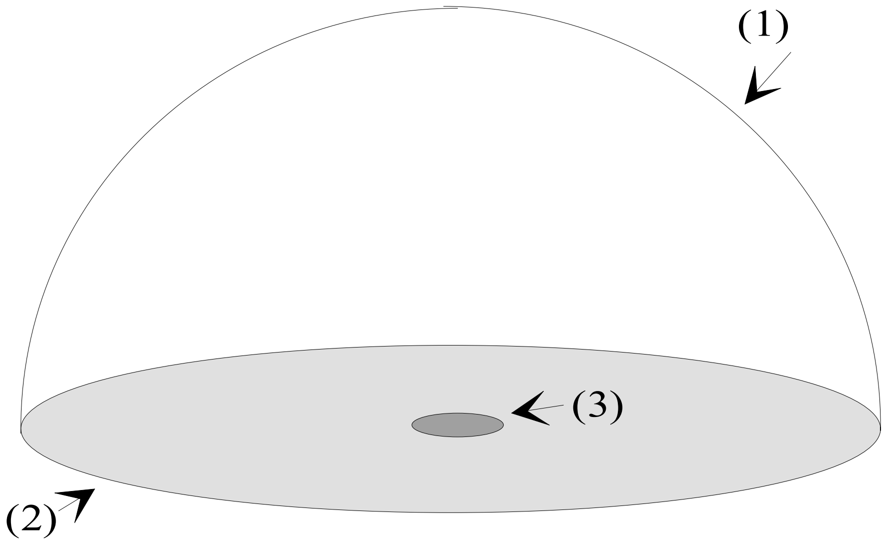
ESTIMATION DE LA TEMPERATURE DE VOUTE CELESTE

La voûte céleste peut être considérée comme un corps noir constitué d'une demi sphère (indice 1). Afin d'estimer la température de la voûte céleste T_1, on place une petite surface plane (indice 3) de surface totale (les 2 faces) S_3 au voisinage du sol (indice 2). S_2 est parallèle à S_3 .



Les trois surfaces S_1 S_2 et S_3 échangent du rayonnement. L'objet de ce problème est d'estimer indirectement la température T_1 en mesurant les 2 seules températures accessibles T_2 et T_3.

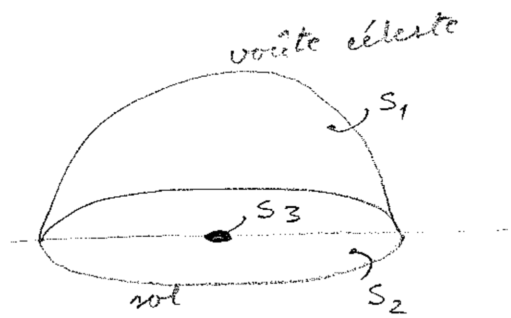
1) Donner les différents facteurs de forme des surfaces.

2) Les surfaces S_2 et S_3 sont noires. Exprimer T_1 en fonction de T_2 et T_3.
   Application numérique : $T_2 = 20°C$ $T_3 = 15°C$.

3) Seule la surface S_3 n'est pas noire ($\varepsilon_3 = 0.9$). Exprimer T_1 en fonction de T_2 et T_3.

3) Si la face inférieure de 3 est supposée parfaitement réfléchissante, donner T_1 en fonction de T_2 et T_3.

Estimation de la température de la voûte céleste



Estimer indirectement la température de la voûte, T_1, en mesurant les températures accessibles T_2 et T_3

1) $\boxed{\text{Facteurs de forme}}$ 3 surfaces $\Rightarrow$ 3! facteurs de forme

$$F_{12} \quad F_{21} \quad F_{13} \quad F_{31} \quad F_{23} \quad F_{32}$$

Note:

$S_3 \ll S_2 \qquad S_3 \cdot F_{32} = S_2 F_{23} \Longrightarrow F_{23} = \frac{S_3}{S_2} F_{32} \simeq 0$

$S_3 \ll S_1 \qquad S_3 \cdot F_{31} = S_1 F_{13} \Longrightarrow F_{13} = \frac{S_3}{S_1} F_{31} \simeq 0$

$$F_{31} + F_{32} + \underbrace{\cancel{F_{33}}}_{0} = 1 \qquad \text{(complémentarité)}$$

$$\underbrace{F_{31}}_{\text{disc-voûte}} = \underbrace{F_{32}}_{\text{disc-sol}} \Longrightarrow \boxed{F_{31} = F_{32} = \frac{1}{2}}$$

$$F_{21} + \underbrace{\cancel{F_{22}}}_{0\ \text{plane}} + \underbrace{\cancel{F_{23}}}_{0} = 1 \Longrightarrow \boxed{F_{21} = 1}$$

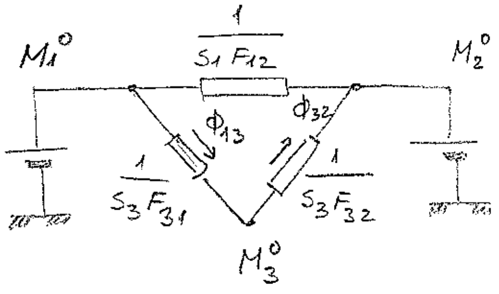
$S_2 F_{21} = S_1 F_{12} \qquad S_2 = \pi R^2 \qquad S_1 = \frac{1}{2} 4\pi R^2$

$$\Longrightarrow \cancel{\pi} R^2 \cdot 1 = 2\cancel{\pi} R^2 \cdot F_{12} \Longrightarrow \boxed{F_{12} = \frac{1}{2}}$$

2) Les surfaces S_2 et S_3 sont noires. Exprimer T_1 en fonction de T_2 et T_3 (mesurables)

Echanges entre 3 surfaces noires.

Analogie électrique



corps noir $\Rightarrow J_i = M_i^\circ$

$$\Phi_{13} = \Phi_{32}$$

$$(M_1^\circ - M_3^\circ)\cancel{S_3} F_{31} = (M_3^\circ - M_2^\circ)\cancel{S_3} F_{32}$$

$$M_3^\circ \underbrace{(F_{31} + F_{32})}_{1} = M_1^\circ \underset{\downarrow 1/2}{F_{13}} + M_2^\circ \underset{\downarrow 1/2}{F_{32}}$$

$$M_3^\circ = \frac{1}{2} M_1^\circ + \frac{1}{2} M_2^\circ$$

$$\sigma T_3^4 = \frac{1}{2}\sigma T_1^4 + \frac{1}{2}\sigma T_2^4$$

$$T_3 = \left(\frac{1}{2} T_1^4 + \frac{1}{2} T_2^4\right)^{1/4} = \left(\frac{1}{2}\cdot 293^4 + \frac{1}{2}\, 288^4\right)^{1/4} = 290{,}5\,K = 17.5°C$$

Bilan d'énergie

$$\Phi_3 \text{ absorbé} = \Phi_3 \text{ émis}$$

$$\underset{\downarrow 1}{\alpha_3}\left(F_{13} S_1 \underset{\downarrow 1}{\varepsilon_1} M_1^\circ + F_{23} S_2 \underset{\downarrow 1}{\varepsilon_2} M_2^\circ\right) = \underset{\downarrow 1}{\varepsilon_3} M_3^\circ S_3$$

$$\left.\begin{array}{l} F_{13} S_1 M_1^\circ + F_{23} S_2 M_2^\circ = M_3^\circ S_3 \\ F_{13} S_1 = F_{31} S_3 \quad ; \quad F_{23} S_2 = F_{32} S_3 \end{array}\right\} \rightarrow F_{31} M_1^\circ + F_{32} M_2^\circ = M_3^\circ$$

$$T_3 = (F_{31} T_1^4 + F_{32} T_2^4)^{1/4}$$

3) $\boxed{\text{Surface } S_3 \text{ n'est pas noire, } \varepsilon_3 = 0.9}$

$$\alpha_3 = \varepsilon_3$$

<u>bilan d'énergie :</u>

$$\Phi_{3\,\text{absorbé}} = \Phi_{3\,\text{émis}}$$

$$\cancel{\alpha_3} \left(F_{13} S_1 \underbrace{\cancel{\varepsilon_1}}_{1 \text{ corps noir}} M_1^\circ + F_{23} S_2 \underbrace{\cancel{\varepsilon_2}}_{1 \text{ corps noir}} M_2^\circ \right) = S_3 \cancel{\varepsilon_3} M_3^\circ$$

$$\alpha_3 = \varepsilon_3$$

$$F_{13} S_1 = F_{31} S_3 \;;\; F_{23} S_2 = F_{32} S_3$$

$$F_{31} \cancel{S_3} M_1^\circ + F_{32} \cancel{S_3} M_2^\circ = \cancel{S_3} M_3^\circ$$

$$\underset{1/2}{F_{31}} M_1^\circ + \underset{1/2}{F_{32}} M_2^\circ = M_3^\circ$$

$$\boxed{T_3 = \left(F_{31} T_1^4 + F_{32} T_2^4 \right)^{1/4}}$$

<u>Analogie électrique</u>

Surface 3 est en équilibre thermique, T_3 varie en fonction de T_1 (fixe) et T_2 (fixe).

$$\Rightarrow \Phi_{3\,\text{net}} = \underbrace{\varepsilon M_3^\circ S_3}_{\text{émis}} - \underbrace{\alpha E_3 S_3}_{\text{absorbé}} = 0$$

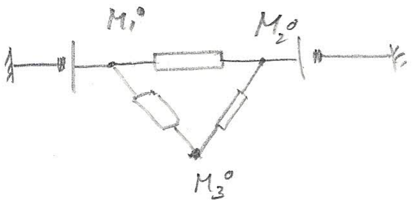
$$\Phi_{3\,\text{net}} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \left(M_3^\circ - J_3 \right) S_3 = 0 \Longrightarrow M_3^\circ = J_3$$ → même schéma électrique

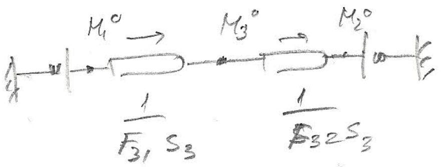
→ $\boxed{\text{même résultat}}$

4) $\boxed{\text{Face inférieure de } S_3 \text{ parfaitement réfléchissante}}$

$\Rightarrow$ échange seulement avec la voûte céleste

$\Rightarrow \boxed{T_3 = T_1}$





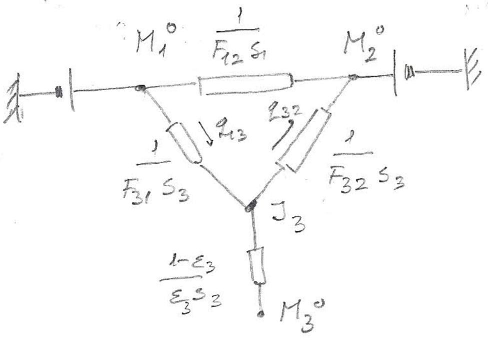
$$\begin{array}{cc} & M_3^\circ \\ q_{13} & \multirow{2}{*}{$A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$} \\ q_{32} & \end{array} \qquad G = \begin{bmatrix} F_{31} & 0 \\ 0 & F_{32} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} M_1^\circ \\ -M_2^\circ \end{bmatrix}$$

$$f = [\ 0\ ]$$

$$M_3^\circ = (A^T G A)^{-1}(A^T G b + f) = (A^T G A)^{-1} A^T G b$$

Avec: $F_{31} = \frac{1}{2}$ $\quad F_{32} = \frac{1}{2}$ $\quad M_1^\circ = \sigma T_1^4 = \sigma \cdot 293^4$ $\quad M_2^\circ = \sigma \cdot T_2^4 = \sigma \cdot 288^4$

$M_3^\circ = \sigma \cdot 7{,}1249 \cdot 10^9$ $\qquad T_3 = \frac{1}{\sigma}\sqrt[4]{M_3} = 290{,}53\ K = 17{,}5\,°C$



le même problème comme si $\varepsilon = 1$.