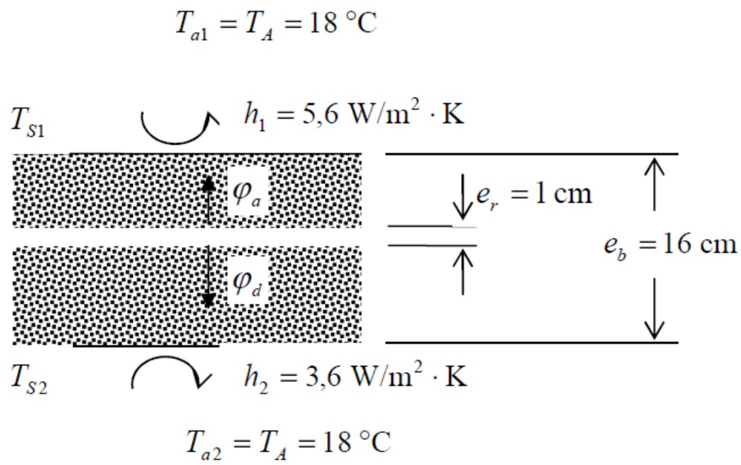
Ex 06 Etude en régime permanant d'un chauffage électrique par plancher

Un système de chauffage électrique par plancher est constitué de câbles électriques chauffants (que l'on pourra assimiler à une plaque de 1 cm d'épaisseur) noyés dans une dalle de béton (épaisseur totale : 16 cm) de conductivité thermique $\lambda = 1{,}2\ \mathrm{W/m \cdot K}$.



Le flux de chaleur par unité de surface crée par le câble électrique, φ, est de 100 W/m² ; ce flux se partage en un flux ascendant, φ_a (chauffage par le plancher), et un flux descendant, φ_d (chauffage par le plafond). Les coefficients d'échange superficiel par convection des surfaces horizontales sont respectivement :

$h_1 = 5{,}6\ \mathrm{W/m^2 \cdot K}$, pour la surface supérieure

$h_2 = 3{,}6\ \mathrm{W/m^2 \cdot K}$, pour la surface inférieure.

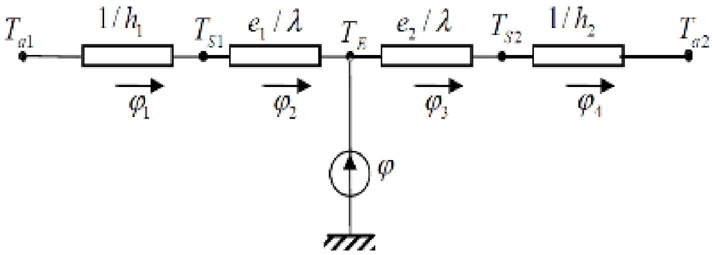
La température T_A de l'air de chaque côté du plancher est de 18 °C ; la température de l'élément chauffant est supposée uniforme et égale à T_E.

1. En négligeant les échanges de chaleur par rayonnement et dans le cas où le plan chauffant est situé au centre du plancher, déterminer :
   - la température de l'élément chauffant, T_E ;
   - les températures superficielles, T_{S1} et T_{S2}.
2. Considérant que la température de surface du plancher, T_{S1}, est trop importante (inconfort thermique), on se propose de déplacer le plan chauffant à une distance x de la surface du plancher pour que la température de surface ne dépasse pas 24°C, $T_{S1} \le 24\ °\mathrm{C}$. Quelle est cette distance x ?
3. La solution obtenue étant aberrante, le local est isolé pour que la puissance dissipée soit inférieure à 100 W/m². Quelle doit être cette puissance pour que la température de surface soit de 24°C, le plan chauffant étant situé au centre du plancher.

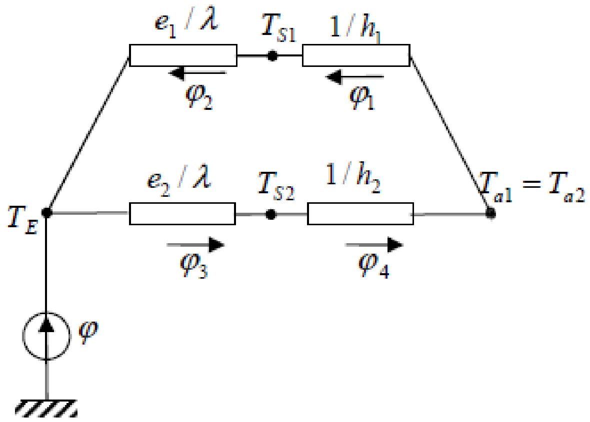
Solution analytique

Système de 3 équations avec 3 inconnues, φ, φ_1, φ_2 :

$$\begin{cases} \varphi_2 = \dfrac{T_{a1} - T_E}{\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{e_1}{\lambda}} \\ \varphi_3 = \dfrac{T_E - T_{a2}}{\dfrac{e_2}{\lambda} + \dfrac{1}{h_2}} \\ \varphi = -\varphi_2 + \varphi_3 \end{cases}$$



où, on remarque que, parce que $T_{a1} = T_{a2} = T_a$, la forme équivalente du circuit consiste en deux résistances en parallèle, chacune formée par deux résistances en série.



$$\varphi = (T_E - T_a)\left(\frac{1}{R_{eq1}} + \frac{1}{R_{eq2}}\right) ;$$

$$R_{eq1} = \frac{1}{h_1} + \frac{e_1}{\lambda_1} ; \; R_{eq2} = \frac{1}{h_2} + \frac{e_2}{\lambda_2}$$

$$T_E = T_a + \varphi \frac{1}{1/R_{eq1} + 1/R_{eq2}} = 32.11 \text{ °C}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{T_a - T_E}{R_{eq1}} = -58.53 \text{ W/m}^2 \; ; \; \varphi_3 = \varphi_4 = \frac{T_E - T_a}{R_{eq2}} = 41.46 \text{ W/m}^2$$

Noter le signe de φ_1.

$$\varphi_2 = \frac{T_{S1} - T_E}{e_1/\lambda} \; ; \; \boxed{T_{S1} = T_E + \varphi_2 \frac{e_1}{\lambda} = 28.45 \text{ °C}}$$

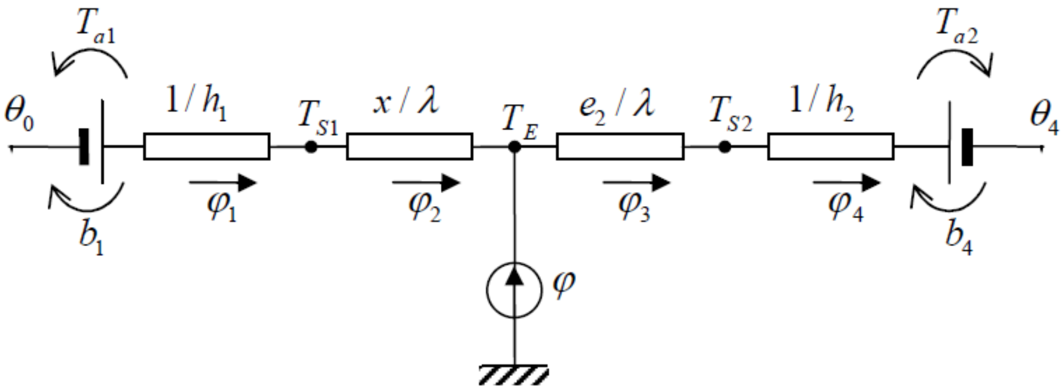
$$\varphi_3 = \frac{T_E - T_{S2}}{e_2/\lambda} \; ; \; \boxed{T_{S2} = T_E - \varphi_3 \frac{e_2}{\lambda} = 29.52 \text{ °C}}$$

2. Problème inverse de dimensionnement : épaisseur pour la que température de surface soit $T_{S1} = 24\ °\mathrm{C}$

Solution analytique

On considère que l'épaisseur de la couche inférieure, e_2, reste constante

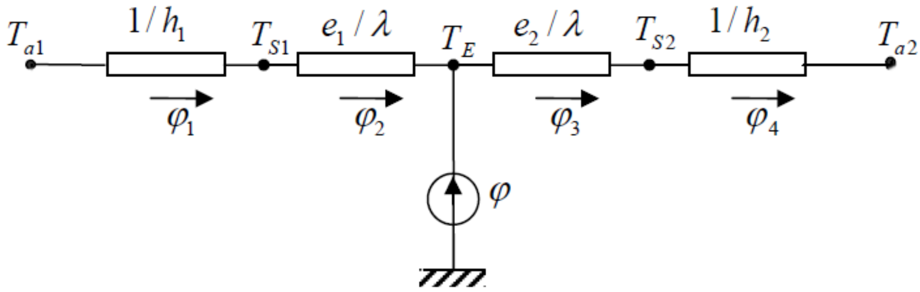
$$T_{S1} = 24\ °\mathrm{C} \ \Rightarrow\ \varphi_1 = \frac{T_{a1} - T_{S1}}{1/h_1} = -33.6\ \mathrm{W/m^2}\ ;\ \varphi_2 = \varphi_1$$



$$\varphi + \varphi_2 = \frac{T_E - T_{a2}}{\dfrac{e_2}{\lambda} + \dfrac{1}{h_2}} \ \Rightarrow\ T_E = T_{a2} + (\varphi + \varphi_2)\left(\frac{e_2}{\lambda} + \frac{1}{h_2}\right) = 40.59\ °\mathrm{C}$$

$$\varphi_2 = \frac{\lambda}{x}(T_{S1} - T_E);\ \Rightarrow \boxed{x = \frac{T_{S1} - T_E}{\varphi_2 / \lambda} = 0.5927\ \mathrm{m}}$$ solution aberrante.

3. Problème inverse de contrôle : calcul flux introduits



$T_{S1} = 24$ °C , $T_{a1} = 18$ °C , $h_1 = 5.6$ W/m² K , il en résulte la densité de flux ascendant :

$$\varphi_1 = \frac{T_{a1} - T_{S1}}{1/h_1} = -33.6 \text{ W/m}^2$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{T_{S1} - T_E}{e_1/\lambda} \Rightarrow T_E = T_{S1} - \varphi_2 \frac{e_1}{\lambda} = 26.10 \text{ °C}$$ température de l'élément chauffant

La densité de lux descendant :

$$\varphi_3 = \frac{T_E - T_{a2}}{e_2/\lambda + 1/h_2} = 23.80 \text{ W/m}^2$$

La densité de flux totale donnée par l'élément chauffant :

$$\boxed{\varphi = -\varphi_2 + \varphi_3 = 57.40 \text{ W/m}^2}$$