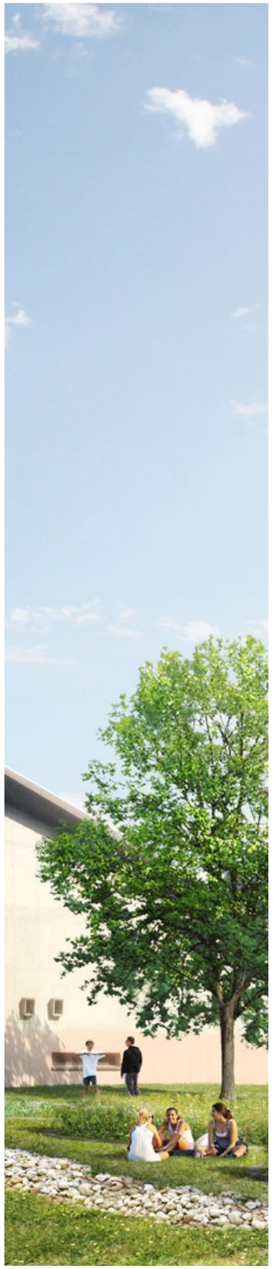


Mur en régime permanent avec conductivité variable

Exo 3 Mur en régime permanent avec conductivité variable

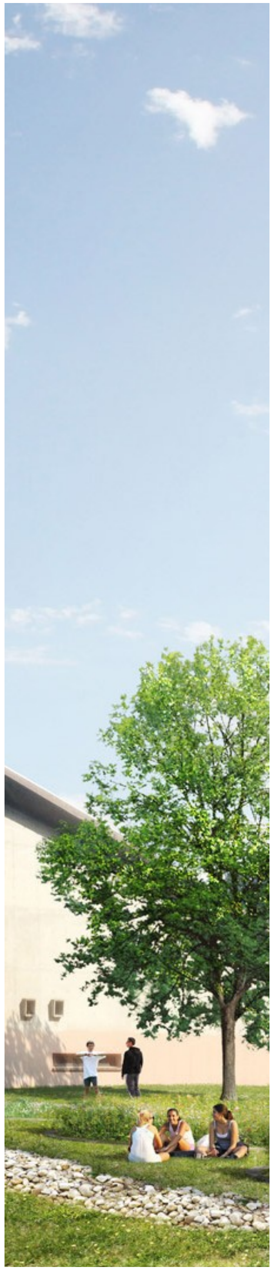
Pour de nombreux matériaux soumis à des écarts de température importants, il faut prendre en compte la variation de la conductivité avec la température. Cette variation est donnée généralement par une loi linéaire

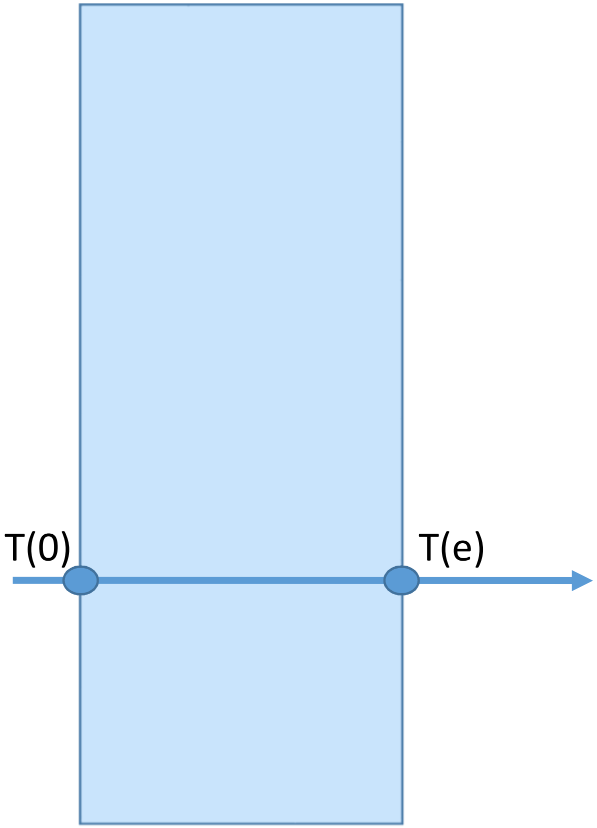
$$\lambda = \lambda_0[1+\alpha(T-T_0)]$$

On considère une plaque d'épaisseur e soumise sur ses deux faces à un contact parfait avec deux milieux de températures $T(0)=T_0$ et $T(e)=T_e$.

En supposant que la conductivité du matériau constitutif de la plaque varie linéairement avec la température, déterminer la répartition interne des températures dans quatre points équidistantes à l'intérieure du matériau, ainsi que la valeur du flux de chaleur traversant cette paroi. Utilisez une approche analytique et une approche numérique ; comparez les résultats.

A. N. $e = 5$ cm, $\lambda_0 = 1$ W/m·K, $\alpha = 2\cdot 10^{-3}$ K^{-1}, $T_0 = 50$ °C, $T_e = 550$ °C





L'équation de la chaleur,

$$div(\lambda \,\mathbf{grad}\, T) + p = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

devient :

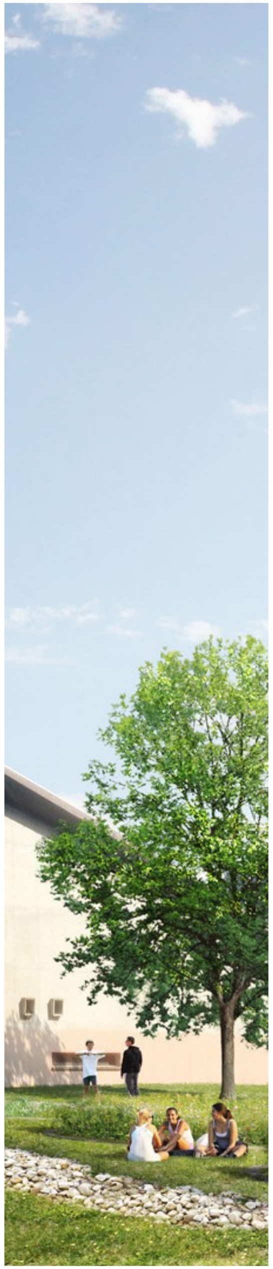
$$div(\lambda \,\mathbf{grad}\, T) = 0$$

ou

$$\lambda \,\mathbf{grad}\, T = A \;\; \text{(constant)}$$

Dans le cas unidimensionnel :

$$\lambda \frac{dT}{dx} = A \;\; \text{ou} \;\; \lambda_0[1 + \alpha(T - T_0)]\frac{dT}{dx} = A\,.$$



$$\theta \equiv T - T_0 \qquad >>$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{dT}{dx} \text{ et } \lambda_0 (1 + \alpha\theta) \frac{d\theta}{dx} = A$$

Séparation des variables :

$$\lambda_0 d\theta + \lambda_0 \alpha \theta \, d\theta = A \, dx$$

En intégrant :

$$\lambda_0 \theta + \lambda_0 \alpha \frac{\theta^2}{2} = Ax + B$$

$$\theta + \alpha \frac{\theta^2}{2} = \frac{A}{\lambda_0} x + \frac{B}{\lambda_0} \; ;$$

$$\theta + \alpha \frac{\theta^2}{2} = Cx + D$$

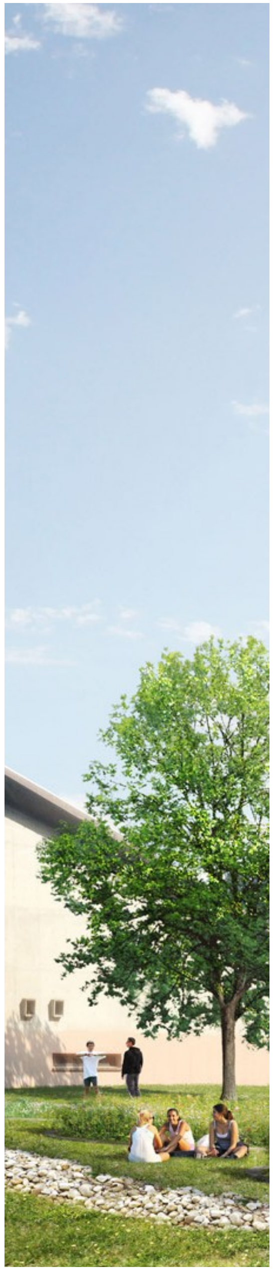
En appliquant les conditions aux limites :

$$x = 0 \; ; \; T = T_0 \; ; \; \theta = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$x = e \; ; \; T = T_e \; ; \; \theta = T_e - T_0$$

$$(T_e - T_0) + \alpha \frac{(T_e - T_0)^2}{2} = Ce$$

$$C = \frac{1}{e}(T_e - T_0)\left[1 + \frac{\alpha}{2}(T_e - T_0)\right]$$



Distribution de la température :

$$\boxed{\theta + \alpha\frac{\theta^2}{2} = \frac{1}{e}(T_e - T_0)\left[1 + \frac{\alpha}{2}(T_e - T_0)\right]x}$$

$$\theta + \alpha\frac{\theta^2}{2} = Cx \qquad \theta = T - T_0$$

$$C = \frac{1}{e}(T_e - T_0)\left[1 + \frac{\alpha}{2}(T_e - T_0)\right]$$

Densité de flux :

$$\boxed{\varphi = -\lambda\ \mathbf{grad}\ T = -A = -\lambda_0 C}$$

A.N. : $C = 15000\ \mathrm{K/m}$

$$\varphi = -15000\ \mathrm{W/m^2}$$

$$\theta_{1;2} = -\frac{1}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{2}{\alpha}Cx}$$

La solution

$$\theta = -\frac{1}{\alpha} - \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{2}{\alpha}Cx} \text{ implique que}$$

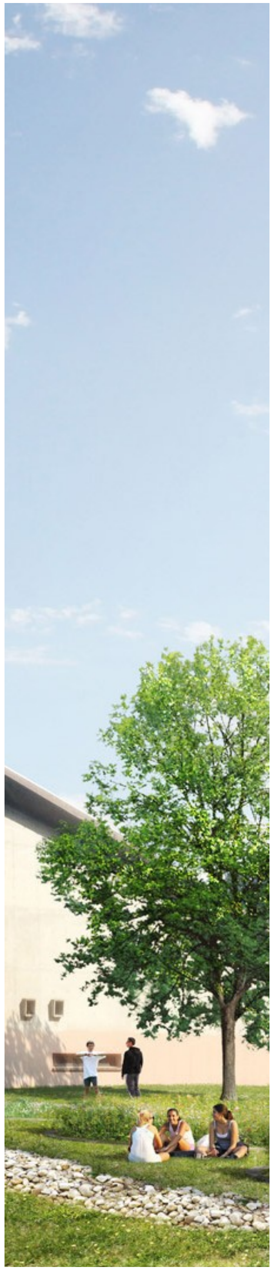
$$\theta < 0 \quad \Rightarrow \quad T - T_0 < 0 \quad \Rightarrow \quad T < T_0$$

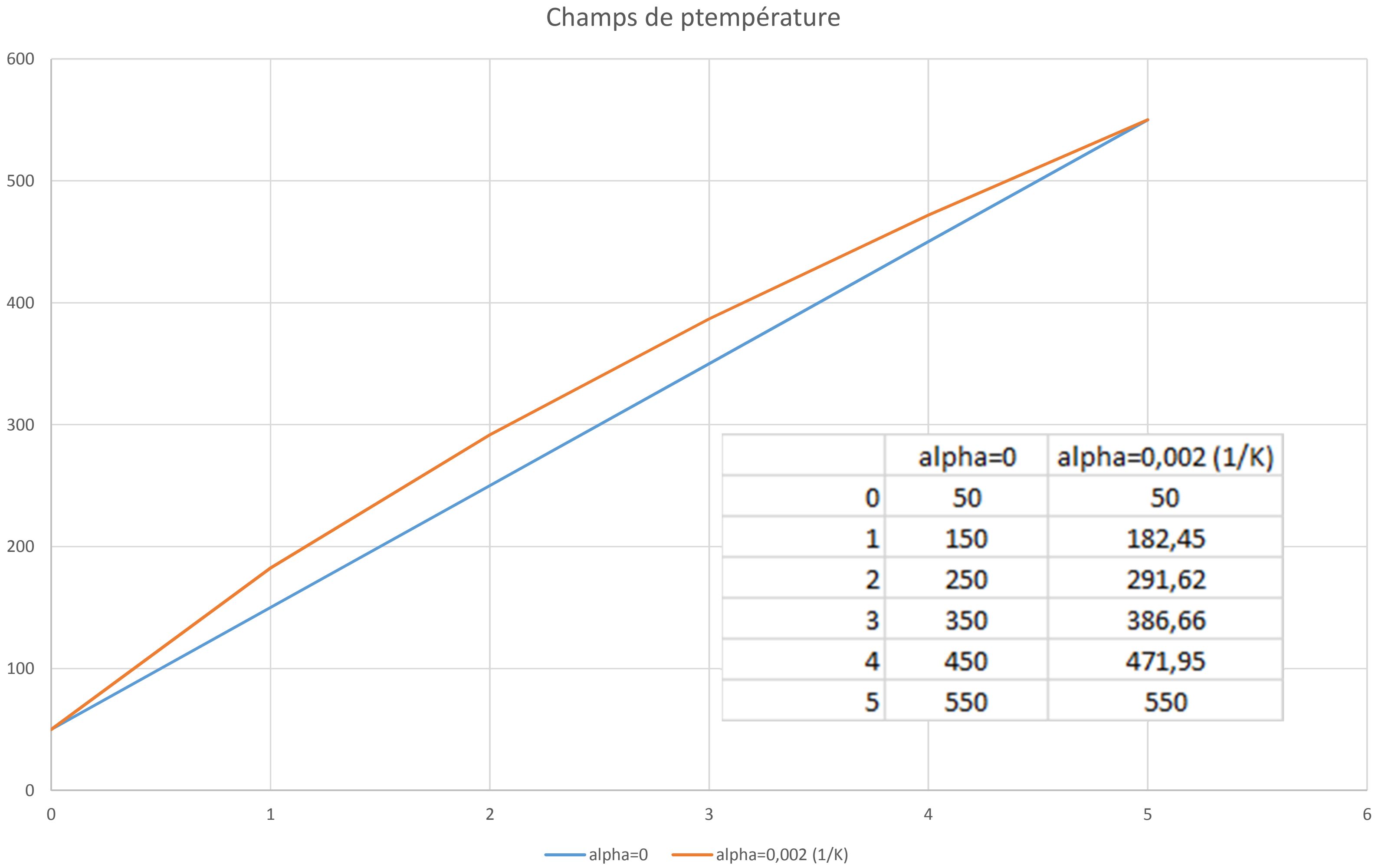
or, comme il n'y a pas des sources internes, de point de vue physique $T_0 \le T \le T_e$.

La solution avec du sens physique est :

$$\theta = -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{2}{\alpha}Cx}$$

$$\boxed{T = \theta + T_0 = -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{2}{\alpha}Cx} + T_0}$$





	alpha=0	alpha=0,002 (1/K)
0	50	50
1	150	182,45
2	250	291,62
3	350	386,66
4	450	471,95
5	550	550