TREMPE D'UNE BILLE METALLIQUE (Régime variable)

On considère un petit objet homogène (bille) qui est à une température uniforme T_0. Cet objet est brutalement immergé dans un fluide qui reste à une température uniforme et constante T_f. Comme la conductivité thermique λ est très grande, la température peut être considérée à tout instant comme homogène dans l'ensemble du solide.

Donner l'évolution de la température T(t) de la bille.

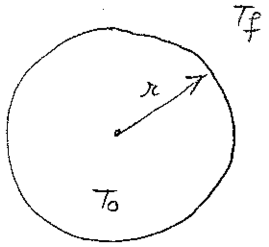
Au bout de combien de temps, atteint-on pratiquement l'équilibre thermique à 1/10 °C prés.

<u>Application numérique:</u>
Conductivité thermique $\lambda = 100$ W/m.°C

Coefficient d'échange h = 100 W/m².°C

Masse volumique $\rho = 7500$ kg /m^3
Chaleur massique c = 1000 J/kg °C
Rayon de la bille r = 0,01 m
$T_0 = 80$°C
$T_f = 20$°C

Trempe d'une bille métallique (régime variable)



Donner l'évolution dans le temps de la température T de la bille (T uniforme à l'intérieur)

T_0 température initiale

T_f température finale

$$\rho c V \frac{dT}{dt} = -hS(T - T_f)$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hS}{\rho c V}(T - T_f)$$

séparation des variables :

$$\frac{dT}{T - T_f} = -\frac{hS}{\rho c V} \cdot dt$$

normalisation

$$\theta \equiv \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} T - T_f &= (T_0 - T_f)\cdot\theta \\ dT &= (T_0 - T_f)\cdot d\theta \end{aligned}\right\} \frac{dT}{T - T_f} = \frac{d\theta}{\theta}$$

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hS}{\rho c V} \cdot dt \Longrightarrow \int \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hS}{\rho c V}\int dt$$

$$\ln|\theta| + C_1 = -\frac{hS}{\rho c V}\cdot t + C_2$$

$$\ln|\theta| = -\frac{hS}{\rho c V}\cdot t + K$$

$$\theta = K \cdot e^{-\frac{hS}{\rho c V}\cdot t}$$

$$t = 0;\ T = T_0 \Longrightarrow \theta = 1 \Longrightarrow K = 1$$

$$\boxed{T = (T_0 - T_f)\cdot\theta + T_f = (T_0 - T_f)\cdot e^{-\frac{hS}{\rho c V}\cdot t} + T_f}$$

$$\left.\begin{aligned} S &= 4\pi r^2 = 4\pi\cdot 0.01^2\ m^2 \\ h &= 100\ W/m^2K \\ \rho &= 7500\ kg/m^3 \\ c &= 1000\ J/kg.K \\ V &= \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4\pi\cdot 0.01^3}{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{hS}{\rho c V} = \frac{3\cdot 10^2\cdot 4\pi(10^{-2})^2}{7500\cdot 10^3\cdot 4\pi(10^{-2})^3} = \frac{3}{750} = \frac{1}{250} =$$

$$= 4\cdot 10^{-3}\ s^{-1}$$

Le temps pour l'équilibre thermique à 0.1°C près

$$T - T_f = 0.1$$

$$T_0 - T_f = 80 - 20 \implies \theta = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \frac{0.1}{80-20} = \frac{1}{600}$$

$$\theta = e^{-\frac{hS}{\rho c V} t} = \frac{1}{600}$$

$$-\frac{hS}{\rho c V} \cdot t = \ln \frac{1}{600}$$

$$t = -\frac{\rho c V}{hS} \cdot \ln \frac{1}{600} = 1600 \text{ s}$$