RAYONNEMENT : Problème introductif

2) Le rayonnement solaire est reçu normalement sur un disque plat. Calculer la température d'équilibre du disque dans les huit cas suivants :

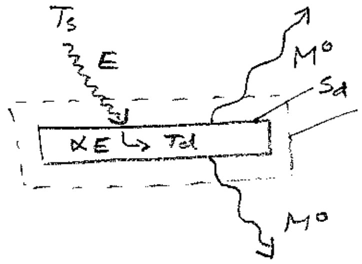
a) les deux faces du disque sont noires.
b) les deux faces sont grises (même valeur du coefficient d'absorption pour les deux faces).
c) la face éclairée est grise et l'autre parfaitement réfléchissante.
d) la face éclairée est parfaitement réfléchissante, l'autre face est grise.
e) les deux faces sont parfaitement réfléchissantes.
f) le disque est remplacé par une sphère noire (supposée être la terre)
g) les deux faces sont noires pour un petit intervalle de longueur d'onde autour de $\lambda = 0{,}6\mu$. Pour tout le reste du spectre les deux faces du disque sont parfaitement réfléchissantes.
h) les deux faces sont noires pour un petit intervalle de longueur d'onde autour de $\lambda = 8\mu$ Pour tout les reste du spectre les deux faces du disque sont parfaitement réfléchissantes.

Rayonnement solaire reçu normalement sur un disque plat

le disque n'est pas transparent $\Rightarrow \tau = 0$

$E = 700\ W/m^2$; $T_a = 0K$ (pas d'autre rayonnement que du soleil)

a) les deux faces du disque sont noires $\hookrightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \rho = 0$



$\Phi_e = \Phi_s$

flux entré — flux sorti

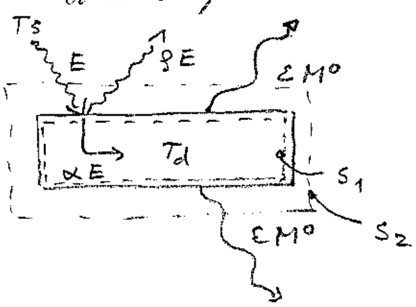
$\cancel{S_d} E = 2 \cdot \cancel{S_d} M^\circ$; $M^\circ \hookrightarrow \sigma T_d^4$

$\Rightarrow E = 2 \sigma T_d^4$

$T_d = \left(\frac{E}{2\sigma}\right)^{1/4}$

$E = 700 \frac{W}{m^2}$ $\quad \sigma = 5{,}68 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ $\Rightarrow T_d = 280K$

b) les deux faces sont grises avec le même coefficient d'absorption α.



$\alpha + \underbrace{\tau}_{0} + \rho = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - \rho$

$\alpha = \varepsilon$ (loi de Kirchhoff)

<u>bilan sur la surface S_1</u>

S_1: $\Phi_e = \Phi_s$

$$\left.\begin{array}{l} \cancel{S_d} \cdot \alpha E = 2 \cancel{S_d}\, \varepsilon M^\circ \\ \alpha = \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow E = 2M^\circ \quad E = 2\sigma T_d^4 \Rightarrow T_d = \left(\frac{E}{2\sigma}\right)^{1/4}$$

<u>bilan sur la surface S_2</u>

S_2: $\Phi_e = \Phi_s$ (flux entré = flux sorti)

$E \cdot \cancel{S_d} = \rho E \cdot \cancel{S_d} + 2 \varepsilon M^\circ \cdot \cancel{S_d}$

$(1-\rho) E = 2 \varepsilon M^\circ$

$\alpha E = 2 \varepsilon M^\circ \Rightarrow T_d = \left(\frac{E}{2\sigma}\right)^{1/4} = 280K$

c) la face éclairée est grise et l'autre parfaitement réfléchissante

$\alpha < 1$

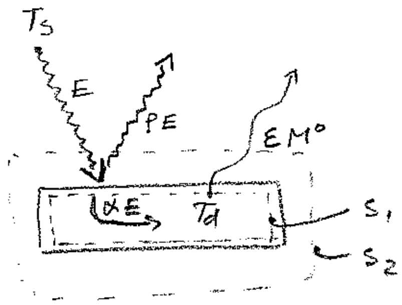
$\alpha + \cancel{\tau} + \rho = 1$, $\tau = 0$

$\rho = 1$

$\Rightarrow \alpha + \tau + \rho = 1$

$\Rightarrow \alpha = 0$

Kirchhoff $\Longrightarrow \varepsilon = 0$



bilan sur S_2 : $\Phi_e = \Phi_s$

$$E \cdot S_d = \rho E \cdot S_d + \varepsilon M^\circ \cdot S_d$$

$$(1-\rho) E = \varepsilon M^\circ$$

$$\alpha E = \varepsilon M^\circ$$

$$\alpha E = \varepsilon \sigma T_d^4 \Longrightarrow \boxed{T_d = \left(\frac{E}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{700}{5.68 \cdot 10^{-8}}\right)^{1/4} = 333\ K}$$

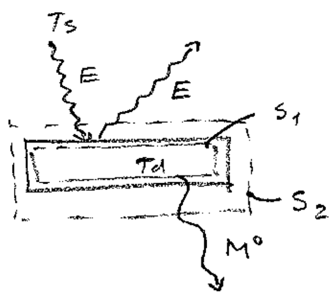
$$\alpha = \varepsilon$$

bilan sur S_1 : $\Phi_e = \Phi_s$

$$\alpha E S_d = \varepsilon M^\circ S_d \Longrightarrow \boxed{T_d = \left(\frac{E}{\sigma}\right)^{1/4} = 333\ K}$$

d) la face éclairée est parfaitement réfléchissante, l'autre grise

$\Longrightarrow \rho_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = 0$, $0 < \varepsilon_2 < 1$



bilan sur S_1 : pas de flux reçu $\Phi_e = 0$

$$\Phi_e = \Phi_s$$

$$0 = \varepsilon_2 M^\circ \cdot S_d$$

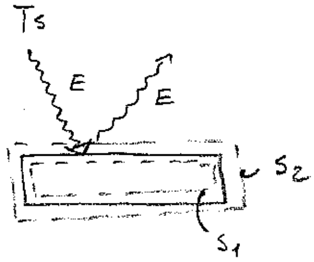
$$0 = \varepsilon_2 \sigma T_d^4 \cdot S_d \Longrightarrow \boxed{T_d = 0\ K}$$

bilan sur S_2 : $\Phi_e = \Phi_s$

$$\cancel{E S_d} = \cancel{E S_d} + M^\circ S_d \Longrightarrow M^\circ S_d = 0 \Longrightarrow \boxed{T_d = 0\ K}$$

e) les deux faces sont $\underbrace{\text{parfaitement réfléchissantes}}$

$$\Rightarrow \rho = 1 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0$$



bilan sur S_1:

$$\Phi_e = \Phi_s \qquad \Phi_e = \alpha E S_d = 0$$

$$\Phi_s = \varepsilon M^\circ = \varepsilon \sigma T_d^4$$

$$\varepsilon = 0 \Rightarrow \forall T_d \; ; \; \Phi_s = 0$$

$\Rightarrow T_d$ valeur indépendante du rayonnement

bilan sur S_2:

$$\Phi_e = \Phi_s$$

$$E \cdot S_d = \rho E \cdot S_d + 2 \varepsilon M^\circ S_d$$

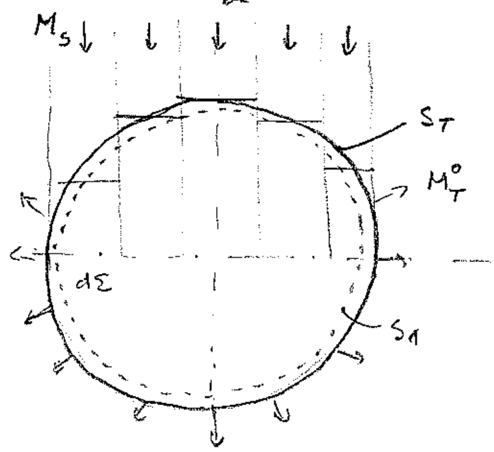
$\rho = 1$

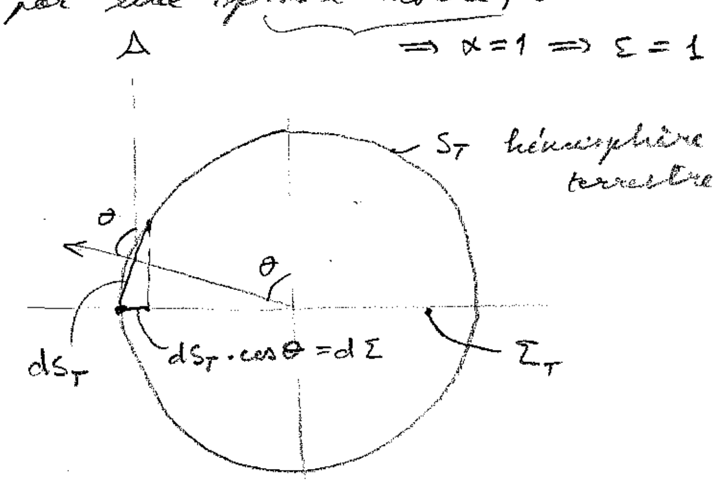
$$\Rightarrow 2 \varepsilon M^\circ = 0$$

$\varepsilon = 0 \Rightarrow T_d$ indépendante

f) le disque est remplacé par une $\underbrace{\text{sphère noire}}$, la terre

$$\Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \varepsilon = 1$$





bilan sur S_1: $\Phi_e = \Phi_s$

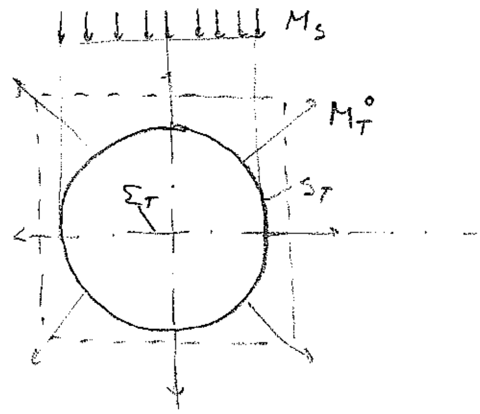
$$\Phi_e = \int_{S_T} M_S \cdot dS_T \cdot \cos\theta = M_S \int_{S_T} dS_T \cos\theta = M_S \int_{\Sigma_T} d\Sigma_T = M_S \cdot \Sigma_T = M_S \cdot \pi R_T^2$$

$$\Phi_s = 2 \cdot M_T^\circ \cdot S_T = 2 M_T^\circ \cdot 2\pi R_T^2$$

↳ hémisphère terrestre

$$\Rightarrow M_S \cdot \pi R_T^2 = M_T^\circ \cdot 4\pi R_T^2$$

$$\Rightarrow 4 \sigma T_T^4 = M_S \Rightarrow \boxed{T_T = \left(\frac{M_S}{4\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{1044 \frac{W}{m^2}}{4 \cdot 5{,}68 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K}}\right)^{1/4} = 260.7\,K}$$



$$\Phi_e = \Phi_s$$

$$\Phi_e = M_s \cdot \Sigma_T = M_s \cdot \pi R_T^2$$

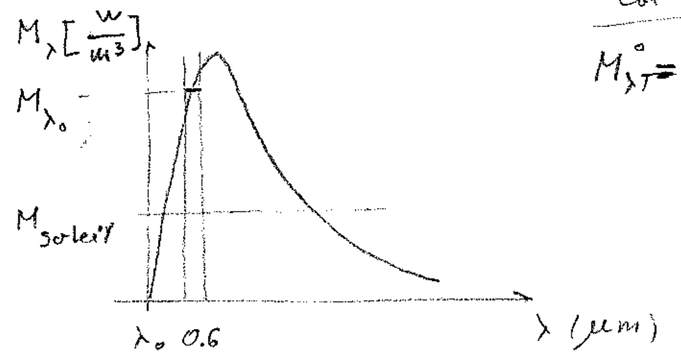
$$\Phi_s = 2 S_T \cdot M_T^\circ = 2 \cdot \frac{4\pi R_T^2}{2} \cdot M_T^\circ$$

$$\Rightarrow M_s \cancel{\pi} \cancel{R_T^2} = 4\cancel{\pi} \cancel{R_T^2} \cdot M_T^\circ$$

$$M_s = 4 \sigma T_T^4 \Rightarrow T_T = \left(\frac{M_s}{4\sigma}\right)^{1/4}$$

---

g) les deux faces sont noires pour un petit intervalle autour de $\lambda = 0.6\,\mu m$ et parfaitement réfléchissantes pour le reste du spectre



Loi de Plank:

$$M^\circ_{\lambda T} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} \quad [W m^{-3}]$$

$$c_1 = 3.74 \cdot 10^{-16}\ W \cdot m^2$$

$$c_2 = 1.4 \cdot 10^{-2}\ m \cdot K$$

Emittance monochromatique du soleil:

$\lambda = 0.6\,\mu m$
$T_s = 5800\ K$

$$\Rightarrow M^\circ_{\lambda T_s} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T_s}\right) - 1} \quad \left[\frac{W}{m^3}\right]$$

Emittance du soleil dans l'intervalle $(\lambda_1; \lambda_2)$

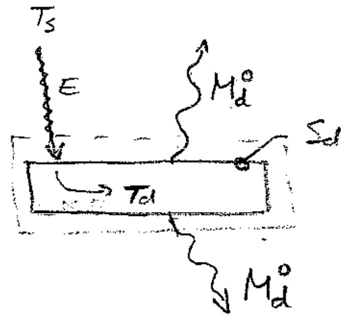
$$M^\circ_{\lambda_1-\lambda_2, T_s} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M^\circ_{\lambda T_s} \cdot d\lambda \simeq M^\circ_{\lambda T_s} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

eclairement du disque par le soleil

$$E_\lambda = M^\circ_{\lambda_1-\lambda_2, T} \cdot \theta^2 = M^\circ_{\lambda T_s} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot \theta^2 \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

emittance du disque, à la température T_d et longueur d'onde λ

$$M^\circ_{\lambda, T_d} = \frac{c_1 \lambda^{-5}}{\exp\left(\frac{c_2}{\lambda T_d}\right) - 1} \quad \left[\frac{W}{m^3}\right]$$



Bilan du disque : $\Phi_e = \Phi_s$

$$E_\lambda \cdot \cancel{S_d} = M^\circ_{\lambda\, T_d} \cdot 2\, \cancel{S_d}$$

$$M^\circ_{\lambda_1-\lambda_2, T_s} \cdot \theta^2 = 2\, M_{\lambda_1-\lambda_2, T_d}$$

$$M^\circ_{\lambda, T_s} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)\, \theta^2 = 2\, M_{\lambda, T_d} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$\frac{\cancel{C_1 \lambda^{-5}}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T_s}\right) - 1}\, \theta^2 = 2\, \frac{\cancel{C_1 \lambda^{-5}}}{\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T_d}\right) - 1}$$

$$\theta^2 \left(\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T_d}\right) - 1 \right) = 2 \left(\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T_s}\right) - 1 \right)$$

$$\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T_d}\right) = \frac{2}{\theta^2} \left(\exp \frac{C_2}{\lambda T_s} - 1 \right) + 1$$

$$\frac{C_2}{\lambda T_d} = \ln \left[\frac{2}{\theta^2} \left(\exp \frac{C_2}{\lambda T_s} - 1 \right) + 1 \right]$$

$$\boxed{T_d = \frac{C_2}{\lambda \ln \left[\frac{2}{\theta^2} \left(\exp \frac{C_2}{\lambda T_s} - 1 \right) + 1 \right]}}$$

avec :

$C_2 = 1{,}4 \cdot 10^{-2}$ m K

$\lambda = 0.6\ \mu m = 6 \cdot 10^{-7}$ m

$\theta = 16' = \frac{16}{60} \cdot \frac{\pi}{180}$

$T_s = 5800$ K

$\Rightarrow T_d = 1511$ K

f) mêmes conditions mais $\lambda = 8\,\mu m$

$\Rightarrow T_d = 168$ K