}$$

  - scalaire

$$G \equiv G(t,\mathbf{x}) \equiv G(t,x_i)\Big|_{i=1,2,3}$$