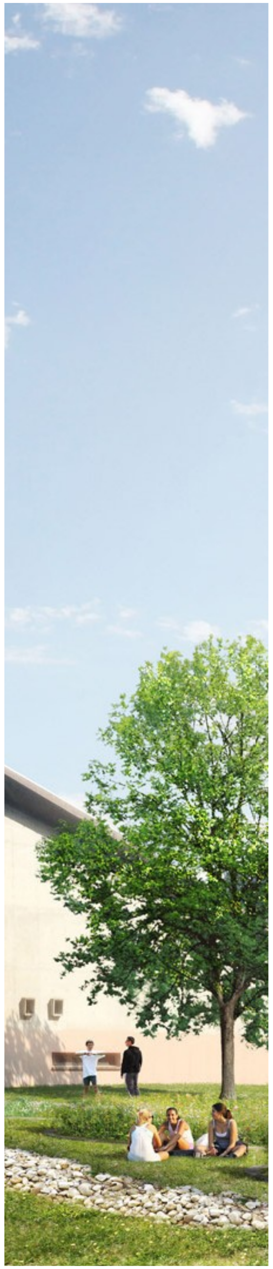
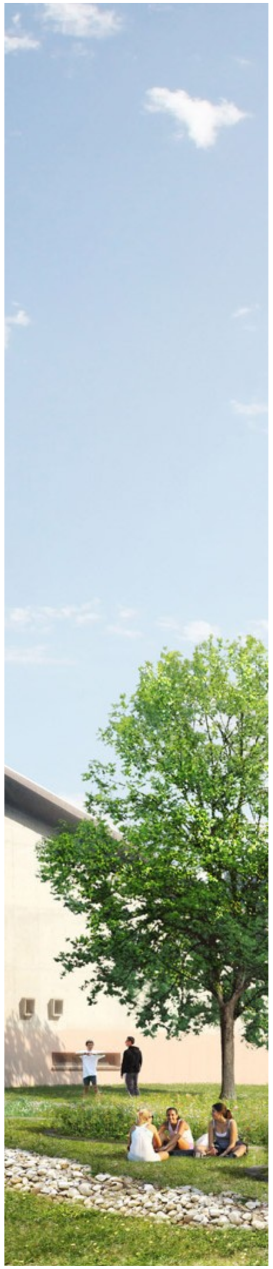


Création de chaleur en coordonnées cylindriques



Ex08 Création de chaleur en coordonées cylindriques

Un câble conducteur protégé par une gaine isolante est immergé dans l'eau à T_0. On fait passer dans ce conducteur un courant I de densité constante dans toute la section.

Calculer la distribution des températures lorsque le régime permanent est obtenu.

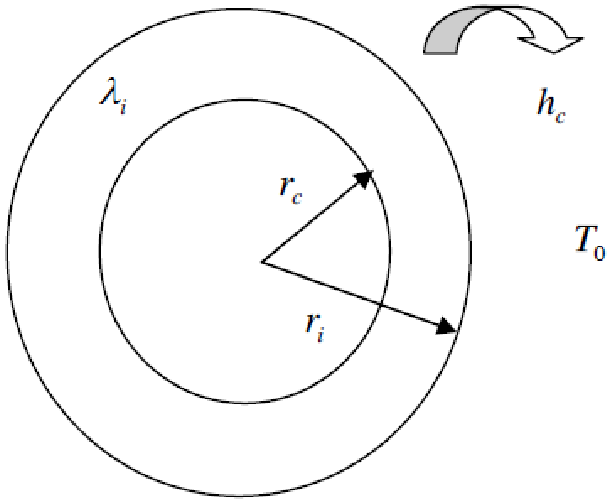
Notations :

R_l, résistance linéique électrique du conducteur ;

λ_c, conductivité du conducteur ;

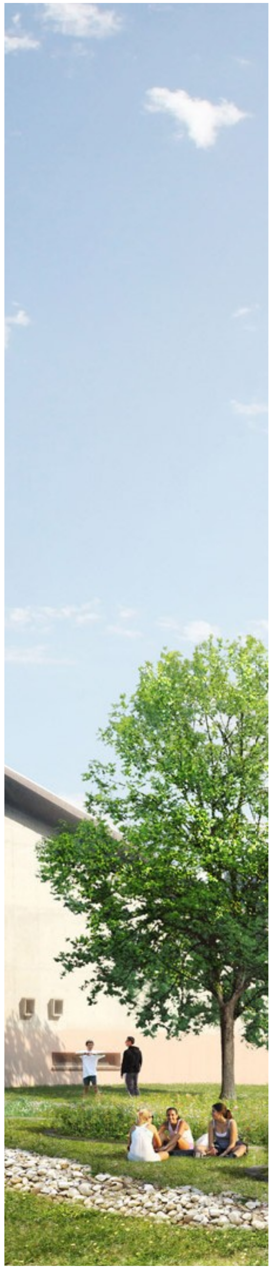
λ_i, conductivité de la gaine isolante ;

h_e, coefficient d'échange superficiel gaine-eau.



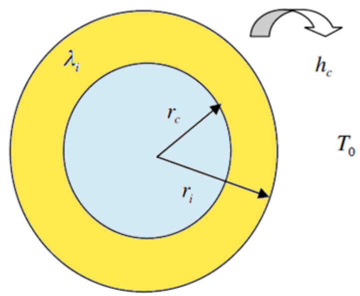
AN :
T_0=20°C
λi=10 W/(m.K)
λc=100 W/(m.K)
hc=500 W/(m^2.K)
r_c = 0,01 m
r_i = 0,03 m
γ : Résistivité ,
γ=1/λ=2 10^{-8} Ω.m
I=3000A

Conduction en régime stationnaire avec sources internes.



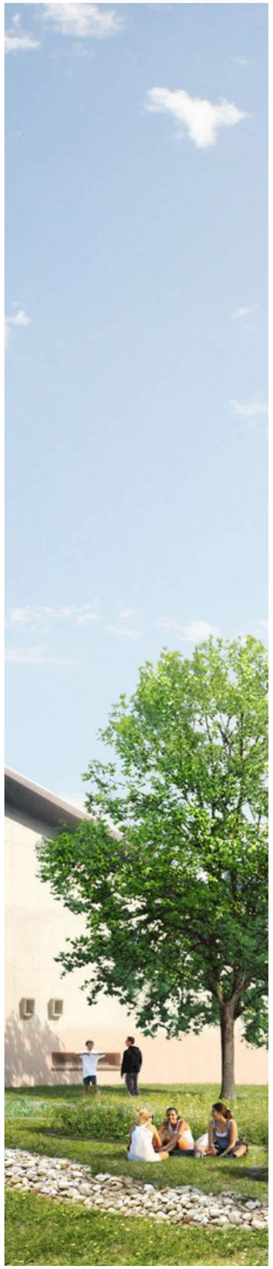
$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}) + p$$

- Régime permanent
- Symétrie de révolution : géométrique, thermo-physique et CL
- Le problème ne dépend pas de z



$$\cancel{\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi})} + \cancel{\frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial T}{\partial z})} + p$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r}) + p = 0$$



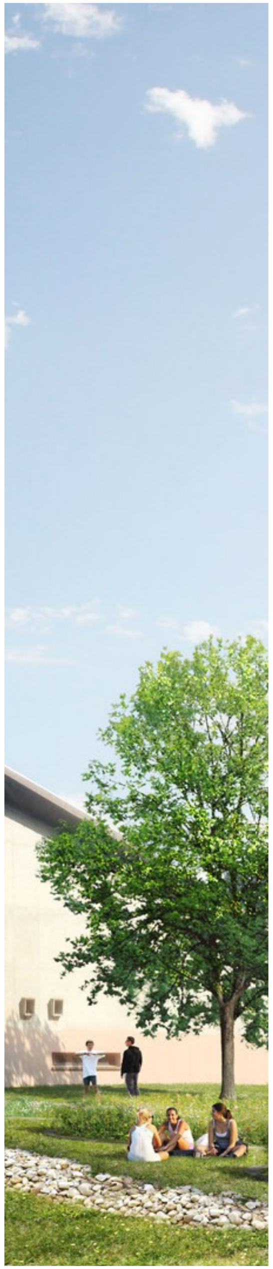
1) Sources internes

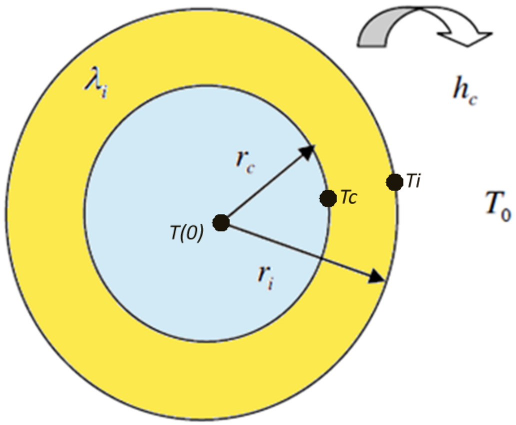
Considérons un conducteur électrique cylindrique de longueur L et surface transversale $A_c = \pi r_c^2$. La quantité de chaleur produite par effet Joule est $Q_{Joule} = R I^2$ [W]. La quantité de chaleur produite par unité de volume est

$$\boxed{p = \frac{Q_{Joule}}{\pi r_c^2 L} = \frac{R}{L}\frac{I^2}{\pi r_c^2} = \frac{R_l I^2}{\pi r_c^2} \text{ [W/m}^3\text{]}}$$

$R = \gamma L/S = L/\lambda S = \gamma L/\pi r_c^2$ γ : *Résistivité* , $\gamma = 1/\lambda$

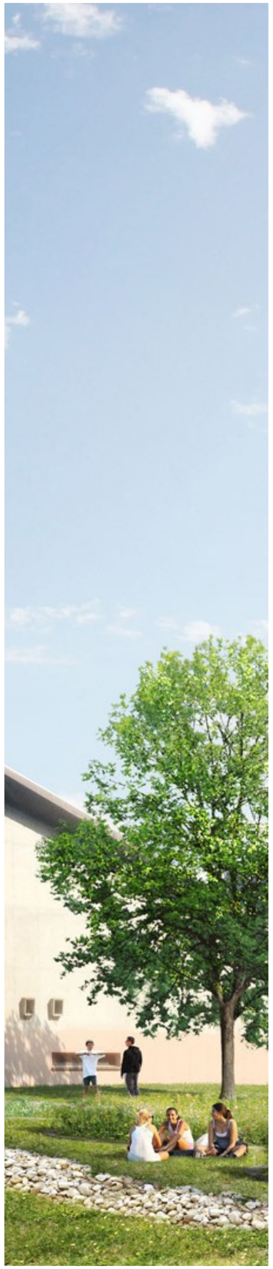
$P = \gamma I^2/\pi^2 r_c^4 = 1{,}824 .10^6$ W/m^3





2) Équations différentielles et conditions aux limites

$$
\begin{cases}
\lambda_c \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT}{dr}\right) + p = 0 \ \text{(dans le câble)} \\
\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dT}{dr}\right) = 0 \ \ \text{(dans l'isolant)} \\
dT/dr\big|_{r=0} = 0 \ \ \text{(flux nul en } r = 0 \text{ due à la symetrie)} \\
\lambda_c \ dT/dr\big|_{r=r_c-} = \lambda_i \ dT/dr\big|_{r=r_c+} \ \text{(flux conservatif à la surface de contact)} \\
T(r_{c-}) = T(r_{c+}) \ \text{(température de surface du câble égale à la température de l'isolant)} \\
-\lambda_i dT/dr\big|_{r=r_i-} = h[T(r_i) - T_0] \ \ \text{(flux sortant par conduction égale au flux de convection)}
\end{cases}
$$



Distribution de la température dans le câble électrique

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{pr}{\lambda_c}$$

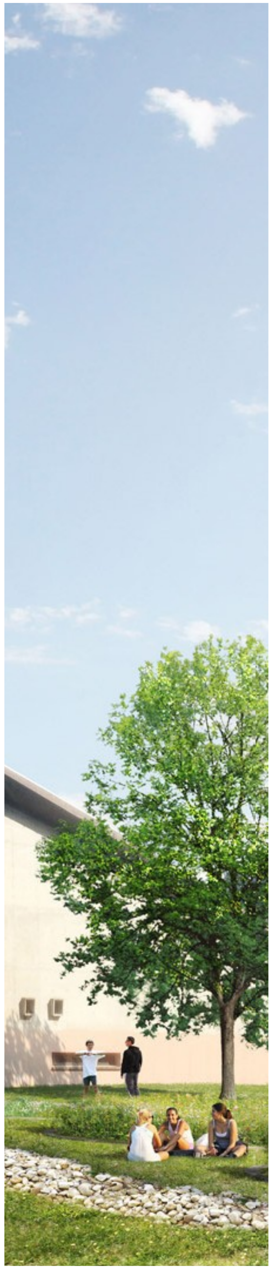
Par intégration en fonction de r , on obtient

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{pr^2}{2\lambda_c} + C_1 \text{ ou}$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{pr}{2\lambda_c} + \frac{C_1}{r}$$

En intégrant encore une fois en fonction de r , on obtient

$$T(r) = -\frac{pr^2}{4\lambda_c} + C_1 \ln(r) + C_2$$



Les constantes d'intégrations s'obtiennent en utilisant les conditions aux limites :

CL1 : $\left.\dfrac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0$ (flux nul en $r = 0$ due à la symétrie)

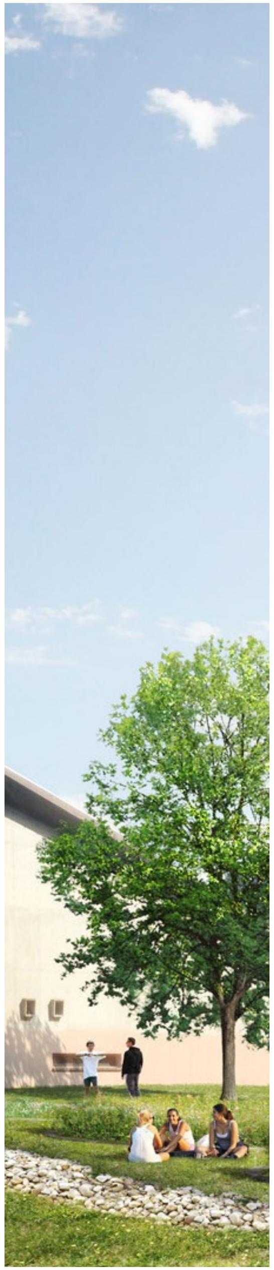
CL2 : $T\big|_{r=r_c} = T_c = T_{S,1}$ (la température en r_c est égale à la température de l'isolant).

De $\left.\dfrac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0$ et $\dfrac{dT}{dr} = -\dfrac{pr}{2\lambda_c} + \dfrac{C_1}{r}$ on obtient $C_1 = 0$

De $T\big|_{r=r_c} = T_c = T_{S,1}$ et $T(r) = -\dfrac{pr^2}{4\lambda_c} + C_1 \ln(r) + C_2$ on obtient $C_2 = T_c + \dfrac{pr_c^2}{4\lambda_c}$

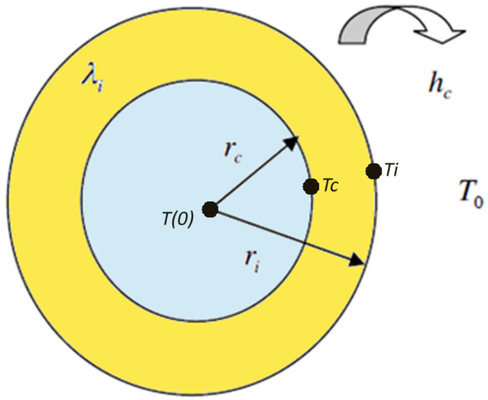
L'équation de la distribution spatiale de la température dévient :

$$T(r) = -\frac{pr^2}{4\lambda_c} + T_c + \frac{pr_c^2}{4\lambda_c} \quad \text{ou} \quad \boxed{T(r) = T_c + \frac{p}{4\lambda_c}(r_c^2 - r^2)}$$



Dans l'isolant :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda\, r\,\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$$



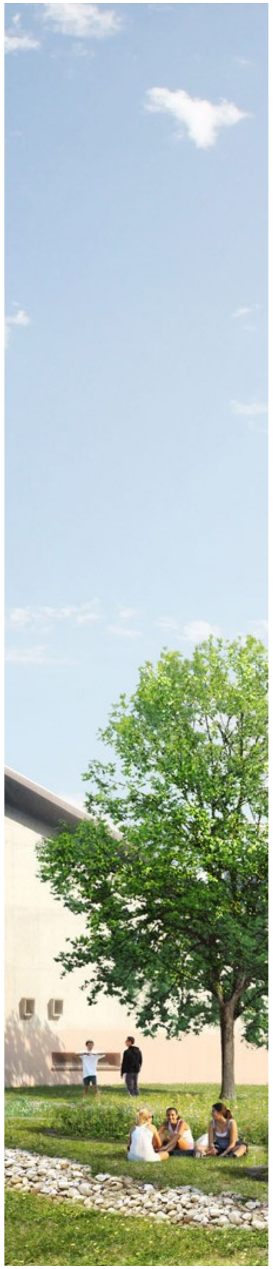
$$r\frac{\partial T}{\partial r} = \alpha \quad >> \quad \frac{\partial T}{\partial r} = \alpha/r$$

$T(r)= \alpha \ln(r) +\beta$

CL : $T(r_c)=Tc$ et $T(r_i)=Ti$

>> $\alpha= (Tc-Ti) / \ln(r_c/r_i)$ et $\beta= Tc- \ln (r_c).(Tc-Ti)/ \ln(r_c/r_i)$

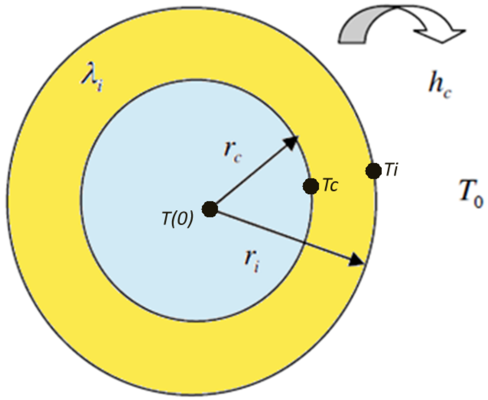
>> $T_{isolant}(r)= Tc+\ln (r/r_c).(Tc-Ti)/ \ln(r_c/r_i)$



$$\lambda_c \, dT/dr\big|_{r=r_c-} = \lambda_i \, dT/dr\big|_{r=r_c+}$$ (flux conservatif à la surface de contact)

$\lambda_c(dT/dr)_{rc} = p\,\lambda_c(-2r_c)/4\lambda_c = p\,(-2r_c)/4$

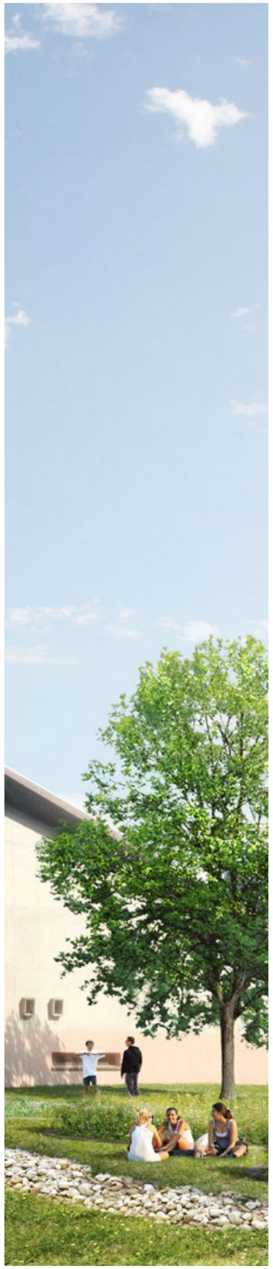
$\lambda_i(dT/dr)_{rc} = \lambda_i\,.1/r_c\,.\,(Tc-Ti)/\ln(r_c/r_i)$



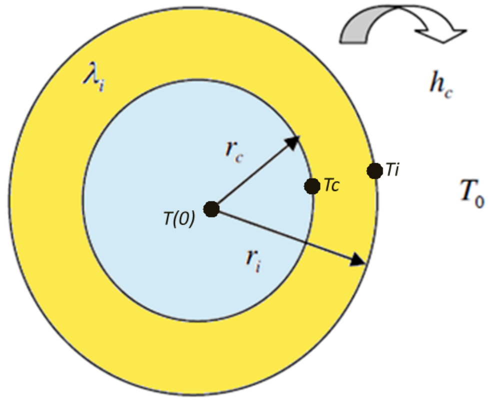
$$T_c = Ti + \ln(r_i/r_c)\,p\,r^2{}_c\,/(2\,\lambda_i)$$

>> dans le câble : $\boxed{T_c(r) = T_c + \frac{p}{4\lambda_c}(r_c^2 - r^2)}$

>> dans l'isolant $T_i(r) = Tc + \ln(r/r_c).(Tc-Ti)/\ln(r_c/r_i)$



Interface isolant /eau :



$$-\lambda_i (dT/dr)_{ri}\, S = h_e (Ti-To)\, S$$

$$-\lambda_i (dT/dr)_{ri} = h_e (Ti-To)$$

$$-\lambda i (1/ri)\ (Tc-Ti)/\ln(rc/ri) = h_e (Ti-To) \gg Ti$$

$$T_c = Ti + \ln(r_i/r_c)\ p\ r^2{}_c\ /(2\ \lambda_i) \gg\ T_c \gg\ Tc(0)$$

AN :

Ti=26,08°C

Tc=36,08°C

Tc(0)=36,53°C