MUR EN REGIME PERMANENT AVEC CONDUCTIVITE VARIABLE

Pour de nombreux matériaux soumis à des écarts de température importants, il faut prendre en compte la variation de la conductivité avec la température. Cette variation est donnée généralement par une loi linéaire

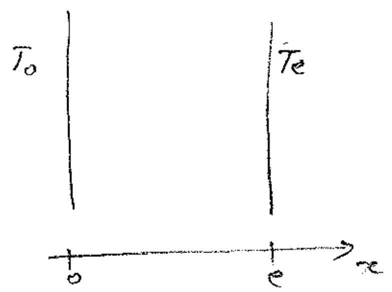
$$\lambda = \lambda_0 (1 + \alpha (T - T_0))$$

On considère une plaque d'épaisseur e soumise sur ses deux faces à un contact parfait avec deux milieux de températures $T(0) = T_0 \quad T(e) = T_e$

En supposant que la conductivité du matériau constitutif de la plaque varie linéairement avec la température, déterminer la répartition interne des températures, ainsi que la valeur du flux de chaleur traversant cette paroi.

<u>A.N</u>. $e = 5$ cm $\quad \lambda_0 = 1$ W/m.K $\quad \alpha = 2.10^{-3}$ °C^{-1}
$T_0 = 50$°C $\quad T_e = 550$°C.

Mur en régime permanent avec conduction variable



$\lambda = \lambda_0 (1 + \alpha(T - T_0))$ $\quad \lambda_0 = 1 \frac{W}{mK}$ $\quad \alpha = 2 \cdot 10^{-3} K^{-1}$

$e = 0.05\,m$

$T_0 = 50°C \quad Te = 550°C$

$$\operatorname{div}(\lambda \, \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) + \cancel{P} = \rho C_p \cancel{\frac{\partial T}{\partial t}}$$

sans sources internes — régime permanent

$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = 0 \implies \lambda \operatorname{grad} T = A$ (constant)

$\lambda \frac{dT}{dx} = A$ (unidimensionnel)

$\lambda_0 (1 + \alpha(T - T_0)) \frac{dT}{dx} = A$

$\theta \equiv T - T_0 \implies \frac{d\theta}{dx} = \frac{dT}{dx}$

$\lambda_0 (1 + \alpha\theta) \frac{d\theta}{dx} = A$

séparation des variables:

$\frac{df(x)}{dx} = g(x) \cdot h(f(x))$

$y \equiv f(x) \implies \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$

$\frac{dy}{h(y)} = g(x) \cdot dx \; ; \; \int_{y_1 = f(x_1)}^{y_2 = f(x_2)} \frac{1}{h(y)} \cdot dy = \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx$

séparation des variables:

$\lambda_0 d\theta + \lambda_0 \alpha \theta d\theta = A\,dx$

$\lambda_0 \theta + \lambda_0 \alpha \frac{\theta^2}{2} = A x + B$

$\theta + \frac{\alpha}{2}\theta^2 = \frac{A}{\lambda_0} x + \frac{B}{\lambda_0} \quad ; \quad \theta + \frac{\alpha}{2}\theta^2 = Cx + D$

Aux conditions limites:

$x = 0 \implies T = T_0 \implies \theta = 0 \implies D = 0$

$x = e \implies T = Te \implies \theta = Te - T_0 \implies (Te - T_0) + \frac{\alpha}{2}(Te - T_0)^2 = C \cdot e$

$\implies C = \frac{1}{e}(Te - T_0)\left[1 + \frac{\alpha}{2}(Te - T_0)\right]$

$$\boxed{\theta + \frac{\alpha}{2}\theta^2 = (Te - T_0)\left[1 + \frac{\alpha}{2}(Te - T_0)\right]\frac{x}{e}} \qquad \boxed{\theta + \frac{\alpha}{2}\theta^2 = C \cdot x}$$

$$\boxed{\varphi = -\lambda \cdot \operatorname{grad} T = -A = -C\lambda_0}$$

AN: $C = \frac{1}{0.05}(550 - 50)\left[1 + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{2}(550 - 50)\right] = 15\,000 \; \frac{K}{m}$

$\varphi = -C\lambda_0 = -15000 \; W/m^2$

Distribution de la température

$$\theta + \frac{\alpha}{2}\theta^2 = C \cdot x$$

$$\theta^2 + \frac{2}{\alpha}\theta - Cx = 0$$

$$\theta_{1;2} = -\frac{1}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{2}{\alpha} C \cdot x}$$

$$\theta = -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{2}{\alpha} C \cdot x}$$ une solution avec du sens physique

$$T = \theta + T_0 = \left(-\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{2}{\alpha} C \cdot x}\right) + T_0$$

x [m] 0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
θ [°C] 0	132.4	241.6	336.6	421.9	500
T [°C] 50	182,4	291.6	358.6	471.9	550