ISOLATION THERMIQUE DE TUBES CYLINDRIQUES

De la vapeur d'eau à la température T_{1m} s'écoule dans un tube (conductivité du matériau λ) de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2.
Ce tube traverse une salle dont la température moyenne est prise égale à T_{2m}

1) on évaluera le flux de chaleur ϕ qui passe de l'intérieur à l'extérieur du tube pour une longueur l de celui-ci. Les coefficients d'échange superficiel sont désignés par les lettres h_1 (coefficients vapeur d'eau-tube) et h_2 (coefficient tube-air ambiant).
2) Les pertes de chaleur calculées précédemment étant jugées trop importantes on décide de calorifuger la conduite sur toute la longueur l. A cet effet on recouvre le tube d'un manchon de rayon intérieur r_2 et de rayon extérieur r_3 (conductibilité du matériau isolant employé λ'). On suppose que le nouveau coefficient d'échange superficiel calorifuge-air ambiant est le même que le coefficient tube air ambiant, soit h_2. On demande d'évaluer le nouveau flux de chaleur ϕ' traversant le tube et son manchon isolant pour la longueur l.
3) Evaluer l'accroissement ΔR de la résistance thermique R dû au calorifugeage de la conduite.
4) Etudier les variations de ΔR en fonction de r_3 lorsque celui-ci varie de r_2 à l'infini. On utilisera la variable secondaire x :

   $x = \dfrac{r_2}{r_3}$ $0 < x < 1$. On posera $\alpha = \dfrac{r_2\, h_2}{\lambda'}$

   Discuter les différents cas obtenus en fonction des valeurs de α.

5) On demande de déterminer la valeur de l'épaisseur de l'isolant pour laquelle les pertes calorifiques sont les mêmes qu'en l'absence du calorifuge. On fera le calcul dans le cas suivant :

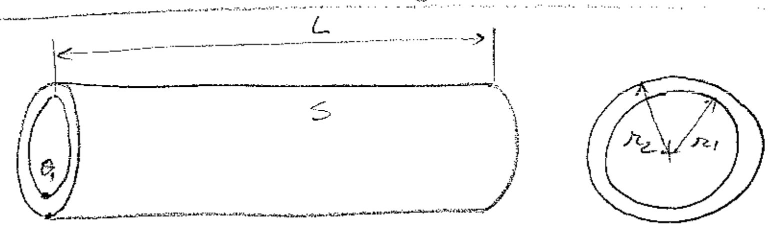
Le calorifuge est de l'amiante en fibres de conductibilité λ'=0,20 W/m.°C. Le coefficient d'échange superficiel amiante–air ambiant est h_2 = 7 W/m².°C. le rayon extérieur de la conduite est r_2 = 25 millimètres.

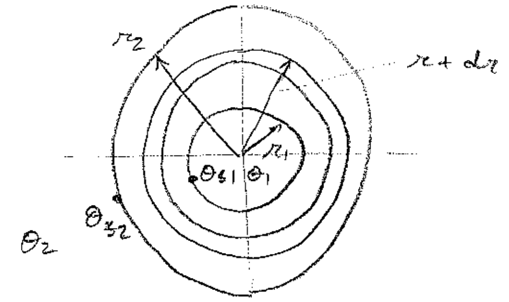
Pour résoudre cette question on se servira de la fonction $y = \dfrac{x-1}{\ln x}$ dont quelques valeurs numériques sont données ci-après :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\dfrac{x-1}{\ln x}$	0	0,391	0,498	0,582	0,656	0,721	0,785	0,844	0,902	0,956	1

7. Isolation thermique des tubes cylindrique

page 148





les isothermes sont des cylindres, le gradient de la température est dans la direction des rayons. Le flux ϕ est constant à travers toute cylindre de rayon r

1)

$$\phi = -\lambda S \frac{d\theta}{dr} \qquad S = 2\pi r \cdot L$$

$$\Rightarrow \phi = -\lambda \cdot 2\pi L \cdot r \frac{d\theta}{dr}$$

séparation des variables:

$$d\theta = \frac{\phi}{-\lambda \cdot 2\pi L} r \frac{d\theta}{dr}$$

$$\int_{\theta_{S1}}^{\theta_{S2}} d\theta = -\frac{\phi}{\lambda 2\pi L} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

$$\theta_{S2} - \theta_{S1} = -\frac{\phi}{\lambda 2\pi L} \cdot (\ln r_2 - \ln r_1) = -\frac{\phi}{\lambda 2\pi L} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\phi = \frac{\lambda 2\pi L}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (\theta_{S1} - \theta_{S2})$$

$$r_{ml} = \frac{r_2 - r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{e}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \qquad \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{e}{r_{ml}}$$

$$\phi = \frac{\theta_{S1} - \theta_{S2}}{\frac{e}{\lambda}} \cdot 2\pi r_{ml} \cdot L = \frac{\theta_{S1} - \theta_{S2}}{\frac{e}{\lambda}} S_{ml}$$

Note: épaisseur faible du tube $\Rightarrow S_{ml} = 2\pi r_{ml} \simeq S_m = \frac{S_1 + S_2}{2}$

$$= 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2}$$

$$\phi = \frac{\theta_1 - \theta_{s1}}{\frac{1}{h_1}} S_1 = \frac{\theta_{s1} - \theta_{s2}}{\frac{e}{\lambda}} S_{ml} = \frac{\theta_{s2} - \theta_2}{\frac{1}{h_2}} S_2$$

$$S_1 = 2\pi r_1 L \qquad S_{ml} = 2\pi r_{ml} \cdot L \qquad S_2 = 2\pi r_2 L$$

$$r_{ml} = \frac{r_2 - r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\phi_\ell \equiv \frac{\phi}{L} = \frac{\theta_1 - \theta_{s1}}{\frac{1}{h_1}} \cdot 2\pi r_1 = \frac{\theta_{s1} - \theta_{s2}}{\frac{e}{\lambda}} 2\pi r_{ml} = \frac{\theta_{s2} - \theta_1}{\frac{1}{h_2}} 2\pi r_2$$

$$\phi_\ell = \frac{\theta_1 - \theta_{s1}}{\frac{1}{2\pi r_1 h_1}} = \frac{\theta_{s1} - \theta_{s2}}{\frac{e}{2\pi r_{ml} \cdot \lambda}} = \frac{\theta_{s2} - \theta_1}{\frac{1}{2\pi r_2 h_2}}$$

$$\boxed{\phi_\ell = 2\pi \frac{\theta_1 - \theta_2}{\frac{1}{r_1 h_1} + \frac{e}{r_{ml}\lambda} + \frac{1}{r_2 h_2}} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\frac{1}{2\pi r_1 h_1} + \frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi r_2 h_2}}}$$

2

$$\boxed{\phi_\ell = 2\pi \frac{\theta_1 - \theta_2}{\frac{1}{r_1 h_1} + \frac{e}{r_{ml}\lambda} + \frac{e'}{r'_{ml}\lambda'} + \frac{1}{r_3 h_2}}}$$

$$r_{ml} = \frac{r_2 - r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \qquad r'_{ml} = \frac{r_3 - r_2}{\ln \frac{r_3}{r_2}} \qquad \frac{e}{r_{ml}} = \ln \frac{r_2}{r_1} \qquad \frac{e'}{r'_{ml}} = \frac{\ln r_3}{\ln r_2}$$

(3)

$$\Delta R = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{\lambda'}\ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{r_3 h_2} - \frac{1}{r_2 h_2}\right)$$

$$\frac{1}{h_2}\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{r_2 h_2}\cdot\left(\frac{r_2}{r_3} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\lambda'}\left(-\ln\frac{r_2}{r_3} + \frac{\lambda}{r_2 h_2}\left(\frac{r_2}{r_3} - 1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\lambda'}\left(-\ln x + \frac{1}{\alpha}(x-1)\right) \qquad x = \frac{r_2}{r_3} \qquad \alpha = \frac{r_2 h_2}{\lambda'}$$

(4) $x = \frac{r_2}{r_3}$ $\qquad r_3 = r_2 \Rightarrow x = 1 \qquad x \in [0, 1[$

$r_3 = \infty \Rightarrow x = 0$

$$\frac{d(\Delta R)}{dx} = \frac{1}{2\pi\lambda'}\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$\frac{d(\Delta R)}{dx} = 0$ pour $x = \alpha$

$x < \alpha$ et $x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \frac{d(\Delta R)}{dx} < 0$

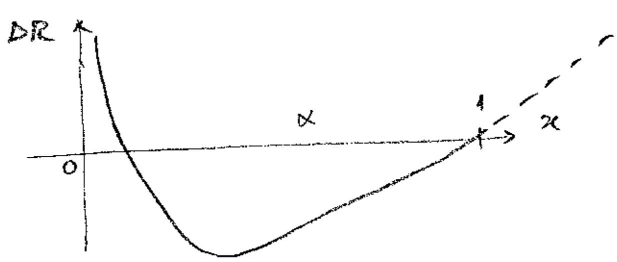
$x > \alpha$ et $\alpha < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{d(\Delta R)}{dx} > 0$

$\lim_{x\to 0} \Delta R = \infty$

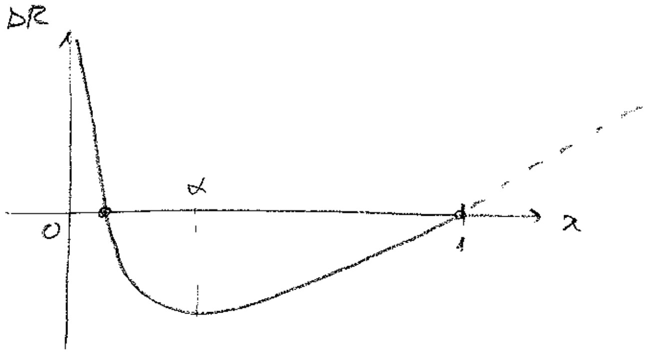
$\lim_{x\to 1} \Delta R = 0$

$\lim_{x\to \infty} \Delta R = \infty$

x	0		α		1
r_3	∞		$\frac{\lambda'}{h_2}$		r_2
ΔR	∞	$\searrow$	$\frac{1}{2\pi\lambda'}\left(-\ln\alpha + \frac{\alpha-1}{\alpha}\right) < 0$	$\nearrow$	0



(5) r_3 pour que $\Delta R = 0$, comme s'il n'avait pas d'isolant.



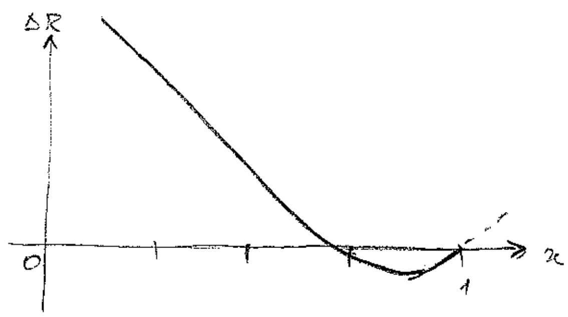
$$\Delta R = 0 \implies \frac{1}{\alpha}(x-1) = \ln x$$

$$\frac{x-1}{\ln x} = \alpha = \frac{r_2 h_2}{\lambda'} = \frac{0.025 \times 7}{0.2} = 0.875 \implies x \simeq 0.75$$

$$\implies \frac{r_2}{r_3} = 0.75 \implies r_3 = \frac{r_2}{0.75} = 0.033 \text{ m}$$

$e = r_3 - r_2 = 0.033 - 0.025 = 0.008$ m $= 8$ mm épaisseur

$$\Delta R_{max} = \frac{1}{2\pi\lambda'}\left(-\ln\alpha + \frac{\alpha - 1}{\alpha}\right) = -0.0074 \ \frac{m}{W}$$



Coordonnées cylindriques

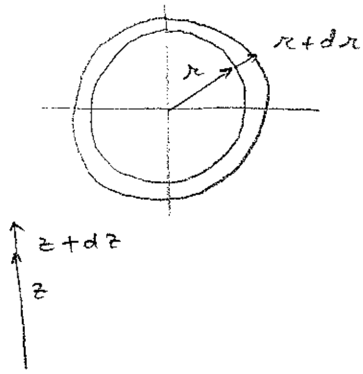
Differential length en coordonnées cylindriques:

Distance entre deux points voisines:

$P(r, \varphi, z)$ et $Q(r+dr, \varphi + d\phi, z+dz)$

dans la direction r:

$$d\vec{l} = \hat{r}\, dr$$



$\hat{r}$ vect. unitaire dans la direction $\hat{r}$

$\hat{z}$ idem dans z

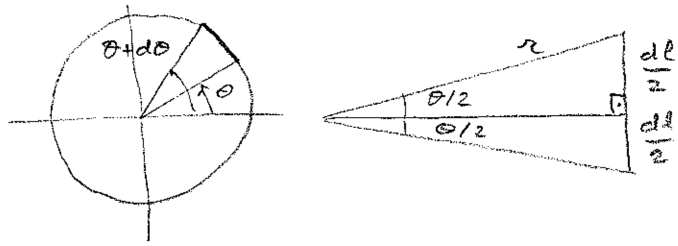
dans la direction z:

$$d\vec{l} = \hat{z}\, dz$$

dans la direction θ:

$$\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \frac{dl/2}{r}$$

$$\frac{d\theta}{2} = \frac{dl}{2r}$$



$$dl = r \cdot d\theta$$

$$d\vec{l} = r \cdot d\theta \cdot \hat{\theta}$$

$$\Longrightarrow d\vec{l} = dr \cdot \hat{r} + r\, d\theta \cdot \hat{\theta} + dz \cdot \hat{z}$$

Note: $d\theta$ est un angle differentiel, pas une longueur diff.

$r\,d\theta$ est la longuer diff. obtenue en faisant une rotation d'angle $d\theta$

Considérons $f(r, \theta, z)$. La variation de la fonction entre les points (r, θ, z) et $(r+dr, \theta+d\theta, z+dz)$ est:

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$df = \vec{\nabla} f \cdot \vec{dl}$$

$$\vec{\nabla} f = (\nabla f)_r \hat{r} + (\nabla f)_\theta \hat{\theta} + (\nabla f)_z \hat{z}$$

longueur diff. coord cylindr.

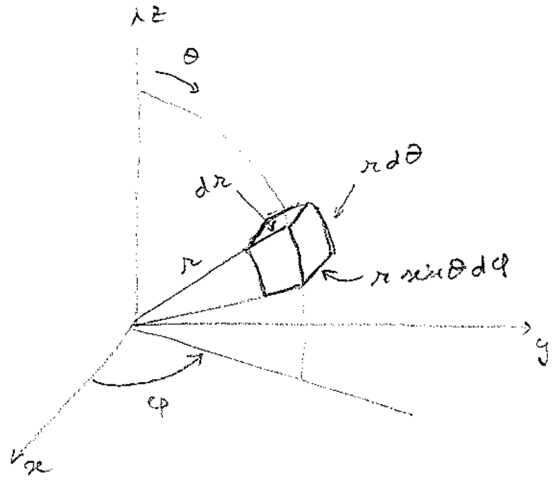
$$df = \left((\nabla f)_r \hat{r} + (\nabla f)_\theta \hat{\theta} + (\nabla f)_z \hat{z}\right) \cdot \left(dr\, \hat{r} + r\, d\theta\, \hat{\theta} + dz\, \hat{z}\right)$$

$$= (\nabla f)_r\, dr + (\nabla f)_\theta\, r\, d\theta + (\nabla f)_z\, dz$$

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \qquad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \qquad (\nabla f)_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}}$$

Coordonnées sphériques



$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta . d\varphi \cdot \hat{\varphi}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{l}$$

$$df = \left((\nabla f)_r \hat{r} + (\nabla f)_\theta \hat{\theta} + (\nabla f)_\varphi \hat{\varphi} \right) \cdot \left(dr\,\hat{r} + r\,d\theta . \hat{\theta} + r\sin\theta . d\varphi . \hat{\varphi} \right)$$

$$= (\nabla f)_r dr + (\nabla f)_\theta r\,d\theta + (\nabla f)_\varphi r \sin\theta . d\varphi$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$\Rightarrow (\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r} \quad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} \quad (\nabla f)_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\boxed{\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}}$$