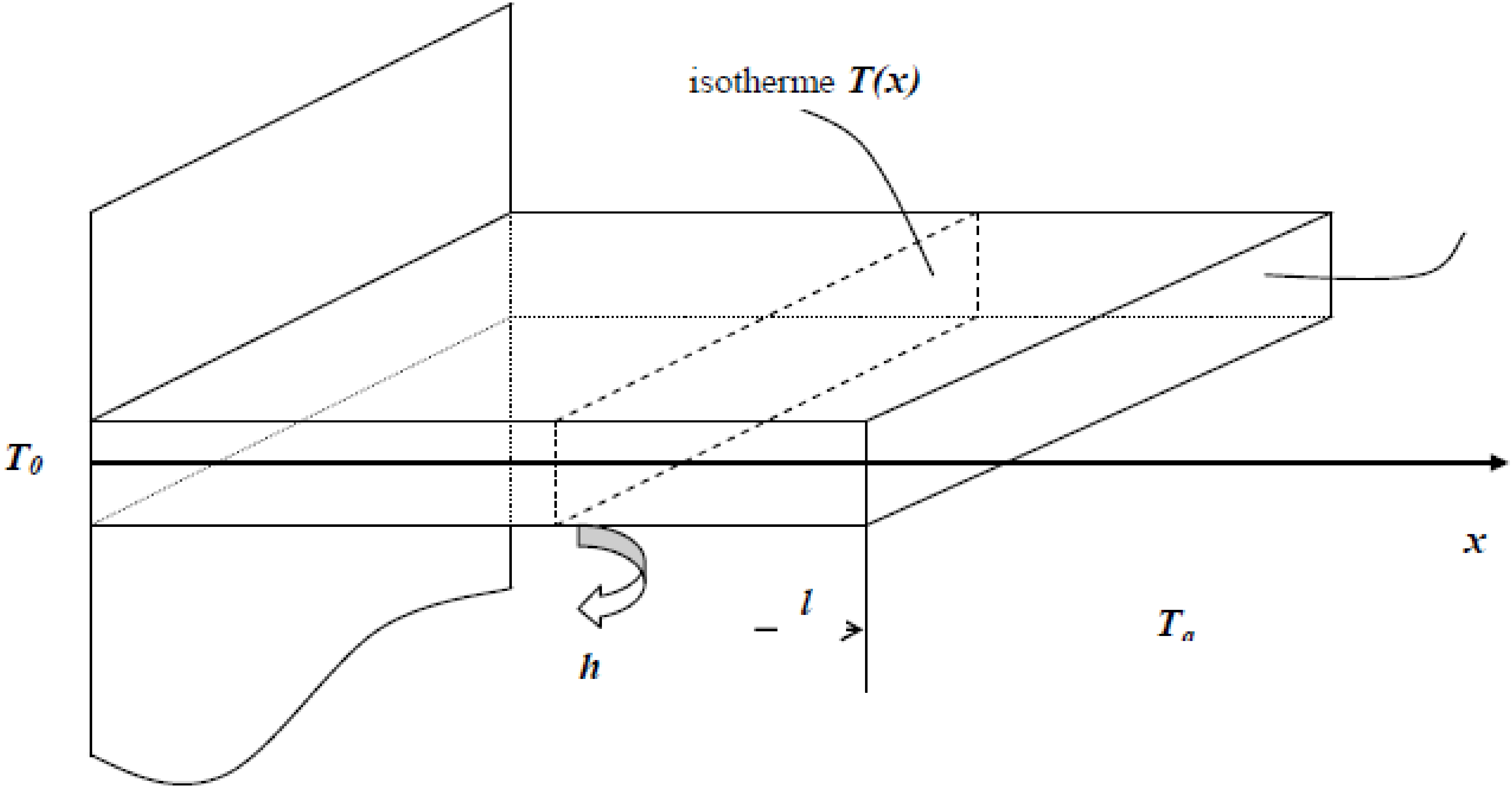
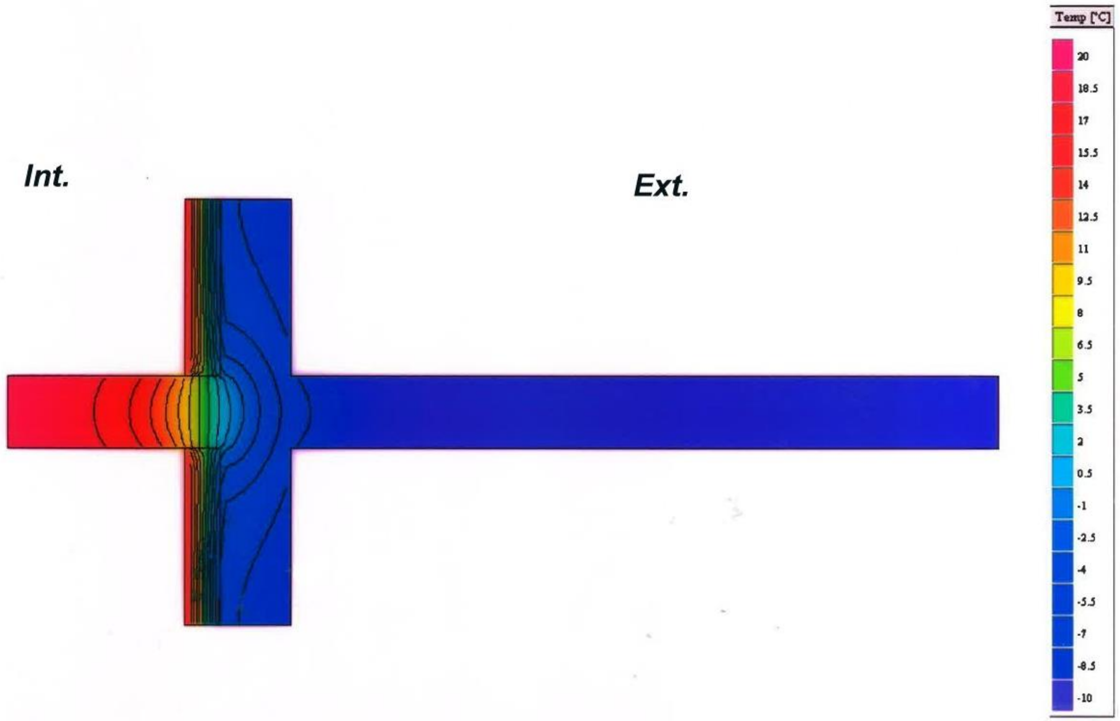
Ailette de refroidissement

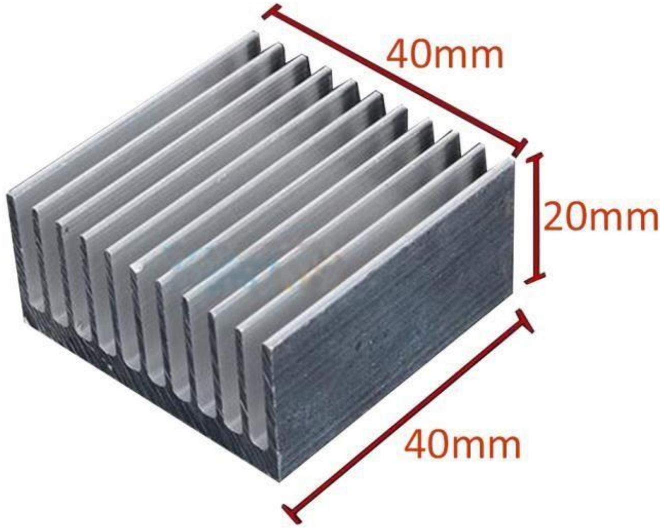
Ex12 Ailette de refroidissement

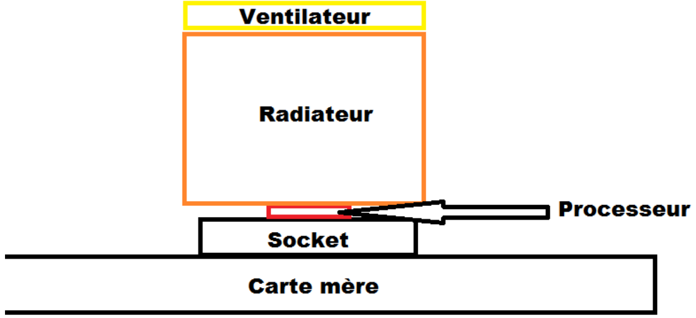
Soit une ailette de refroidissement de section droite, uniformément chauffée à sa base à la température T_0 et placée dans un milieu ambiant à la température T_∞. On suppose que la température est uniquement en fonction de x, donc les isothermes sont planes et perpendiculaires à l'axe x. On note p le périmètre de base, S la section droite, λ la conductivité thermique et h le coefficient d'échange superficiel de l'ailette.



1. Donner la solution générale pour la distribution spatiale de la température $T = f(x)$ en considérant le transfer de chaleur unidimensionel dans la direction x.
2. Verifier la validité de l'hypothèse du transfer unidimensionel.
3. Donner l'expression de la distribution spatiale de la température $T = f(x)$ et de l'efficacité $E = q_0 / q_0^{'}$, où q_0 est le flux évacué au pied de l'ailette et $q_0^{'}$ est le flux évacué par la section S s'il n'y avait pas d'ailette dans les cas suivants : ailette de longueur infinie ;







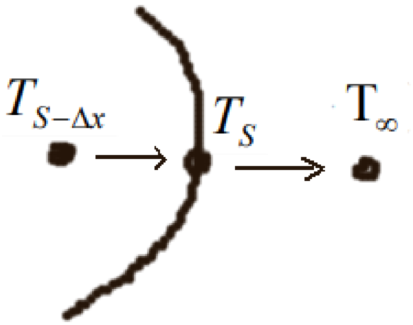
h=40 W/(mK)
λ=50 W/(m²K)
Section S=5mmx20mm

Nombre de Biot : Bi

$$-\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_S \cong \lambda \frac{T_{S-\Delta x} - T_S}{\Delta x}$$

et

$$-\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_S = h(T_S - T_\infty)$$



Le rapport

$$Bi = \frac{\frac{\Delta x}{\lambda}}{\frac{1}{h}} = \frac{T_{S-\Delta x} - T_S}{T_S - T_\infty}$$

$$Bi \equiv \frac{hL_c}{\lambda} \qquad L_c = \frac{V}{A_s}$$

Cette définition facilite le calcul pour des géométries complexes. Pour la conduction unidimensionnelle,

$L_c = L/2$, pour une paroi plan, où L est l'épaisseur de la paroi ;
$L_c = r/2$, pour un cylindre long, où r est le rayon du cylindre ;
$L_c = r/3$, pour une sphère, où r est le rayon de la sphère.

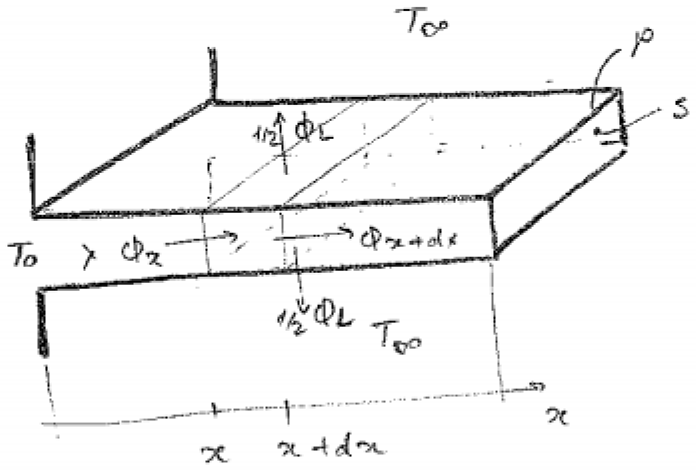
Bi<<1 (Ts-Δx _Ts) << (Ts-T∞)

>> pas de gradient dans le solide

1. Equation générale pour la distribution de la température

Equation de l'ailette

1. En effectuant le bilan d'énergie pour un élément infinitésimal de volume $S\,dx$:



$$q_x - q_{x+dx} - q_l = 0$$

Flux entrant par conduction :

$$q_x = -\lambda S_x \frac{dT_x}{dx}$$

Flux sortant par conduction :

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx}dx$$

Flux sortant par convection par la surface du périmètre p :

$$q_l = h\,P\,dx\,(T_x - T_\infty)$$

Le bilan d'énergie devient :

$$q_x - \left(q_x + \frac{dq_x}{dx}dx\right) - hP_x dx\,(T_x - T_\infty) = 0$$

ou

$$-\frac{d}{dx}\left(-\lambda S_x \frac{dT_x}{dx}\right)dx - hP_x(T_x - T_\infty)dx = 0$$

ou, l'équation de l'ailette

$$\lambda \frac{d}{dx}\left(S_x \frac{dT_x}{dx}\right)dx - hP_x(T_x - T_\infty)dx = 0$$

Si on considère la surface moyenne $\bar{S}_x$,

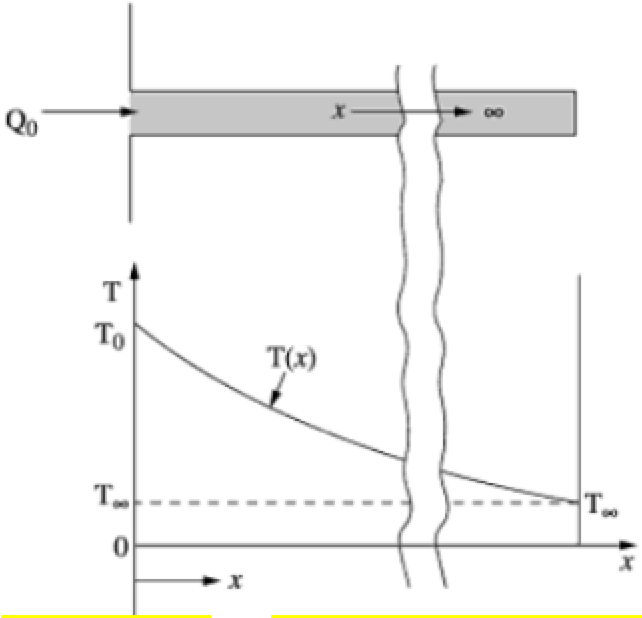
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dT_x}{dx}\right) - \frac{hP_x}{\lambda \bar{S}_x}(T_x - T_\infty) = 0$$

ou

$$\frac{d^2T_x}{dx^2} - \frac{hP_x}{\lambda \bar{S}_x}(T_x - T_\infty) = 0$$

3. Distribution spatiale de la température et l'efficacité de l'ailette
3. Distribution spatiale de la température et l'efficacité de l'ailette

Cas a : ailette infiniment longue $x \to \infty$, $T_x = T_\infty$



Problème : trouver la solution de
$\theta(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$ avec les conditions aux limites
$\theta(x) = [T_x - T_\infty]_{x\to\infty} = 0$ et
$\theta(0) = [T_x - T_\infty]_{x\to 0} = \theta_0$

Distribution de la température :
$x \to \infty$ et $\theta(x) = T_x - T_\infty = 0 \Rightarrow$
$\theta(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x} = C_1 e^{\omega x} = 0$; $C_1 = 0$
$x = 0$ et $\theta(0) \equiv \theta_0 = T_0 - T_\infty \Rightarrow$
$\theta_0 = C_2 e^{-\omega x} = C_2$; $C_2 = T_0 - T_\infty$

$\theta(x) = \theta_0 e^{-\omega x}$ or $T(x) - T_\infty = (T_0 - T_\infty) e^{-\omega x}$

Flux total à travers l'ailette = flux qui sort par sa base ($x = 0$)

$$q_{tot} = q\big|_{x=0} \equiv q_0 = -\lambda S\left[\frac{dT}{dx}\right]_{x=0} = -\lambda S\left[\frac{d\theta}{dx}\right]_{x=0} = -\lambda S\left[\frac{d(\theta_0 e^{-\omega x})}{dx}\right]_{x=0} = -\lambda S\theta_0(-\omega)\left[e^{-\omega x}\right]_{x=0} = \lambda S\omega\theta_0$$

$\lambda S\omega\theta_0$

$$q_{tot} = \sqrt{hP\lambda S}\,(T_0 - T_\infty)$$

Efficacité de l'ailette

$$E = \frac{q_0}{q'_0} = \frac{\sqrt{hP\lambda S}\,(T_0 - T_\infty)}{hS(T_0 - T_\infty)} = \sqrt{\frac{\lambda P}{hS}} = \frac{\lambda}{h}\sqrt{\frac{hP}{\lambda S}} = \frac{\lambda}{h}\sqrt{\alpha}\ ; \quad E = \frac{\lambda}{h}\omega$$