MUR EN REGIME PERMANENT AVEC CREATION INTERNE DE CHALEUR

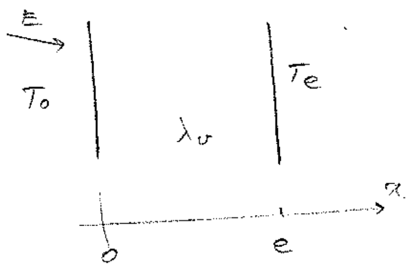
On considère une paroi vitrée d'épaisseur e, et de conductivité thermique constante λ_v séparant deux milieux à température parfaitement régulée $T(0) = T_0$, $T(e) = Te$. Cette paroi supposée infinie dans les deux autres directions reçoit un ensoleillement E dont elle absorbe uniformément une partie fonction de son coefficient d'absorption α.

En régime permanent, déterminer la répartition de température dans la vitre et l'expression de la densité de flux de chaleur traversant la paroi.
La température de la face extérieure est T_0 et celle de l'intérieure T_e.

Calculer la valeur maximum atteinte par la température interne de la vitre, et sa position géométrique.
Vérifier que la somme algébrique du flux sortant par les deux faces est égale au flux absorbé.

A.N.	$T_0 = 10°C$	$T_e = 20°C$	$E = 800\ W/m^2$
	$\alpha = 0,5$	$e = 0,5\ cm$	$\lambda_v = 1\ W/m\ K$

Mur en régime permanent avec création interne de chaleur



$T_0 = 10°C$ $\quad$ $\alpha = 0.5$

$T_e = 20°C$ $\quad$ $e = 0.5$ cm

$E = 800 \frac{W}{m^2}$ $\quad$ $\lambda_v = 1 \frac{W}{m\,K}$

$$\mathrm{div}\,(\underbrace{\lambda\, \mathrm{grad}\, T}) + P = \underbrace{\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t}}_{0} \quad \text{régime stationnaire}$$

$\lambda = ct \rightarrow \lambda \cdot \Delta T$

$$\lambda \cdot \Delta T + P = 0$$

$$\alpha E = \int_0^e P \cdot dx \qquad \alpha E = P \int_0^e dx \qquad \alpha E = eP \implies P = \frac{\alpha E}{e}$$

$$\Delta T \longrightarrow \frac{d^2T}{dx^2} \quad \text{(unidimensionnel)}$$

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\alpha E}{e} = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\alpha E}{e\lambda} \implies \frac{dT}{dx} = -\frac{\alpha E}{e\lambda} \cdot x + a$$

$$\implies T = -\frac{\alpha E}{2e\lambda} \cdot x^2 + a x + b$$

$$T\Big|_{x=0} = T_0 \implies b = T_0$$

$$T\Big|_{x=e} = T_e \implies T_e = -\frac{\alpha E}{2\cancel{e}\lambda} \cdot e^{\cancel{2}} + a \cdot e + T_0$$

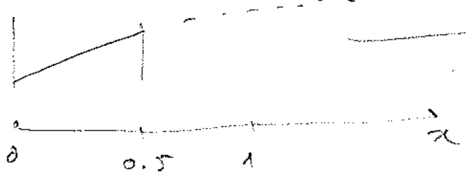
$$\implies a = \frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}$$

$$\implies T = -\frac{\alpha E}{2e\lambda} \cdot x^2 + \left(\frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}\right) \cdot x + T_0$$

$$\varphi = -\lambda \cdot \mathrm{grad}\, T = -\frac{\alpha E}{e} x + a = -\frac{\alpha E}{e} x + \frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda}$$

$$\mathrm{grad}\, T = 0 \implies -\frac{\alpha E}{e} x + \frac{T_e - T_0}{e} + \frac{\alpha E}{2\lambda} = 0 \implies x = \frac{T_e - T_0}{\alpha E} + \frac{e}{2\lambda}$$

$$\boxed{x = \frac{20 - 10}{0.5 \times 800} + \frac{0.5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 1} = 0.0275\ m = 2.75\ cm}$$



$$\varphi = -\lambda \cdot \mathrm{grad}\, T = -\frac{\alpha E}{e} \cdot x + a$$

$$\boxed{\varphi\big|_{x=0} - \varphi\big|_{x=e} = \frac{\alpha E}{e} \cdot x\Big|_{x=e} = \alpha E}$$

$$\varphi = -\lambda \, \mathrm{grad}\, T = -\frac{\alpha E}{e} x + a$$

$$\varphi\Big|_{x=0} - \varphi\Big|_{x=e} = \frac{\alpha E}{e} \cdot x\Big|_{x=e} = \alpha E$$