

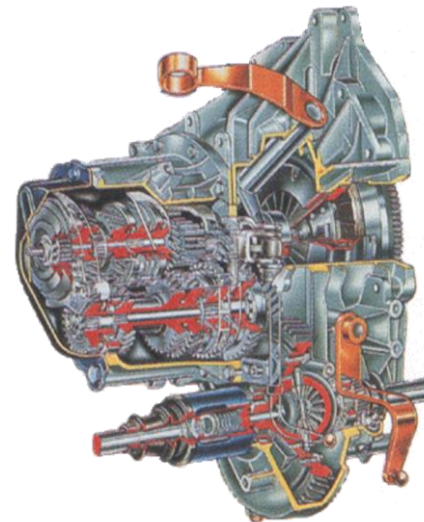
Contraintes – Torseur de Cohésion – Résistance statique

Arbre secondaire Boîte Vitesses

Équipe pédagogique CONAN

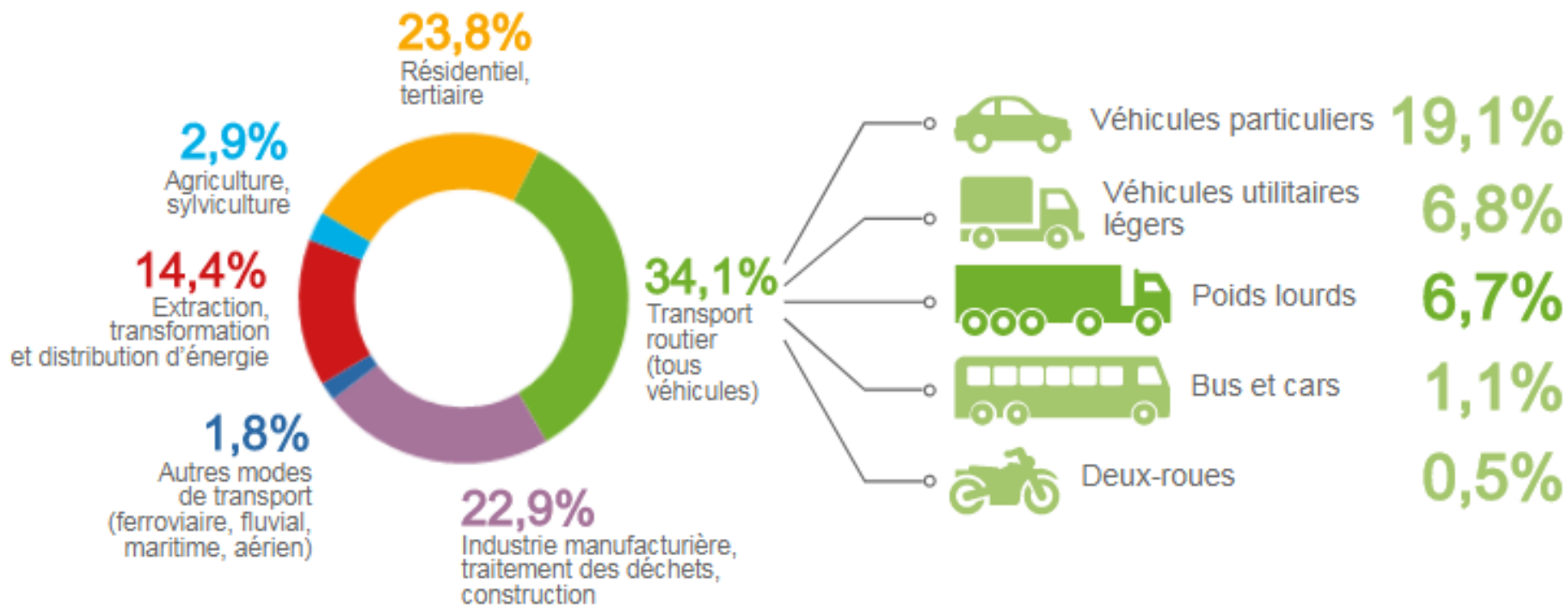
Objectifs :

- Calcul des efforts extérieurs 3D sur une pièce isolée : l'arbre secondaire.
- Calcul du torseur des efforts intérieurs (torseur de cohésion),
- Tracés des diagrammes,
- Identification de la section critique (où le dimensionnement doit se faire)
- Calculs des contraintes en différents points d'une section, contrainte équivalente
- Critères de résistance statique.



Le transport routier et ses impacts

Répartition des émissions de CO₂ par secteur d'activité en France, en 2012



Rapport CITEPA : Centre Interprofessionnel Technique d'Etudes de la Pollution Atmosphérique

Les alternatives proposées par l'industrie automobile ont-elles un sens?

Contribution des étapes du cycle de vie des VE et VT de référence pour le potentiel de changement climatique

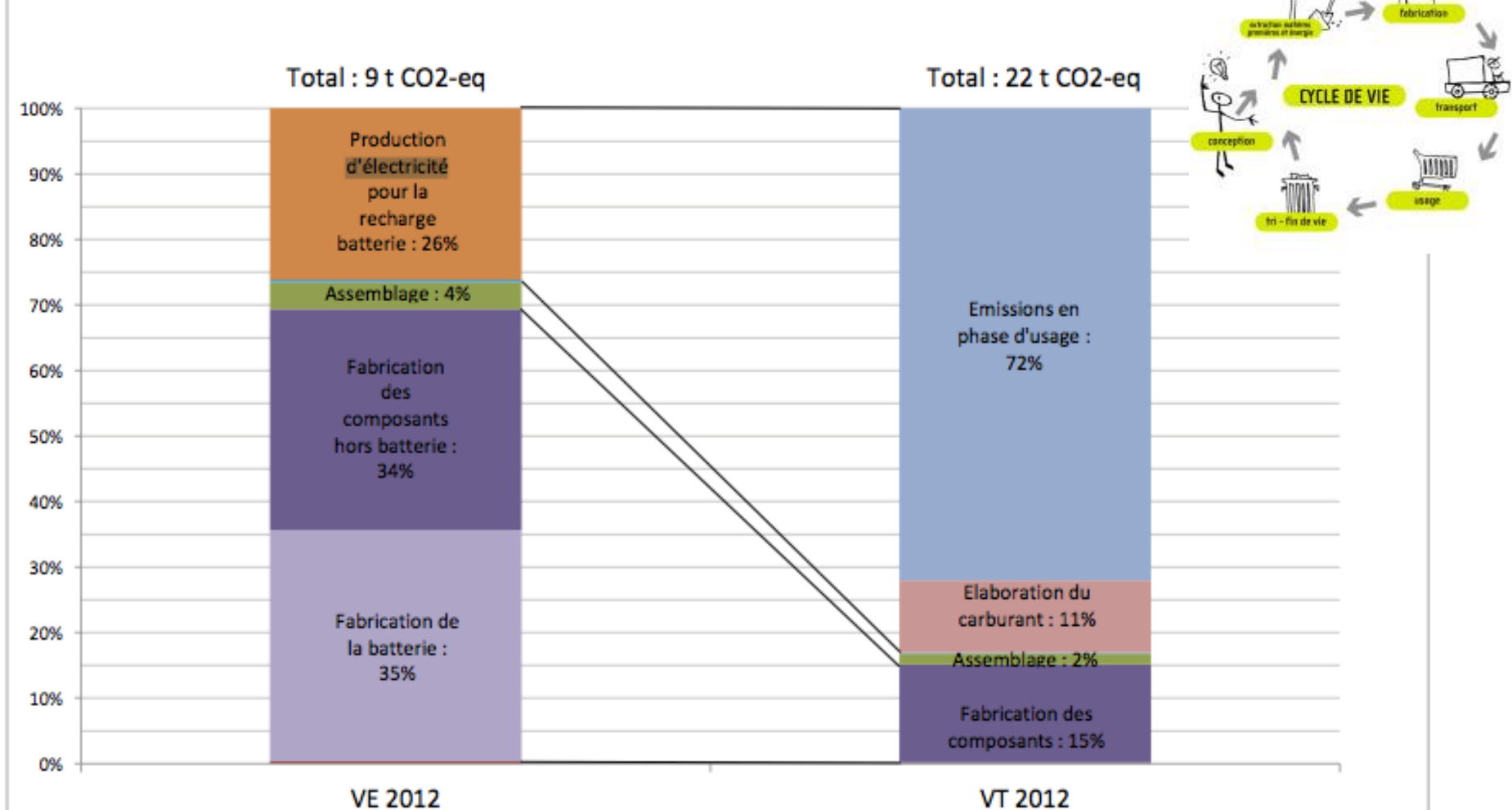


Figure 1-4 : Contributions au potentiel de changement climatique du Véhicule Electrique français et du Véhicule Thermique en 2012

L'évolution des émissions CO2 à l'usage...

Attention au mix énergétique!!!

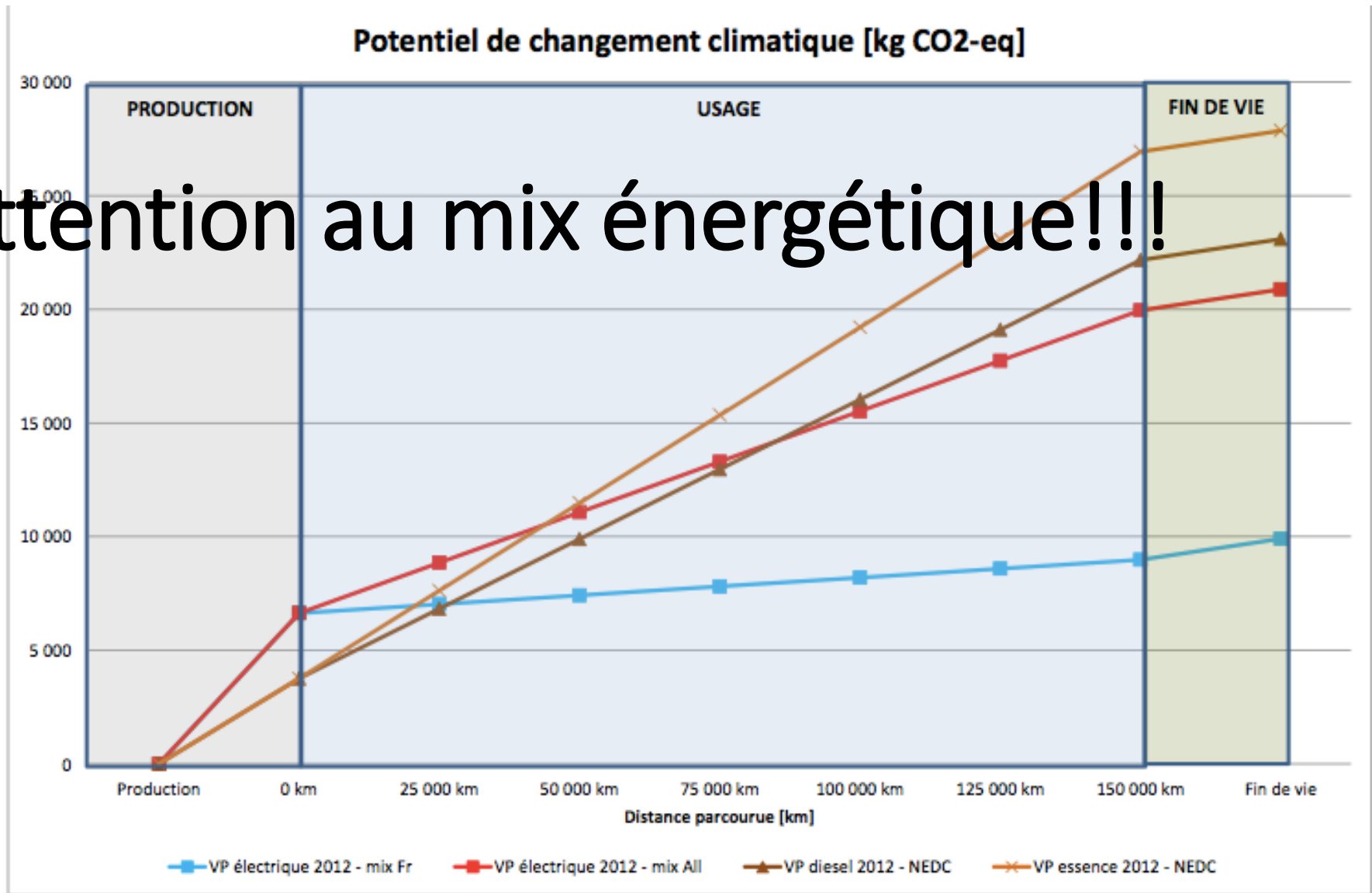
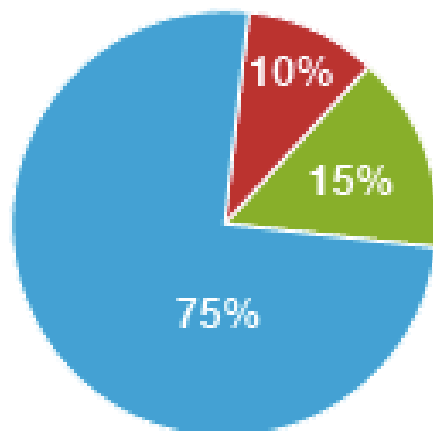


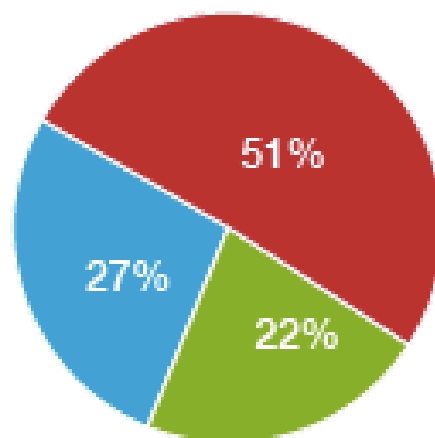
Figure 1-5 : Potentiel de changement climatique pour les véhicules électriques français et allemand et les véhicules thermiques essence et diesel en 2012 selon le scénario de référence

Origine électricité

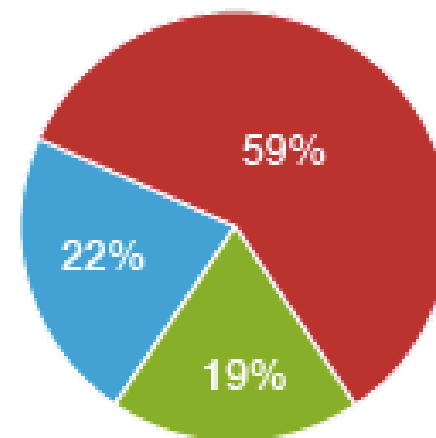
France



Union Européenne



Allemagne



■ énergies carbonnées (charbon, pétrole, gaz)

■ énergies renouvelables et hydrolique

■ énergie nucléaire

composition du mix énergétique en pourcentage - Source : Eurostat 2011

Contribution d'un véhicule pendant sa durée de vie rapportée à la contribution d'un habitant pendant un an

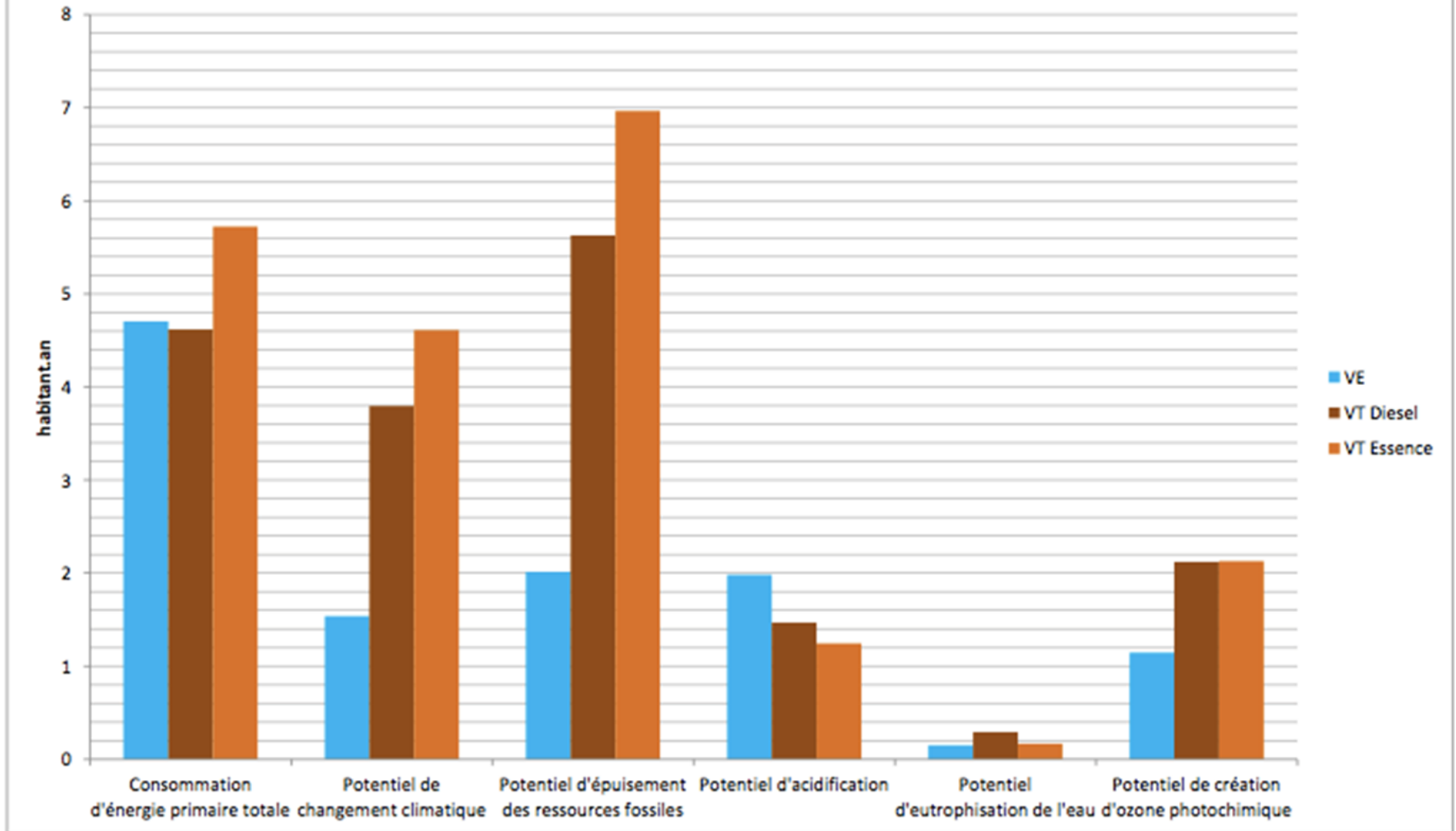
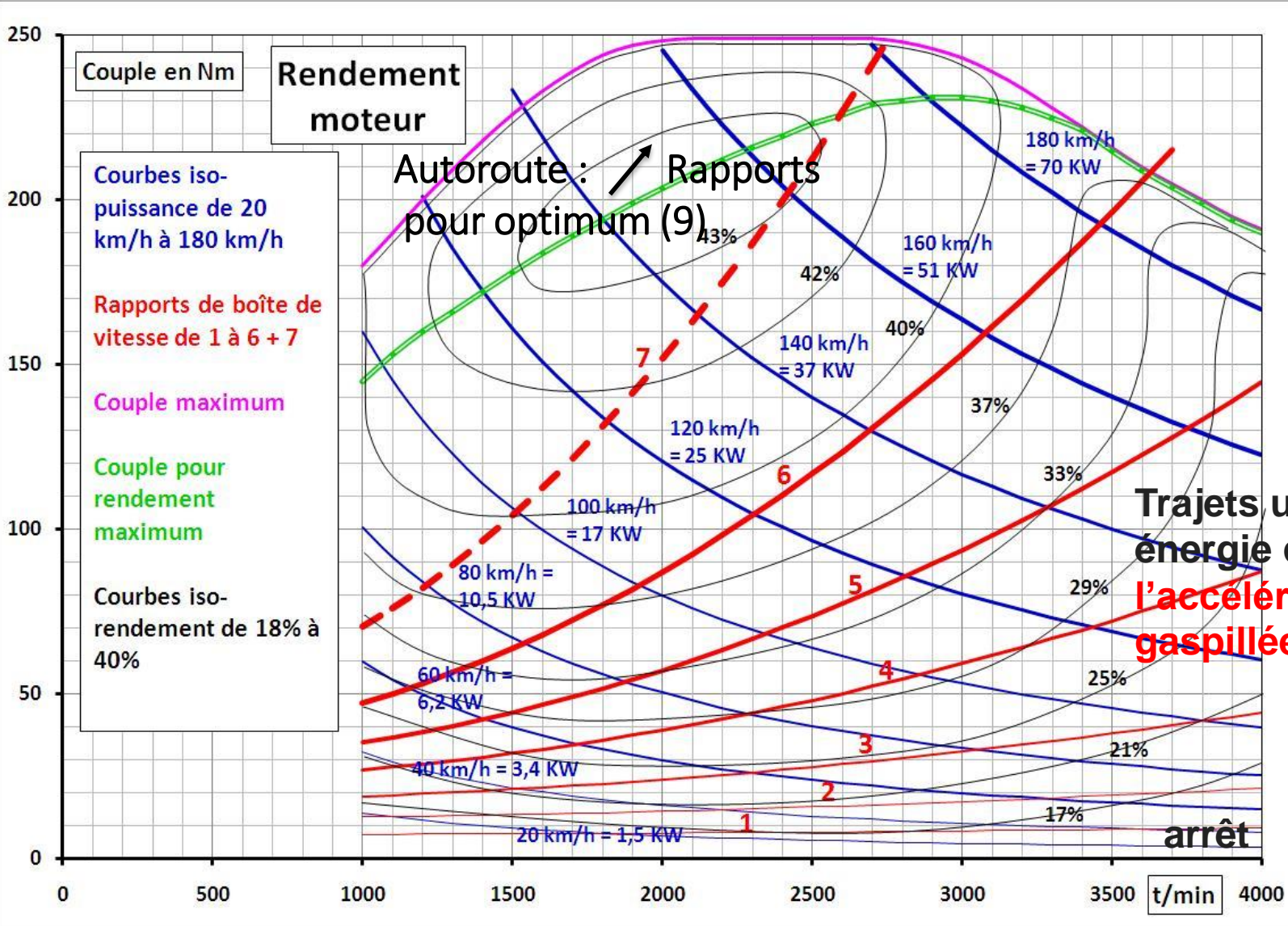


Figure 1-21 : Normation des six impacts potentiels retenus pour le VP en France en 2012

A l'horizon 2020:

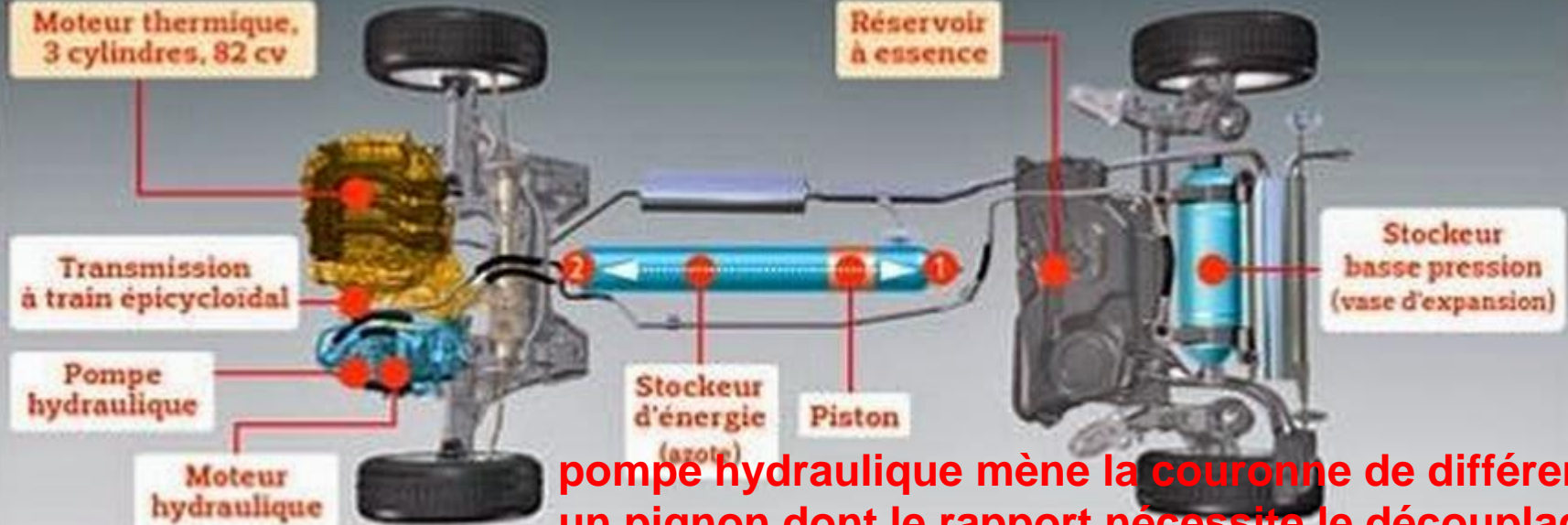
- **Véhicule Electrique** : la batterie serait moins impactante que la batterie 2012 car moins de métaux rares
- **Véhicules thermiques** : seront allégés (gain de consommation à l'usage) mais avec une fraction d'Aluminium primaire plus importante donc des émissions pendant la fabrication des composants augmentées.

Boîte de vitesses : Mode de conduite, rendement énergétique et solutions



Mode de conduite, rendement énergétique et solutions

Hybrid Air : le nouveau système hybride hydropneumatique de PSA



pompe hydraulique mène la couronne de différentiel par un pignon dont le rapport nécessite le découplage au-delà de 60 km/h

- Au freinage, la pompe hydraulique absorbe l'énergie cinétique du véhicule qui ralentit de ce fait, et refoule l'huile sous pression dans un réservoir HP.
- A l'accélération, l'huile sous pression alimente le moteur hydraulique seul ou en complément du moteur thermique
- Azote car peu réactif aux températures envisagées (évitera l'oxydation de l'huile et des métaux)

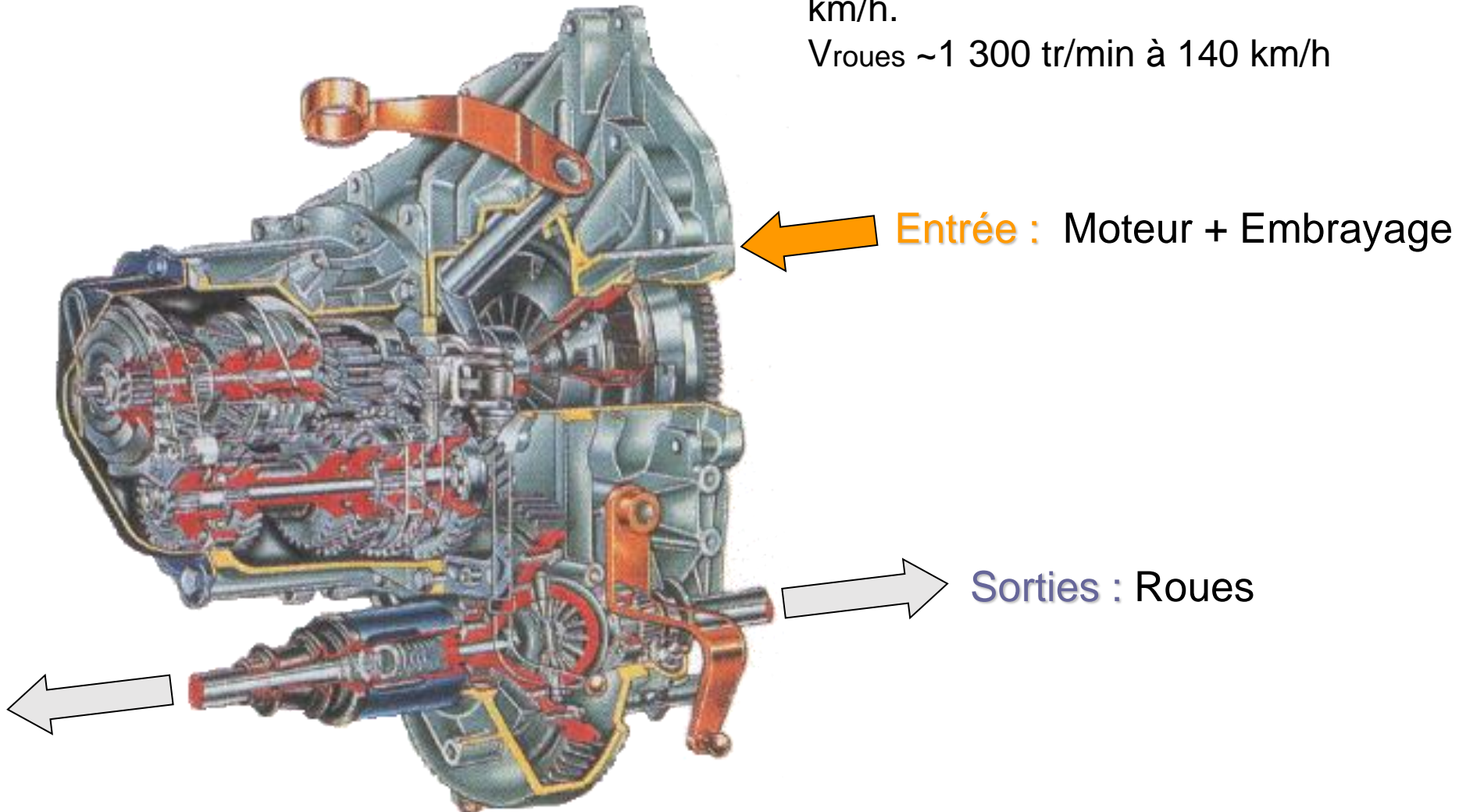
=> 69 g CO₂/km en homologation soit 2,9 l/100 km (référence thermique BVM à 104 g CO₂/km) sur une silhouette conventionnelle

=> Gain de 45 % à l'usage en conditions urbaines permettant une autonomie accrue de 90 % par rapport à une motorisation conventionnelle »

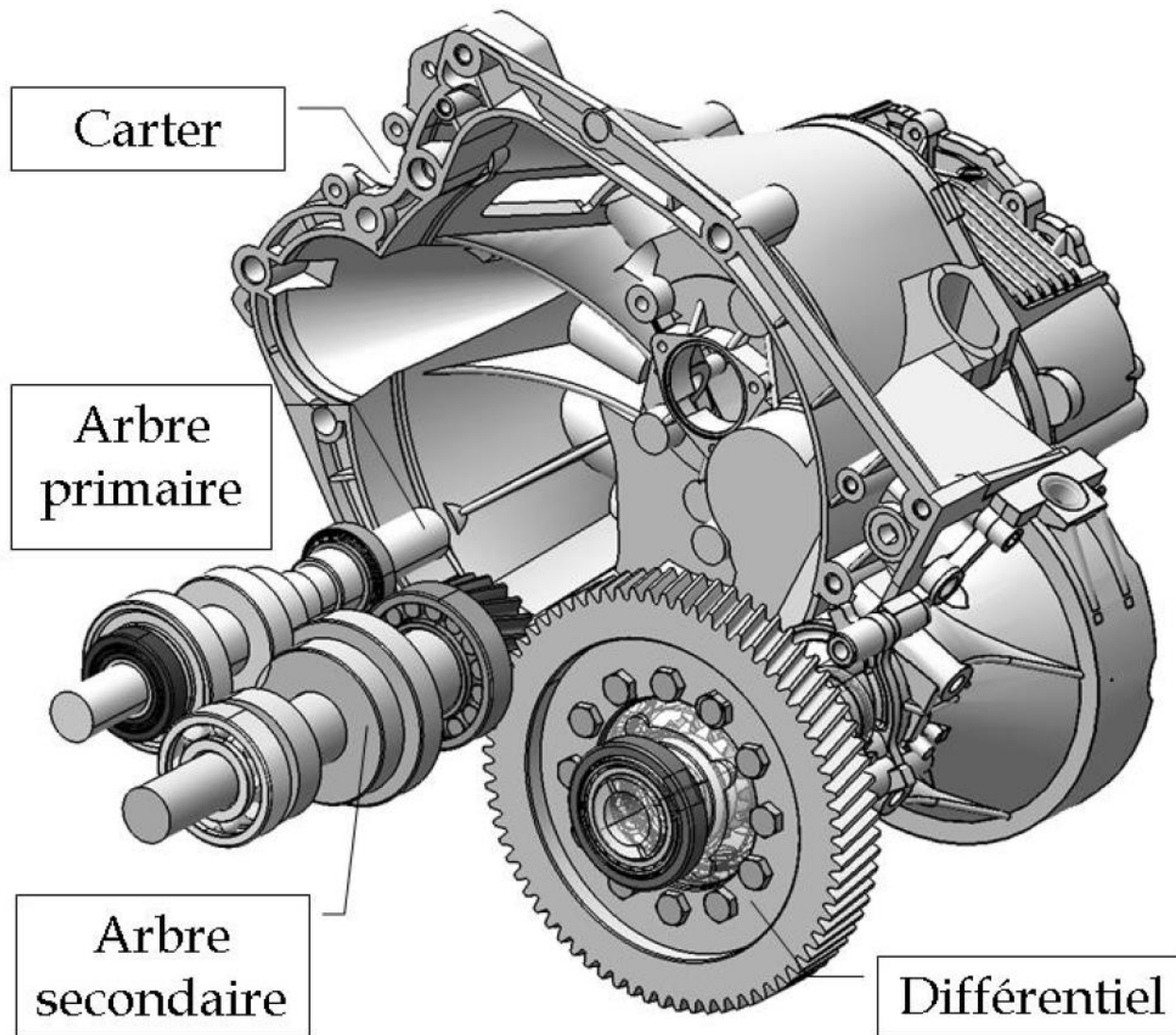
Boite manuelle

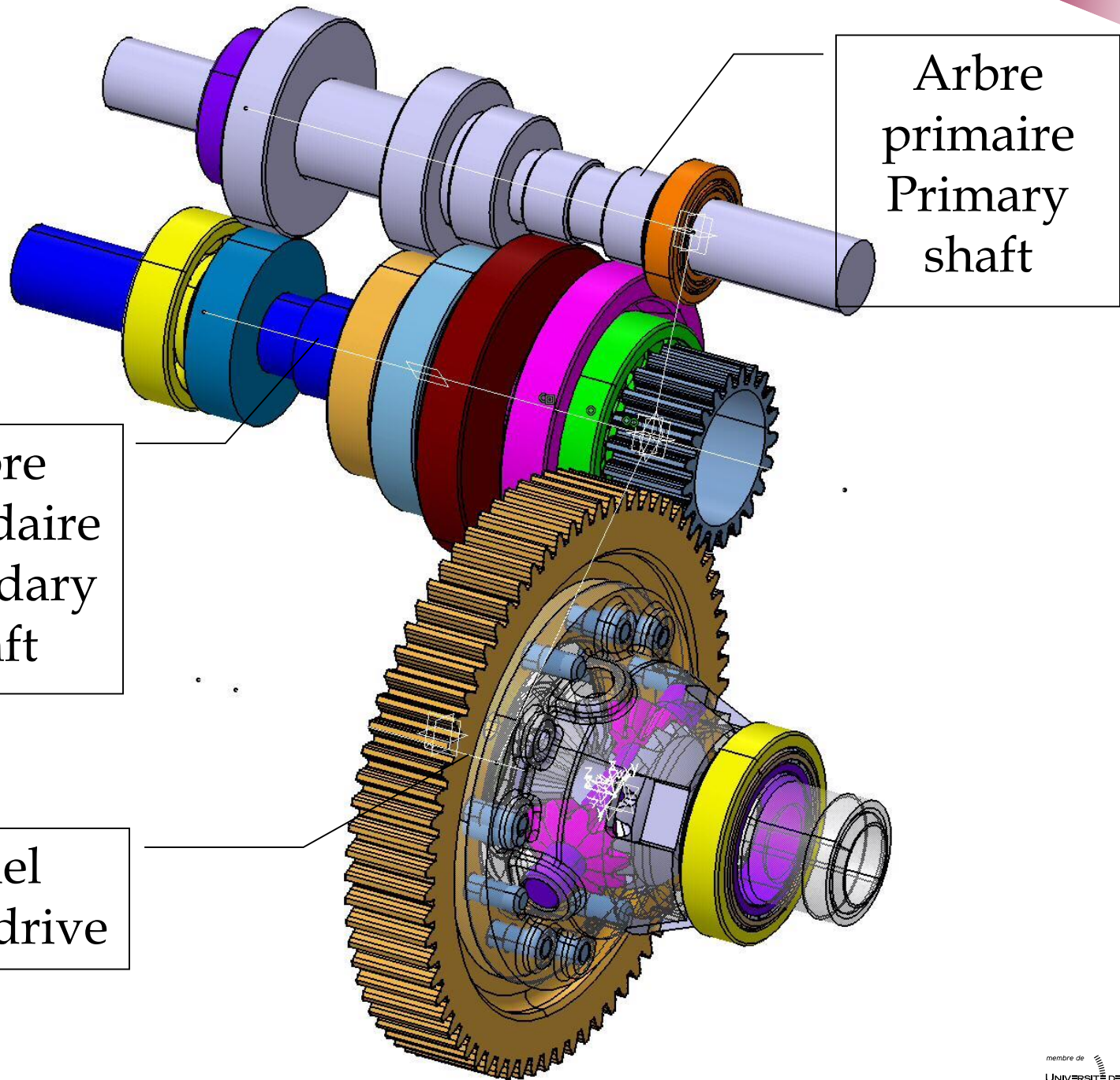
$V_{\max \text{ voiture}} = f(\text{puissance moteur})$
régime maximal $\sim 5\,000$ tr/min pour 160 km/h.

$V_{\text{roues}} \sim 1\,300$ tr/min à 140 km/h



Boite manuelle



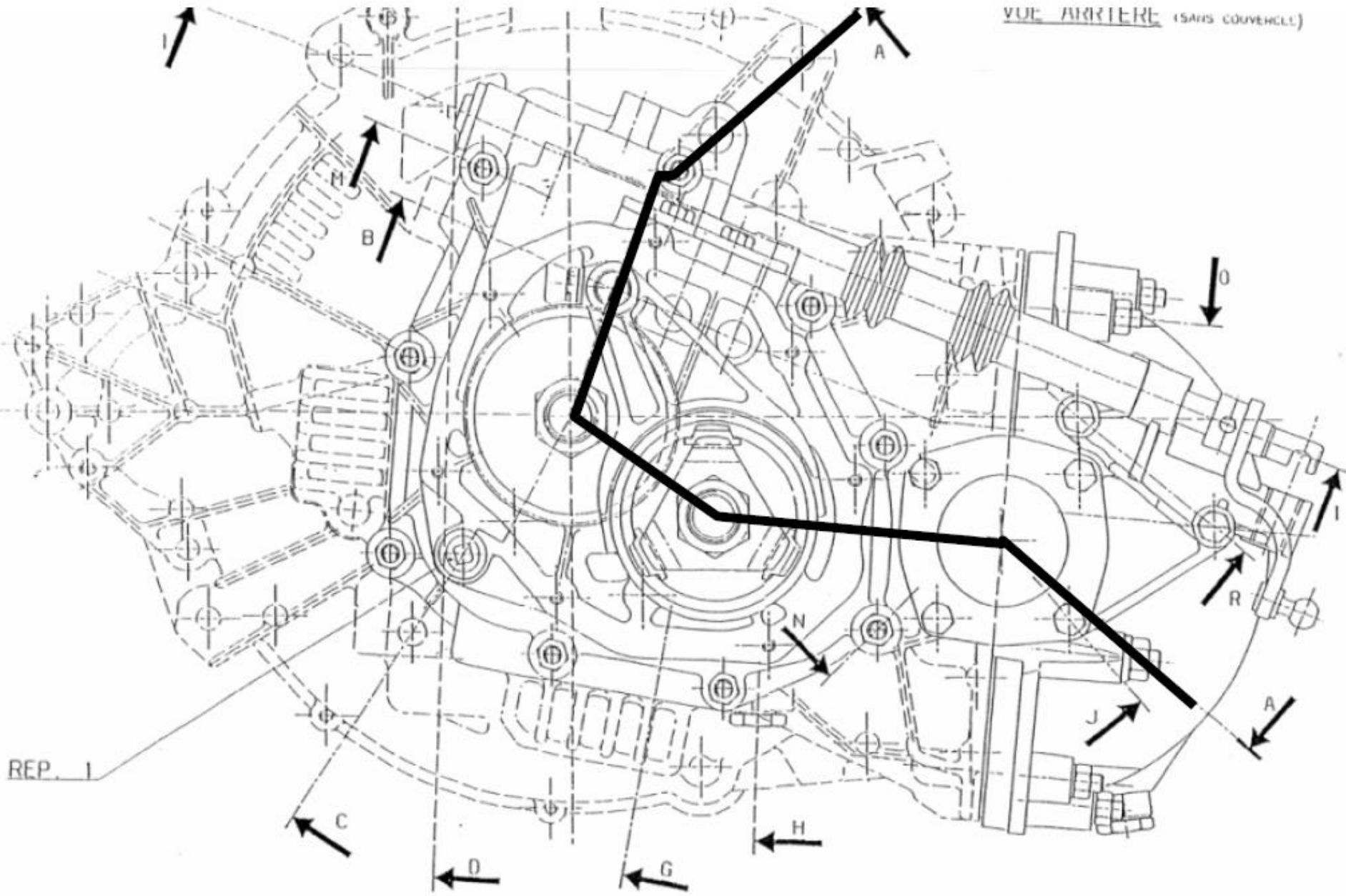


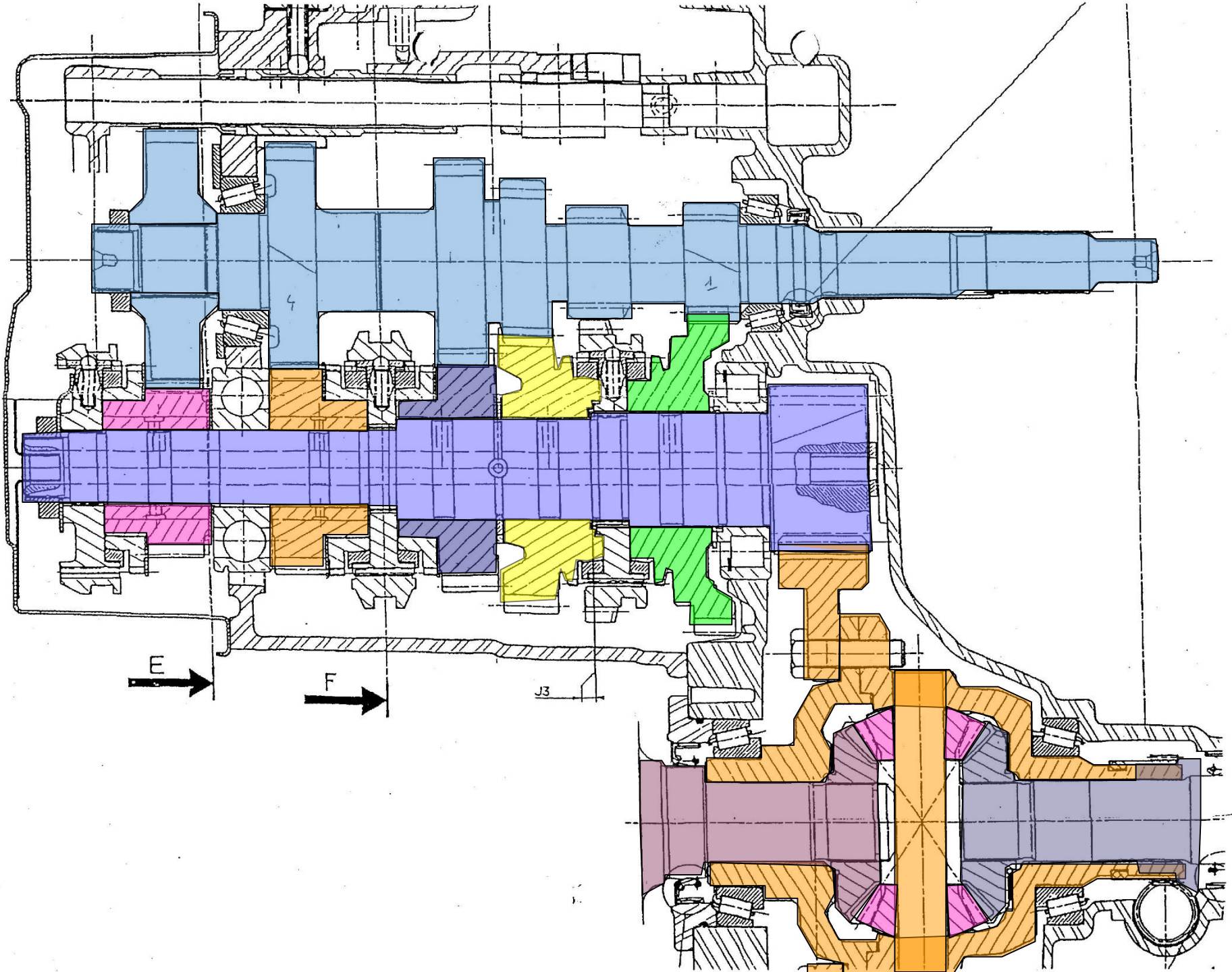
Arbre
primaire
Primary
shaft

Arbre
secondaire
Secondary
Shaft

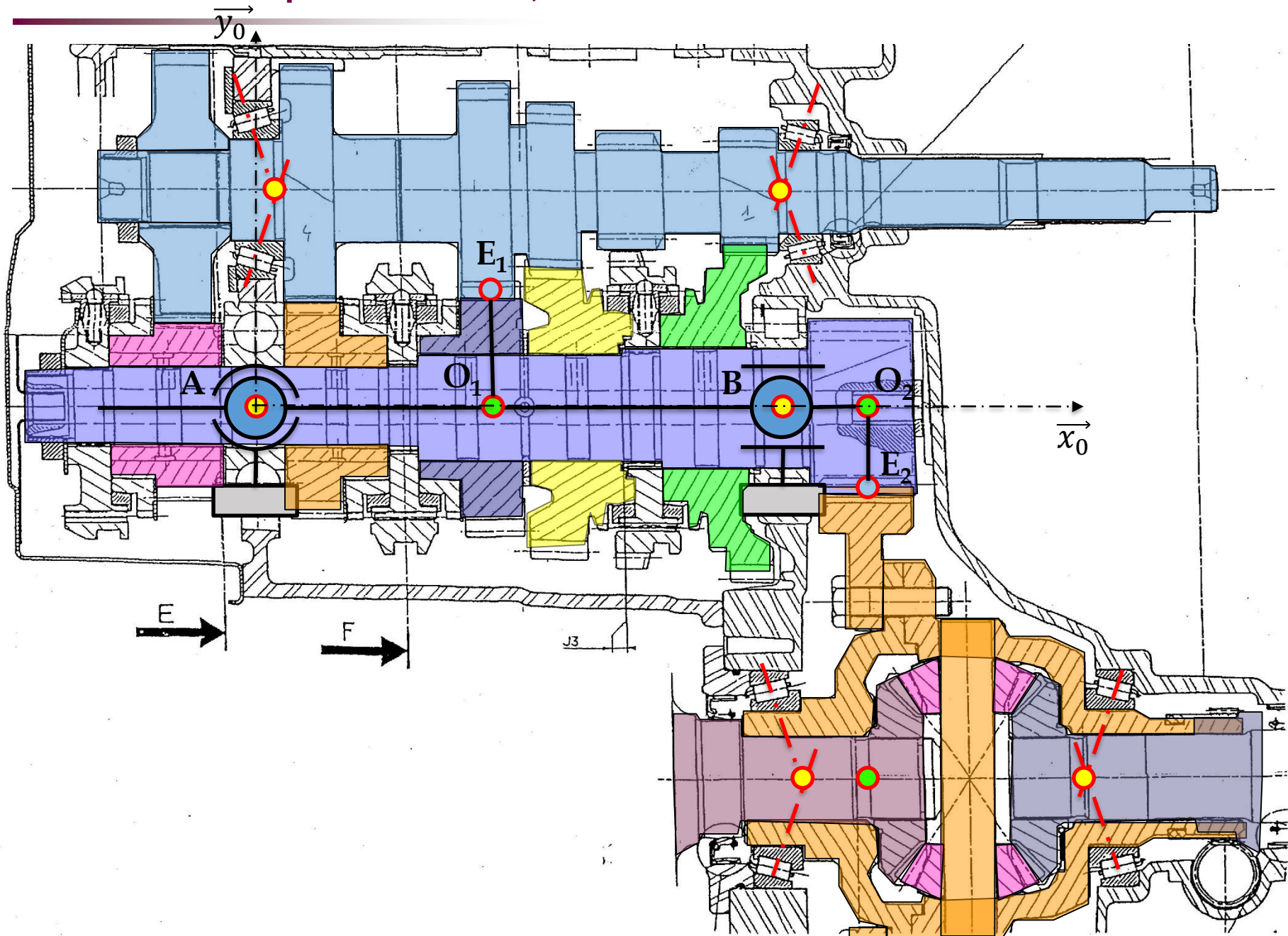
Différentiel
Differential drive

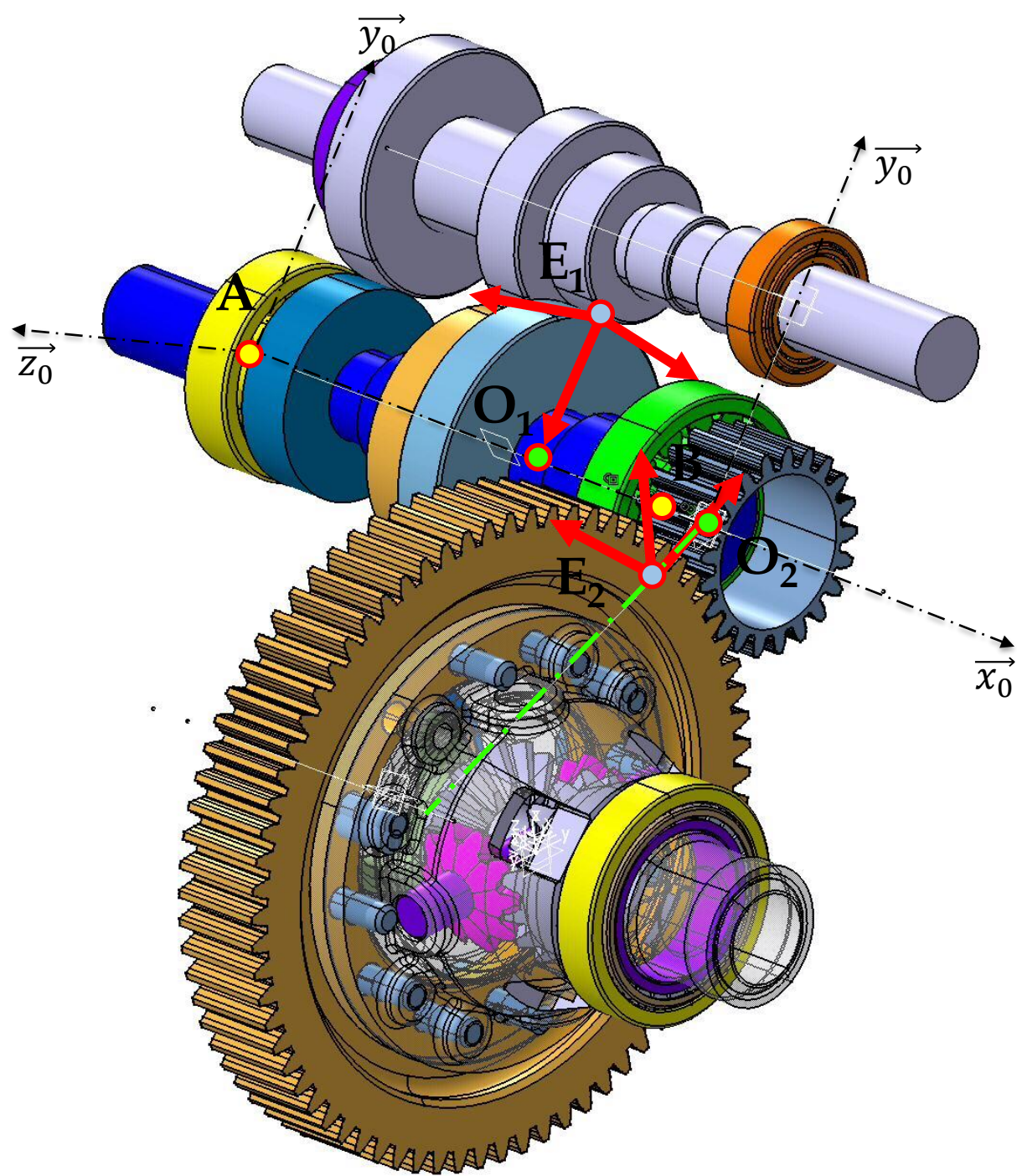
VUE ARRIERE (SANS COUVERCLE)



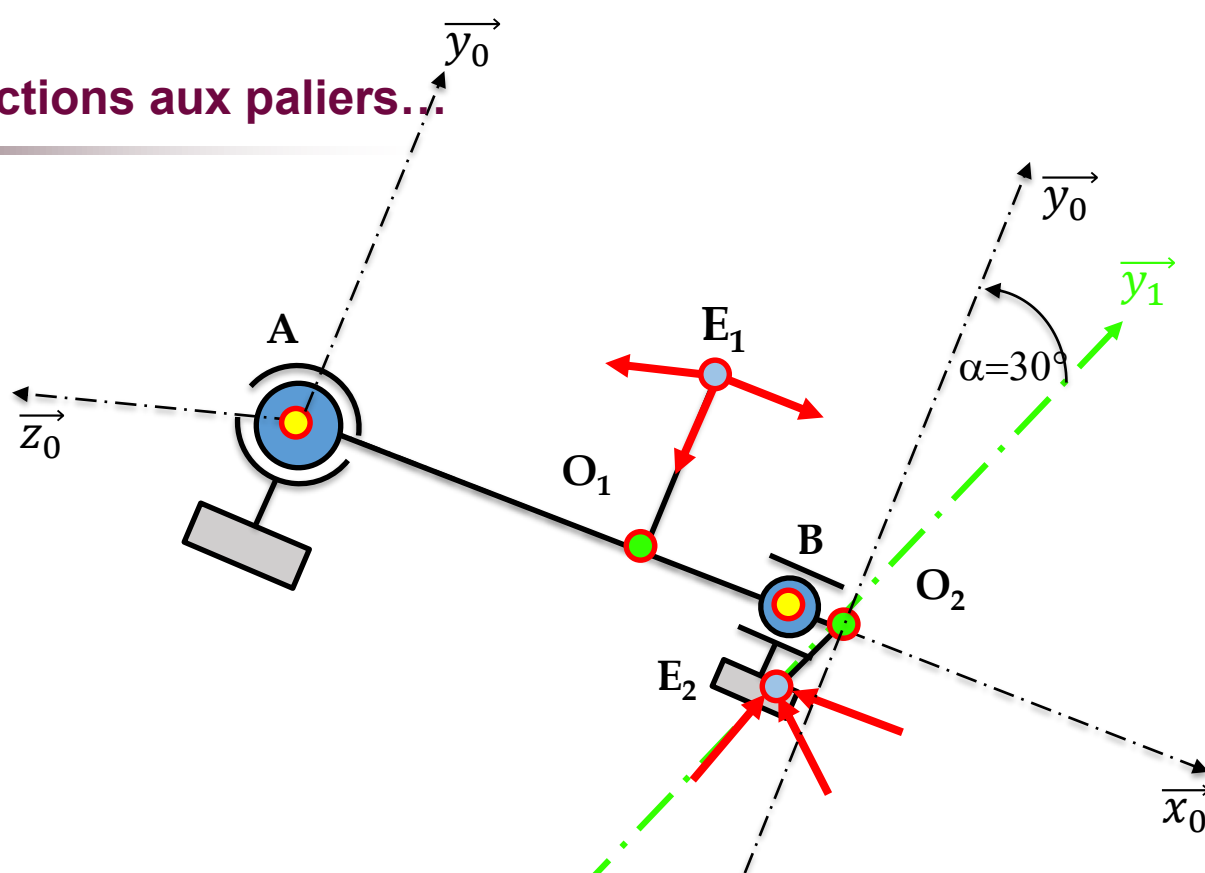


Schématisation: points d'intérêt, axes....





Calcul des réactions aux paliers...



Rotule en A
(Rlt à billes)

Linéaire annulaire
(Rlt rlx cyl)

Ponctuelle E1
(Pignon)

Ponctuelle E2
(Pignon Diff)

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_A = \vec{0}$$

$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_B \\ Z_B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_B = \vec{0}$$

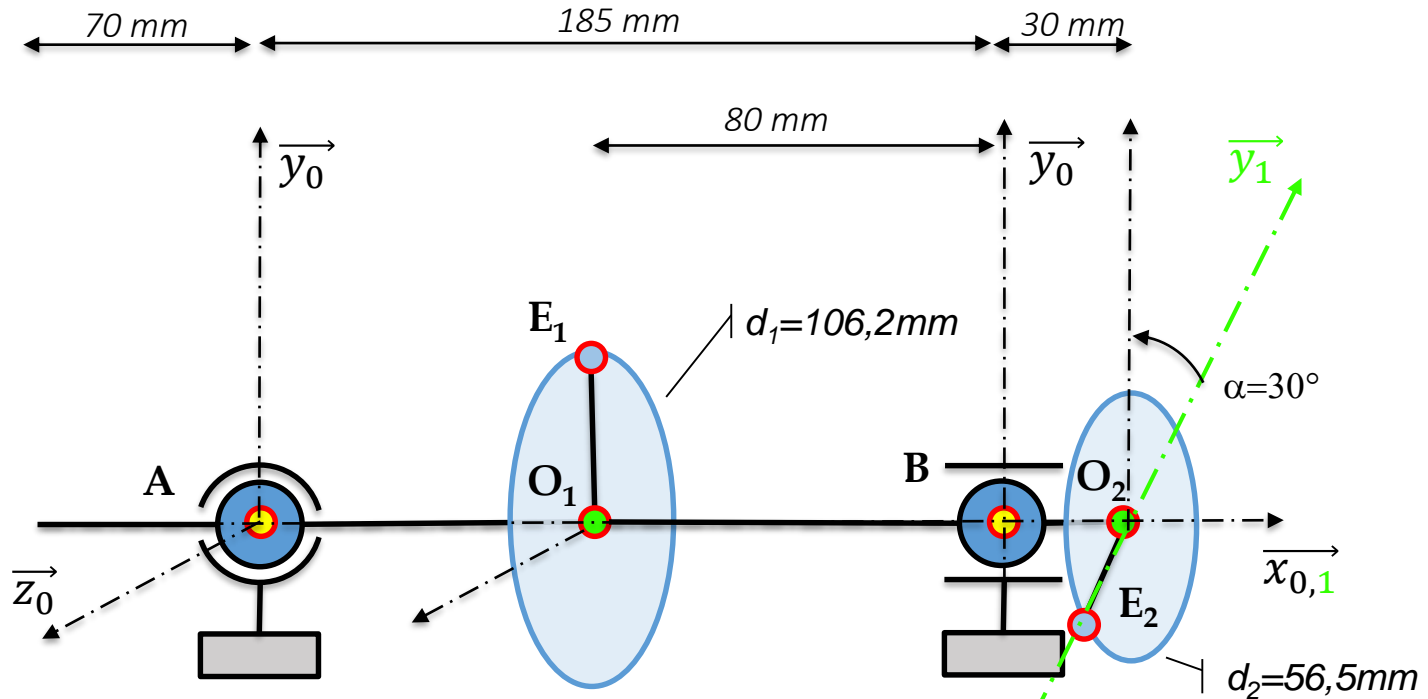
$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} X_1 = 4330\text{N} \\ Y_1 = -2690\text{N} \\ Z_1 = 7370\text{N} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} X_2 = -7060\text{N} \\ Y_2 = 5820\text{N} \\ Z_2 = 13855\text{N} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{0}$$

Calcul des réactions aux paliers...



$$\vec{F}_A = \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix}_0$$

$$\vec{M}_A = \vec{0}$$

$$\vec{F}_1 = \begin{vmatrix} X_1 = 4330N \\ Y_1 = -2690N \\ Z_1 = 7370N \end{vmatrix}_0$$

$$\vec{M}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{F}_B = \begin{vmatrix} 0 \\ Y_B \\ Z_B \end{vmatrix}_0$$

$$\vec{M}_B = \vec{0}$$

$$\vec{F}_2 = \begin{vmatrix} X_2 = -7060N \\ Y_2 = 5820N \\ Z_2 = 13855N \end{vmatrix}_1$$

$$\vec{M}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{F}_2 = \begin{vmatrix} -7060N \\ Y_2 \cos \alpha + Z_2 \sin \alpha = 11968N \\ -Y_2 \sin \alpha + Z_2 \cos \alpha = 9089N \end{vmatrix}$$

Calcul des réactions aux paliers...

$$\vec{F}_1 = \begin{vmatrix} X_1 = 4330N \\ Y_1 = -2690N \\ Z_1 = 7370N \end{vmatrix} \quad \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} X_2 = -7060N \\ Y_2 = 5820N \\ Z_2 = 13855N \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_1 = \vec{0} \quad \vec{M}_2 = \vec{0}$$

$$\begin{cases} X_A + X_1 + X_2 = 0 \\ Y_A + Y_1 + Y_B + Y_2 \cos \alpha + Z_2 \sin \alpha = 0 \\ Z_A + Z_1 + Z_B - Y_2 \sin \alpha + Z_2 \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

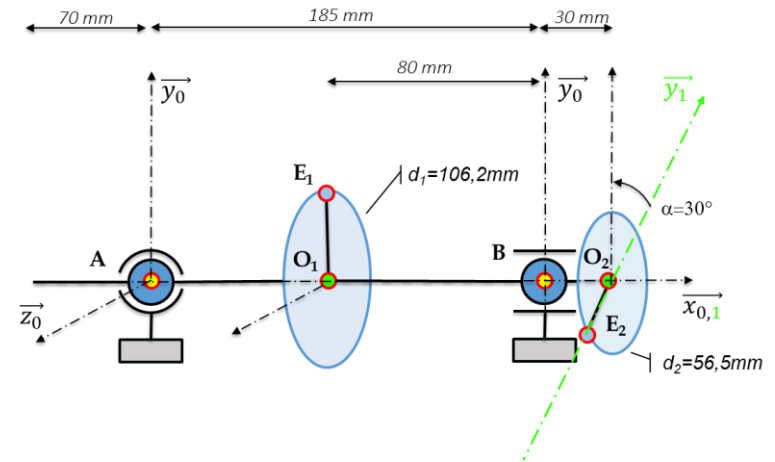
$$\sum \vec{M}_{ext}(A) = \vec{0} = \vec{AE}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{AB} \wedge \vec{F}_B + \vec{AE}_2 \wedge \vec{F}_2$$

$$\vec{0} = \begin{vmatrix} 0.105 \\ 0.0531 \wedge \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.185 \\ 0 \wedge \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ Y_B \\ Z_B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.215 \\ -0.02825 \cos \alpha \wedge \\ 0.02825 \sin \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_2 \\ Y_2 \cos \alpha + Z_2 \sin \alpha \\ -Y_2 \sin \alpha + Z_2 \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.0531 * Z_1 - 0.02825 * Z_2 = 0 \\ Y_B = \frac{1}{0.185} (0.0531 * X_1 - 0.105 * Y_1 - 0.215(Y_2 \cos \alpha + Z_2 \sin \alpha) - 0.02825 * X_2 \cos \alpha) = -10205N \\ Z_B = \frac{1}{0.185} (-0.105 * Z_1 - 0.215(-Y_2 \sin \alpha + Z_2 \cos \alpha) + 0.02825 * X_2 \cdot \sin \alpha) = -15285N \end{cases}$$

$$\vec{F}_A = \begin{vmatrix} X_A = 2730N \\ Y_A = 927N \\ Z_A = -1174N \end{vmatrix}$$

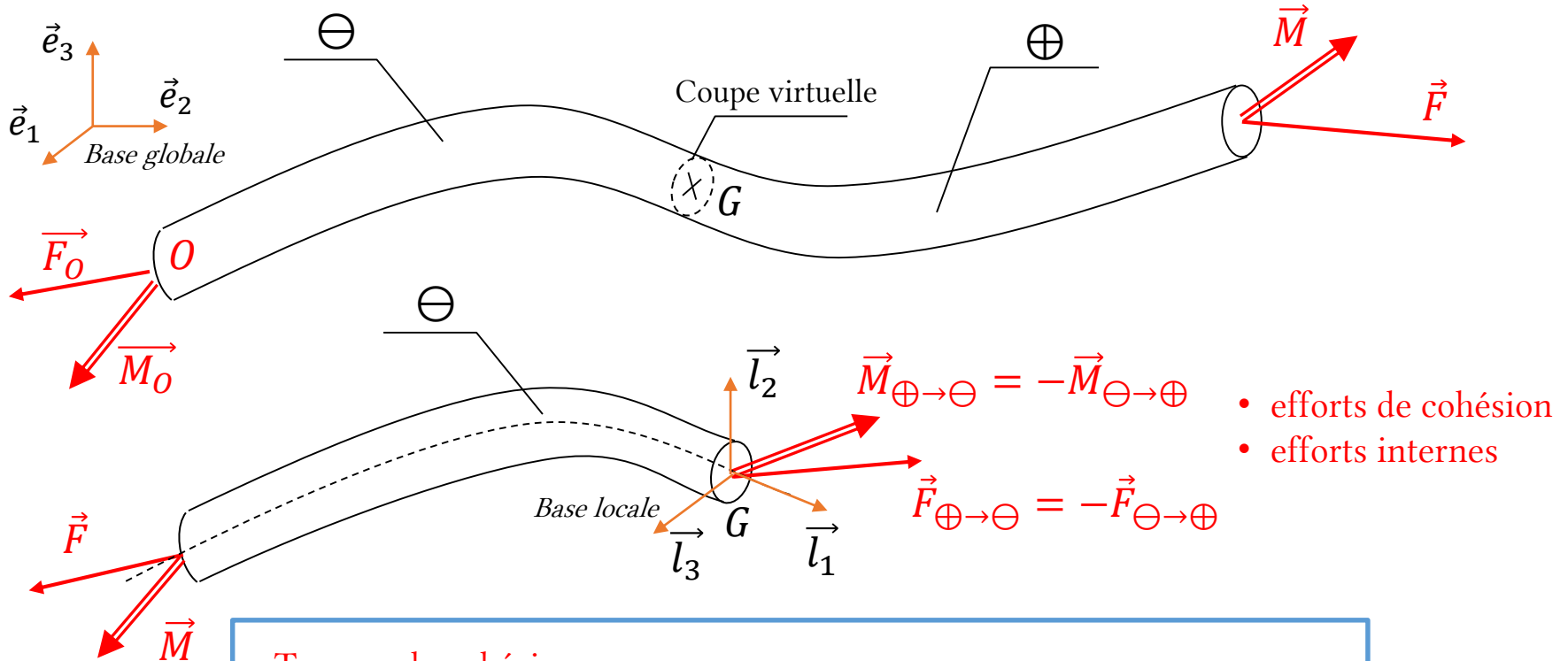
$$\vec{F}_B = \begin{vmatrix} X_B = 0N \\ Y_B = -10205N \\ Z_B = -15285N \end{vmatrix}$$



Rappel de cours: convention, efforts internes, Tenseur de cohésion

On peut toujours couper un solide virtuellement (= de manière fictive) et regarder ce qui se passe à l'intérieur de la matière...

Dans le cas des poutres on calcule les **efforts de cohésion (ou efforts internes)**.



- efforts de cohésion
- efforts internes

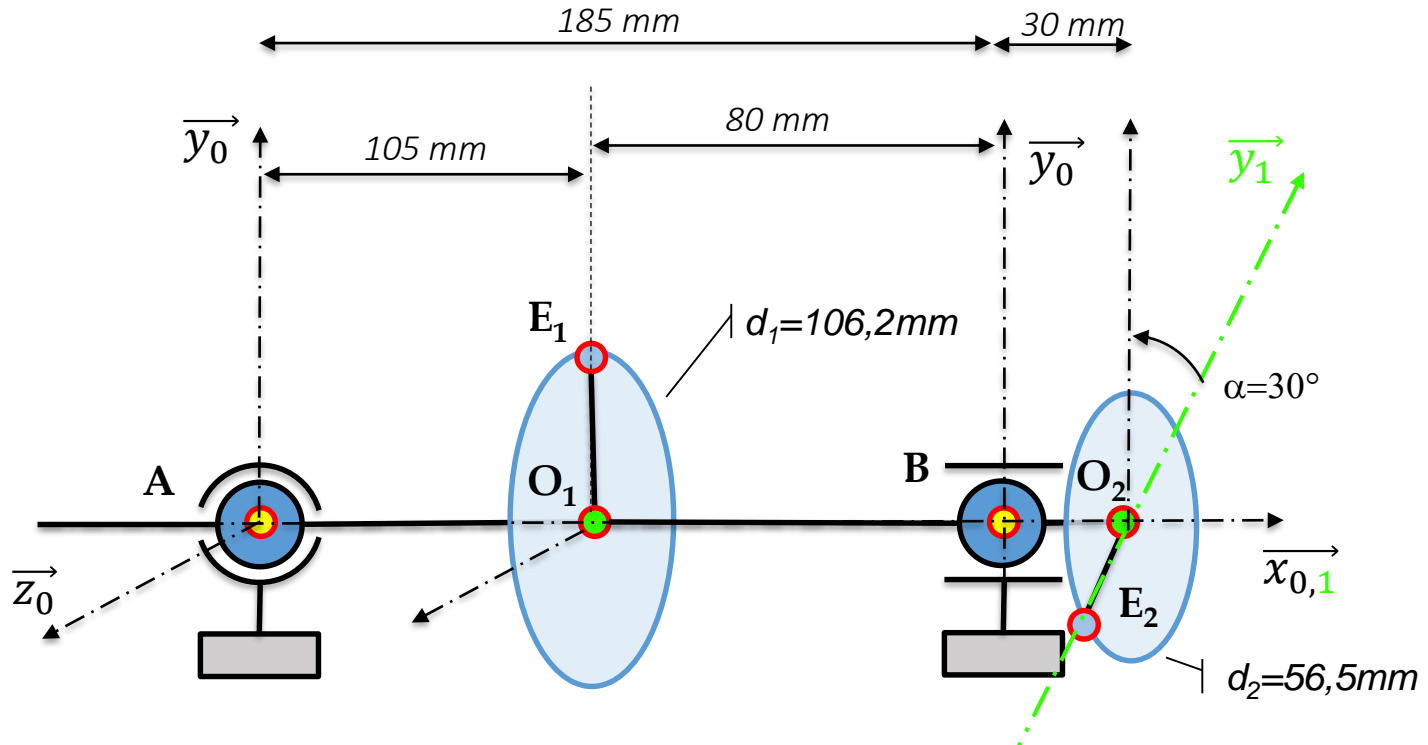
Tenseur de cohésion

$$\{\mathcal{J}_{\oplus \rightarrow \ominus}\} = \begin{Bmatrix} N_1 & M_1 \\ T_2 & M_2 \\ T_3 & M_3 \end{Bmatrix} [G, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]$$

Base propre des moments quadratiques

- N_1 : effort normal
- $T_{2,3}$: efforts tranchants
- M_1 : moment de torsion
- $M_{2,3}$: moments de flexion

Calcul du torseur de cohésion



$$\vec{F}_A = \begin{vmatrix} X_A = 2730N \\ Y_A = 927N \\ Z_A = -1174N \end{vmatrix}_0$$

$$\vec{F}_1 = \begin{vmatrix} X_1 = 4330N \\ Y_1 = -2690N \\ Z_1 = 7370N \end{vmatrix}_0$$

$$\vec{M}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{F}_B = \begin{vmatrix} X_B = 0N \\ Y_B = -10205N \\ Z_B = -15285N \end{vmatrix}_0$$

$$\vec{F}_2 = \begin{vmatrix} X_2 = -7060N \\ Y_2 = 5820N \\ Z_2 = 13855N \end{vmatrix}_1$$

$$\vec{M}_2 = \vec{0}$$

Sur AO_1 , O_1B , BO_2

AO1 : Calcul des efforts intérieurs, torseurs de cohésion

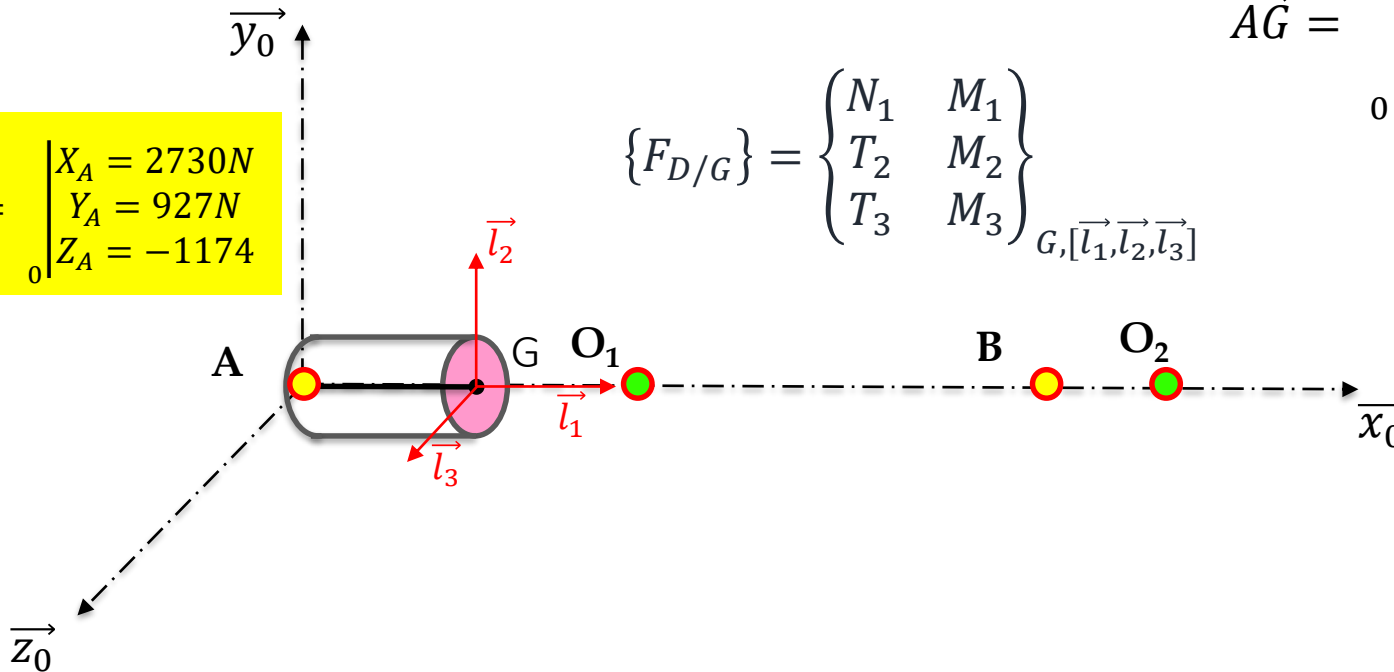
- On garde la partie gauche, PFS en G

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A = 2730N \\ Y_A = 927N \\ Z_A = -1174 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{F_{D/G}\} = \begin{pmatrix} N_1 & M_1 \\ T_2 & M_2 \\ T_3 & M_3 \end{pmatrix}_{G, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]}$$

$$\vec{AG} = \begin{pmatrix} x_G \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_g \in [0, 0, 105]$$



Calcul des efforts intérieurs, torseurs de cohésion

$$\{F_{D/G}\} = \begin{Bmatrix} N_1 & M_1 \\ T_2 & M_2 \\ T_3 & M_3 \end{Bmatrix}_{G, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]}$$

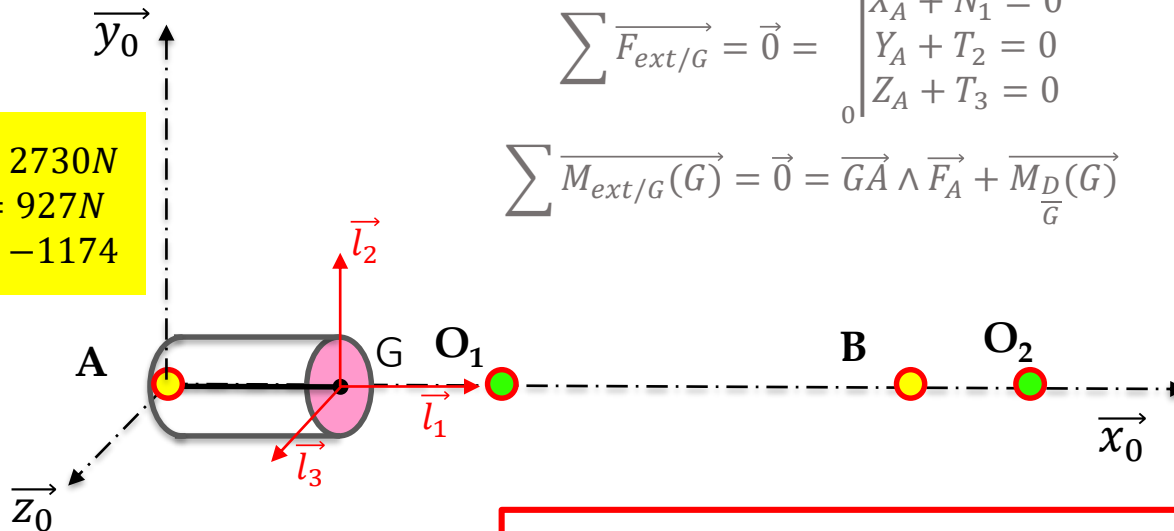
$$\sum \vec{F}_{ext/G} = \vec{0} = \begin{cases} X_A + N_1 = 0 \\ Y_A + T_2 = 0 \\ Z_A + T_3 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{AG} = \begin{cases} x_G \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\sum \vec{M}_{ext/G}(G) = \vec{0} = \vec{GA} \wedge \vec{F}_A + \vec{M}_{\overline{D}}(G)$$

$$x_g \in [0, 0, 105]$$

$$\vec{F}_A = \begin{cases} X_A = 2730N \\ Y_A = 927N \\ Z_A = -1174 \end{cases}$$



$$\sum \vec{M}_{ext/G}(G) = \vec{0} = \vec{GA} \wedge \vec{F}_A + \vec{M}_{\overline{D}}(G)$$

$$\vec{0} = \vec{0} + \begin{vmatrix} -x_G \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{vmatrix}$$

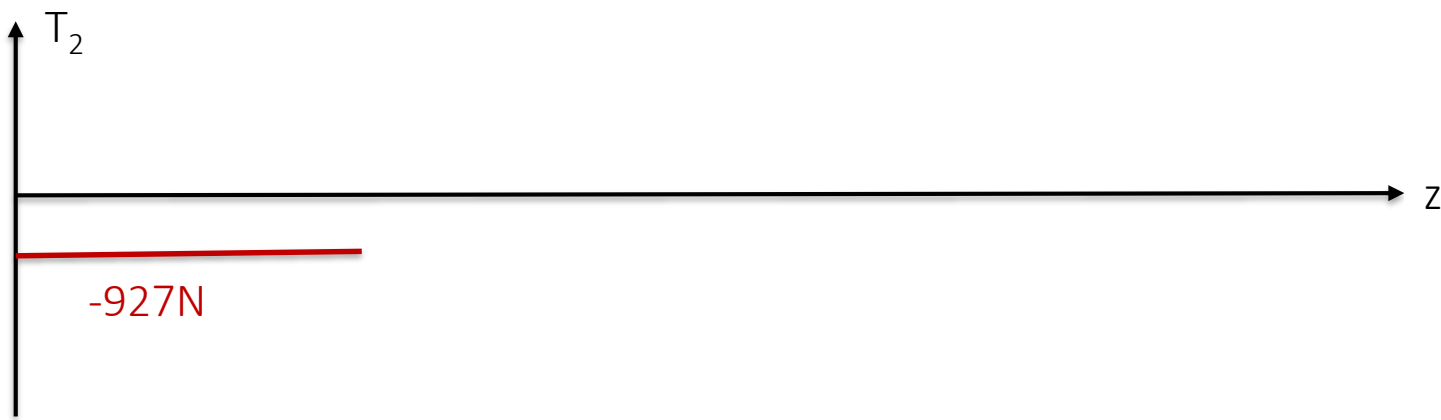
$$\vec{R}_{D/G_AO_1} = \begin{cases} N_1 = -X_A = -2730N \\ T_2 = -Y_A = -927N \\ T_3 = -Z_A = 1174N \end{cases}$$

$$\vec{M}_{\overline{D}}(G) = \begin{cases} M_1 = 0 \\ M_2 = -x_G \cdot Z_A = x_G \cdot 1174 \text{ N.m} \\ M_3 = x_G \cdot Y_A = x_G \cdot 927 \text{ N.m} \end{cases}$$

$$\vec{M}_{\overline{D}}(O_1) = \begin{cases} M_1 = 0 \\ M_2 = 123 \text{ N.m} \\ M_3 = 97 \text{ N.m} \end{cases}$$

Evolution du torseur de cohésion

$$\overrightarrow{R_{D/G_{AO_1}}} = \begin{matrix} N_1 = -2730N \\ T_2 = -927N \\ T_3 = 1174N \end{matrix}_0$$



Evolution du torseur de cohésion



$$\overline{M_D(G)} = \begin{matrix} M_1 = 0 \\ M_2 = -x_G \cdot Z_A = x_G \cdot 1174 \text{ N.m} \\ M_3 = x_G \cdot Y_A = x_G \cdot 927 \text{ N.m} \end{matrix}_0$$



$$\overline{M_D(O_1)} = \begin{matrix} M_1 = 0 \\ M_2 = 123 \text{ N.m} \\ M_3 = 97 \text{ N.m} \end{matrix}_0$$



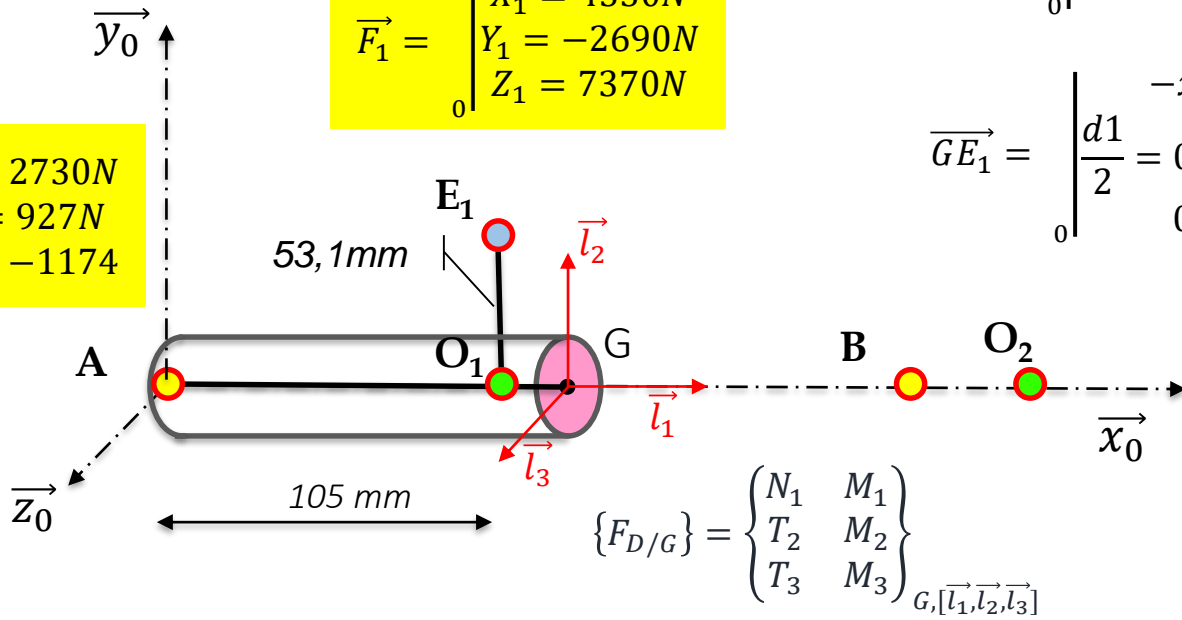
O₁B : Calcul des efforts intérieurs, torseurs de cohésion

$$\vec{F}_A = \begin{cases} X_A = 2730N \\ Y_A = 927N \\ Z_A = -1174 \end{cases}_0$$

$$\vec{F}_1 = \begin{cases} X_1 = 4330N \\ Y_1 = -2690N \\ Z_1 = 7370N \end{cases}_0$$

$$\vec{AG} = \begin{cases} 0,105 + x_G \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad x_g \in [0, 0,08]$$

$$\vec{GE}_1 = \begin{cases} -x_G \\ \frac{d1}{2} = 0,0531 \\ 0 \end{cases}$$



$$\sum \vec{F}_{ext/G} = \vec{0} = \begin{cases} X_A + X_1 + N_1 = 0 \\ Y_A + Y_1 + T_2 = 0 \\ Z_A + Z_1 + T_3 = 0 \end{cases}_0$$

$$\vec{R}_{D/G_{-}O_1^+B^-} = \begin{cases} N_1 = -7060N \\ T_2 = 1763N \\ T_3 = -6196N \end{cases}_0$$

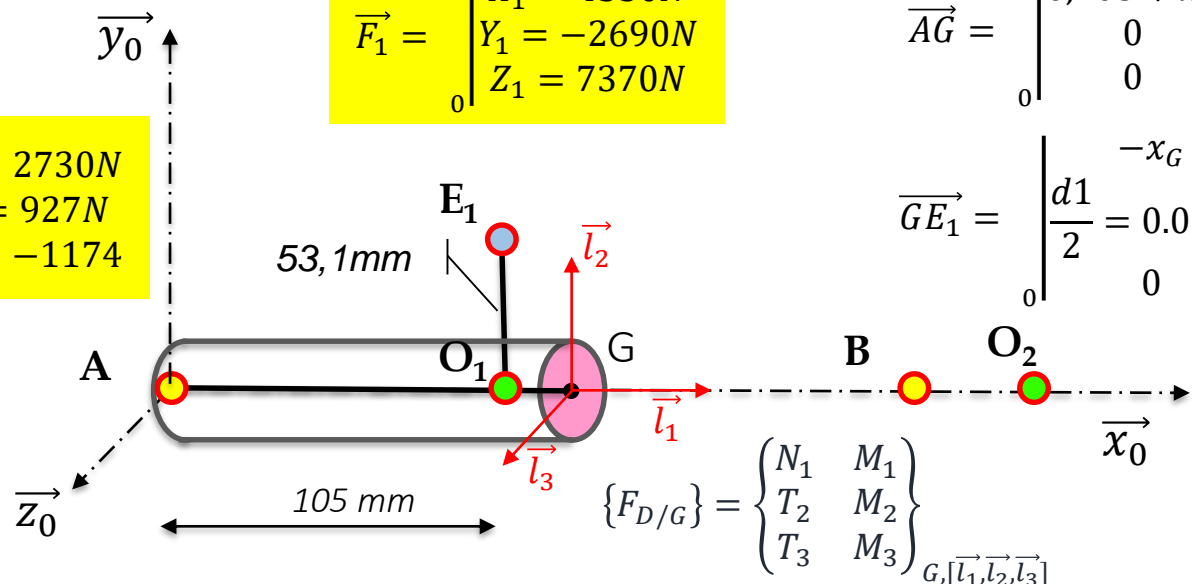
Calcul des efforts intérieurs, torseurs de cohésion

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A = 2730N \\ Y_A = 927N \\ Z_A = -1174 \end{pmatrix}_0$$

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} X_1 = 4330N \\ Y_1 = -2690N \\ Z_1 = 7370N \end{pmatrix}_0$$

$$\vec{AG} = \begin{pmatrix} 0,105 + x_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_g \in [0, 0,08]$$

$$\vec{GE}_1 = \begin{pmatrix} -x_G \\ \frac{d1}{2} = 0.0531 \\ 0 \end{pmatrix}_0$$



$$\{F_{D/G}\} = \begin{pmatrix} N_1 & M_1 \\ T_2 & M_2 \\ T_3 & M_3 \end{pmatrix}_{G, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]}$$

$$\sum \vec{M}_{\frac{ext}{G}} = \vec{0} = \vec{GA} \wedge \vec{F}_A + \vec{GE}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{M}_{\frac{D}{G}}$$

$$\begin{vmatrix} -0.105 - x_G & 2730 \\ 0 & 927 \\ 0 & -1174 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -x_G & 4330 \\ 0.0531 & -2690 \\ 0 & 7370 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 391 \\ -1174 \cdot (0.105 + x_G) + 7370 \cdot x_G & M_1 \\ -927 \cdot (0.105 + x_G) & M_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{\frac{D}{G}} = \begin{pmatrix} M_1 = -0.391 N.m \\ M_2 = -6196 \cdot x_G + 123 N.m \\ M_3 = -1763 x_G + 327 N.m \end{pmatrix}_0$$

$x_G = 0$

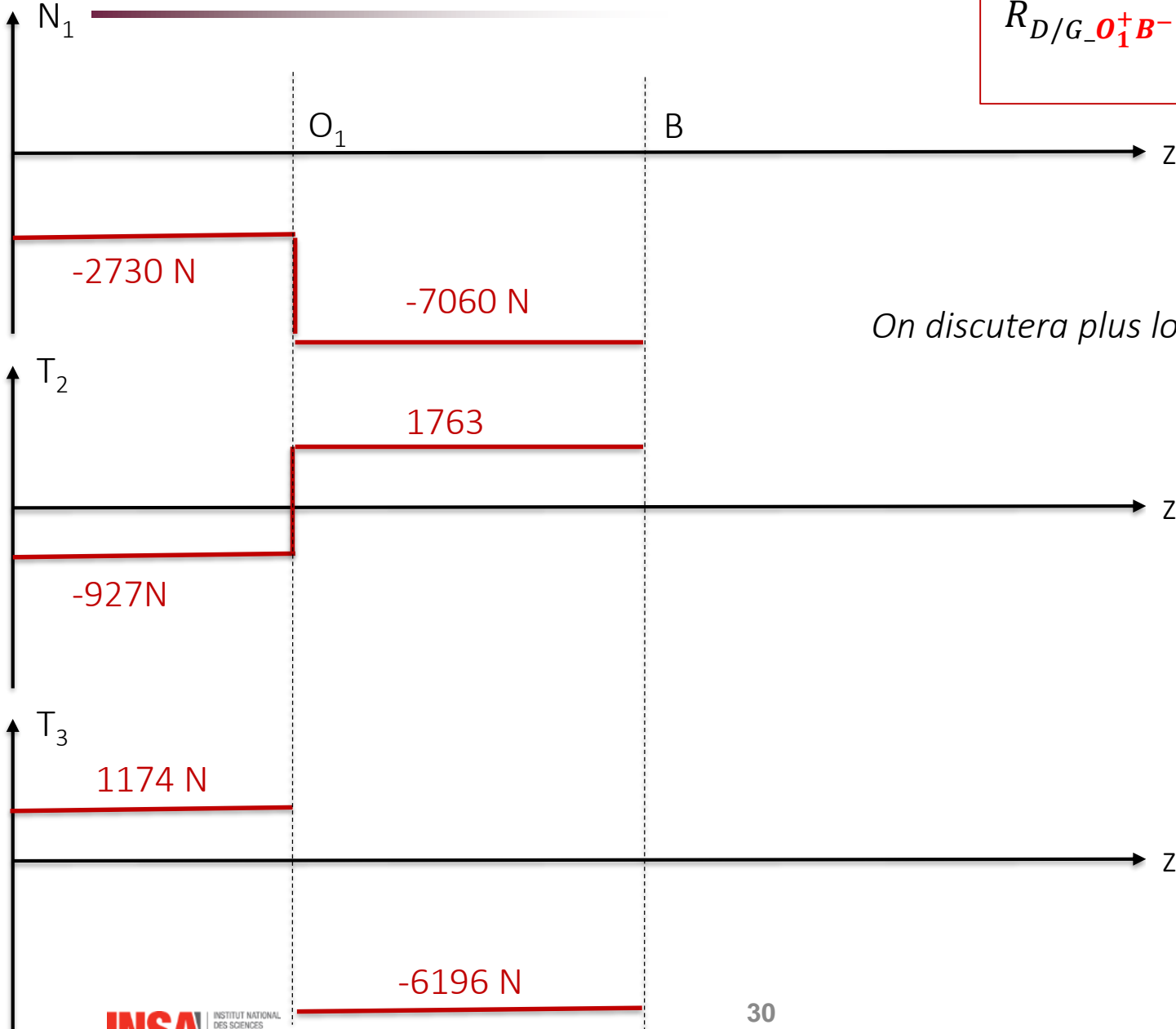
$$\vec{M}_{\frac{D}{G}}(\mathbf{O}_1^+) = \begin{pmatrix} M_1 = -391 N.m \\ M_2 = 123 N.m \\ M_3 = 327 N.m \end{pmatrix}_0$$

$x_G = 0,08$

$$\vec{M}_{\frac{D}{G}}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} M_1 = -391 N.m \\ M_2 = -372 N.m \\ M_3 = 186 N.m \end{pmatrix}_0$$

Evolution du torseur de cohésion

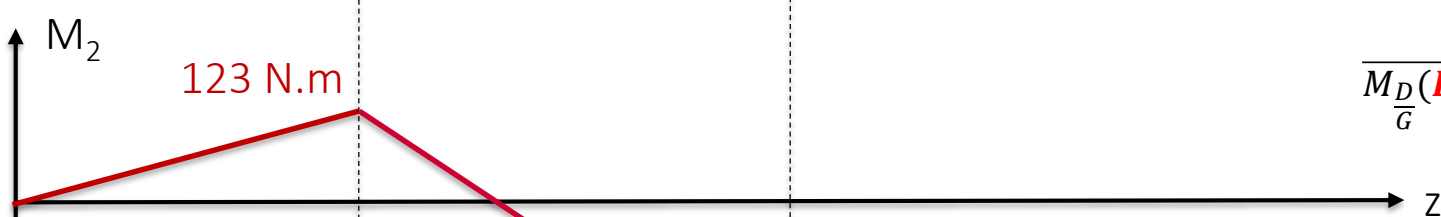
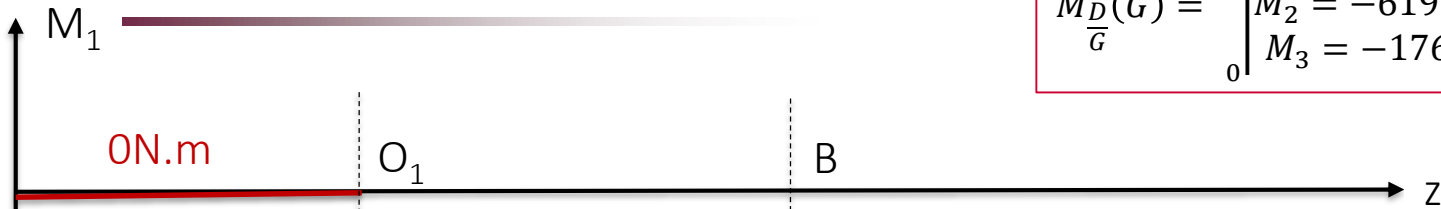
$$\overrightarrow{R}_{D/G_{-}O_1^+B^-} = \begin{matrix} N_1 = -7060N \\ T_2 = 1763N \\ T_3 = -6196N \end{matrix}$$



On discutera plus loin de la discontinuité

Evolution du torseur de cohésion

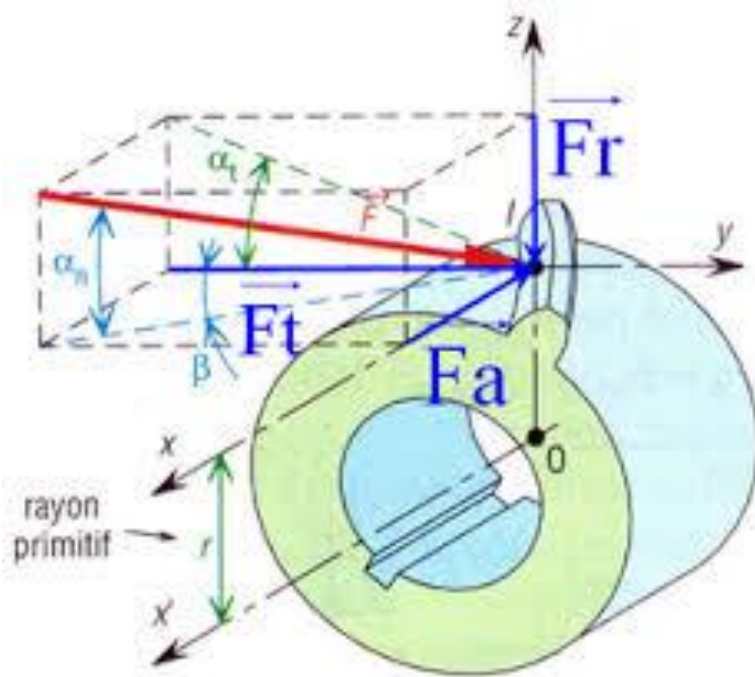
$$\overrightarrow{M_D(G)} = \begin{matrix} M_1 = -0.391 \text{ N.m} \\ M_2 = -6196 \cdot x_G + 123 \text{ N.m} \\ M_3 = -1763x_G + 327 \text{ N.m} \end{matrix}$$



$$\overrightarrow{M_D(O_1^+)} = \begin{matrix} M_1 = -391 \text{ N.m} \\ M_2 = 123 \text{ N.m} \\ M_3 = 327 \text{ N.m} \end{matrix}$$

$$\overrightarrow{M_D(B)} = \begin{matrix} M_1 = -391 \text{ N.m} \\ M_2 = -372 \text{ N.m} \\ M_3 = 186 \text{ N.m} \end{matrix}$$

Discontinuité dans le torseur retour sur la modèle d'engrenage



✓ Caractéristiques de l'engrenages

- R : Rayon primitif
- α : angle de pression
- β : angle d'hélice

✓ Caractéristiques des efforts

- F : effort résultant à la denture

- F_t : effort tangentiel

$$F_t = F \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$

- F_r : effort radial

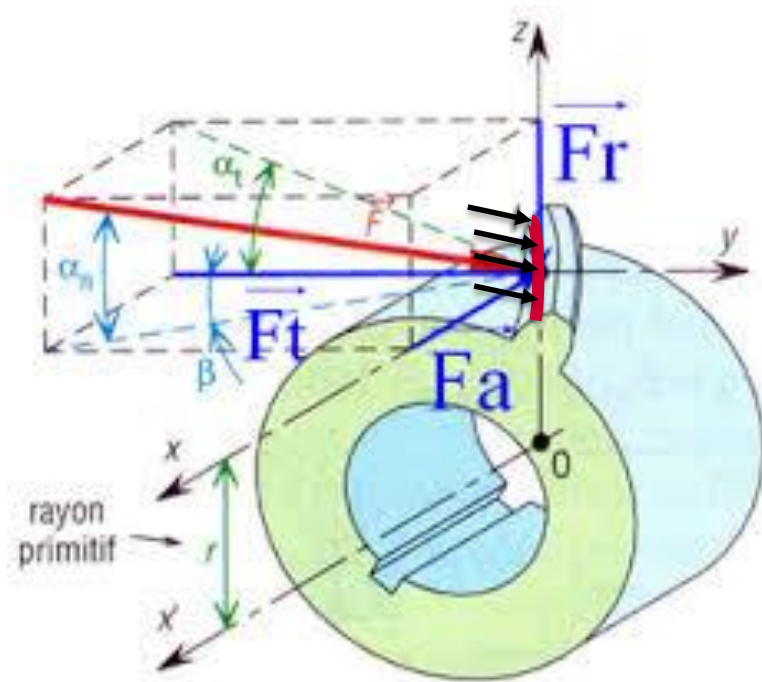
$$F_r = F \cdot \sin(\alpha)$$

- F_a : effort axial

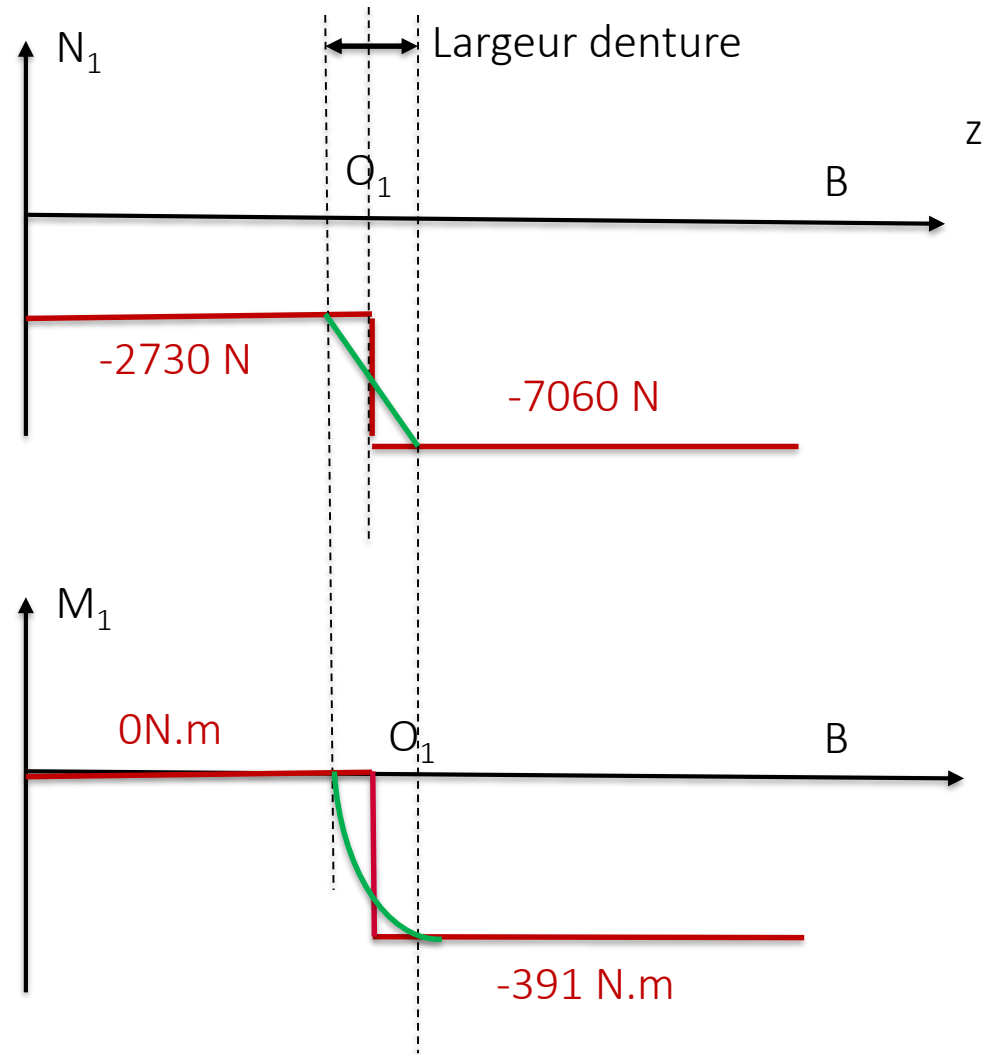
$$F_a = F \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

<https://pierreprovot.wordpress.com/les-engrenages/les-engrenages-droits-denture-hlicoidale/>

Discontinuité dans le torseur retour sur la modèle d'engrenage



Dans la réalité les efforts sont répartis le long de la denture et sur plusieurs dents



Rq : La forme réelle dépendra de la répartition des efforts le long de la denture (pas linéaire)

Calcul des efforts intérieurs, torseurs de cohésion

Approche 1

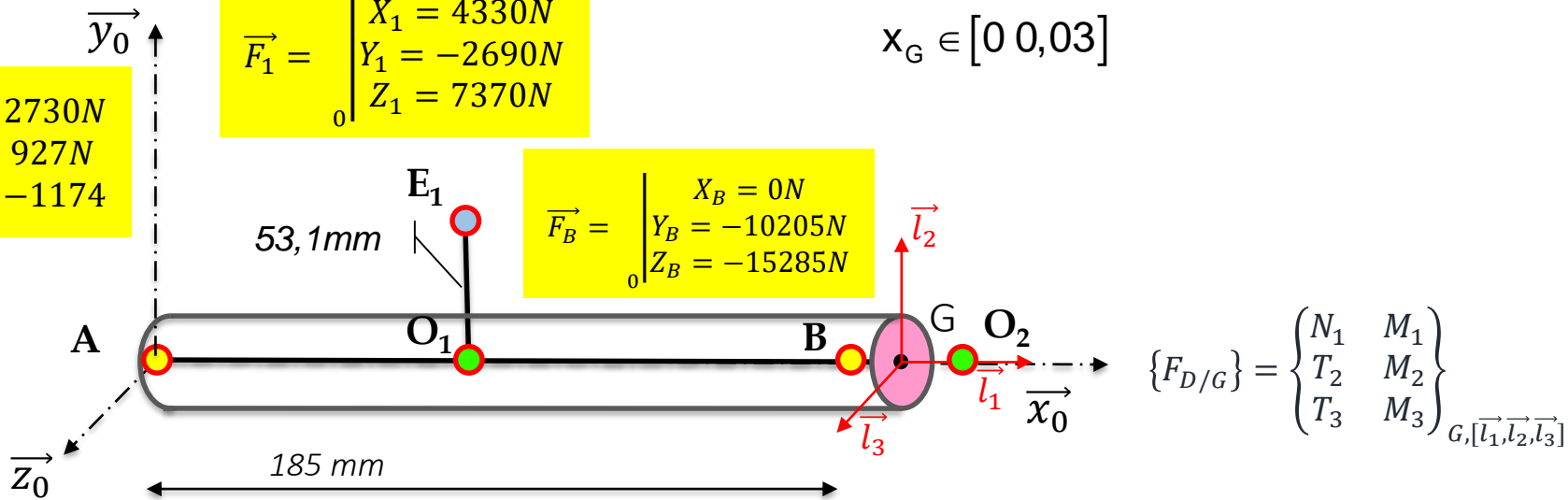
$$\vec{AG} = \begin{pmatrix} 0,185 + x_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_G \in [0, 0,03]$$

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A = 2730N \\ Y_A = 927N \\ Z_A = -11174 \end{pmatrix}_0$$

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} X_1 = 4330N \\ Y_1 = -2690N \\ Z_1 = 7370N \end{pmatrix}_0$$

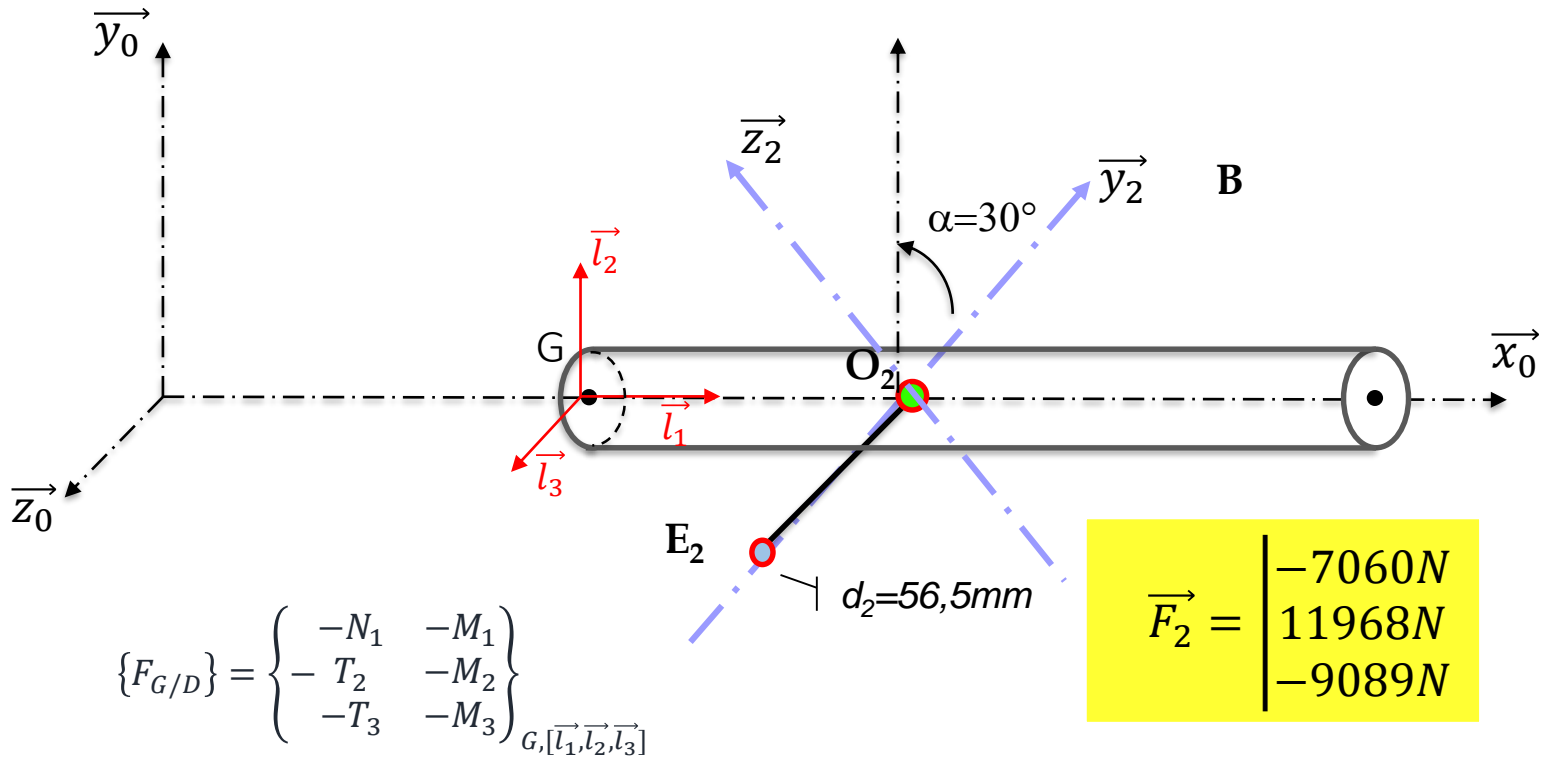
$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} X_B = 0N \\ Y_B = -10205N \\ Z_B = -15285N \end{pmatrix}_0$$



Calcul des efforts intérieurs, torseurs de cohésion

Approche 2

$$\overrightarrow{GO_2} = \begin{pmatrix} x_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_G \in [0, 0,03]$$



$$\{F_{G/D}\} = \begin{pmatrix} -N_1 & -M_1 \\ -T_2 & -M_2 \\ -T_3 & -M_3 \end{pmatrix}_{G, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]}$$

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -7060 \text{ N} \\ 11968 \text{ N} \\ -9089 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Calcul des efforts intérieurs, torseurs de cohésion

Approche 1

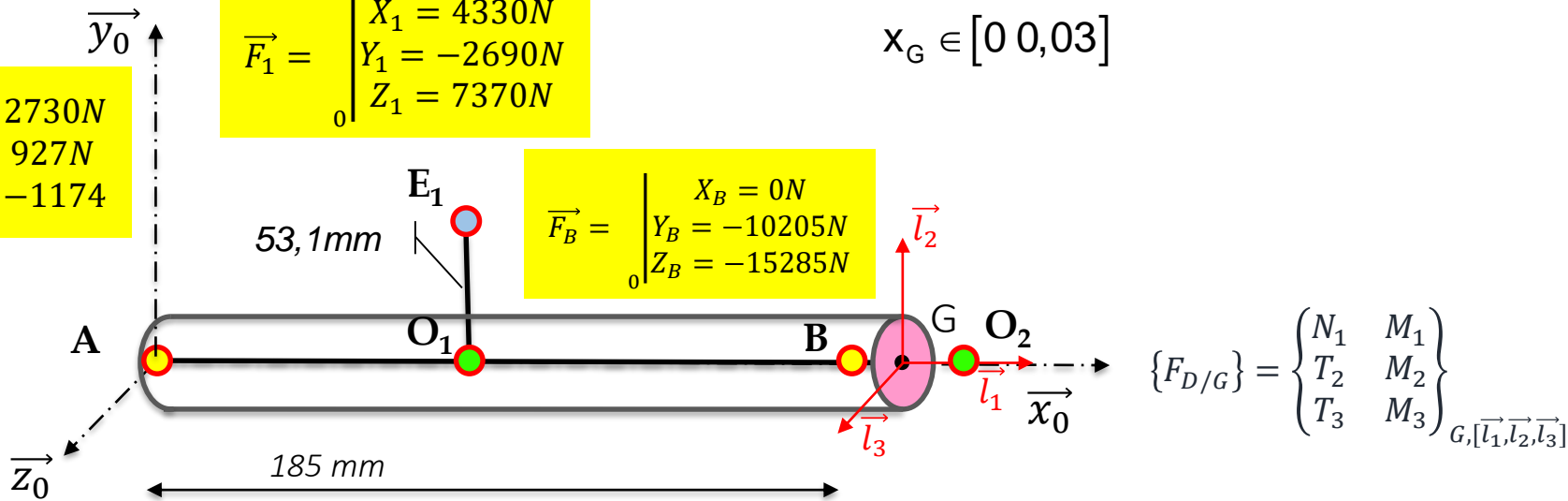
$$\vec{AG} = \begin{pmatrix} 0,185 + x_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_G \in [0, 0,03]$$

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A = 2730N \\ Y_A = 927N \\ Z_A = -1174 \end{pmatrix}_0$$

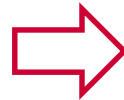
$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} X_1 = 4330N \\ Y_1 = -2690N \\ Z_1 = 7370N \end{pmatrix}_0$$

$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} X_B = 0N \\ Y_B = -10205N \\ Z_B = -15285N \end{pmatrix}_0$$



$$\{F_{D/G}\} = \begin{pmatrix} N_1 & M_1 \\ T_2 & M_2 \\ T_3 & M_3 \end{pmatrix}_{G, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]}$$

$$\vec{R}_{D/G_{O_1^+}} = \begin{pmatrix} N_1 = -X_A - X_1 - X_B \\ T_2 = -Y_A - Y_1 - Y_B \\ T_3 = -Z_A - Z_1 - Z_B \end{pmatrix}_0$$



$$\vec{R}_{D/G_{B+O_2^-}} = \begin{pmatrix} N_1 = -7060N \\ T_2 = 11968N \\ T_3 = 9089N \end{pmatrix}_0$$

Calcul des efforts intérieurs, torseurs de cohésion

Approche 1

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} X_A = 2730N \\ Y_A = 927N \\ Z_A = -1174 \end{pmatrix}$$

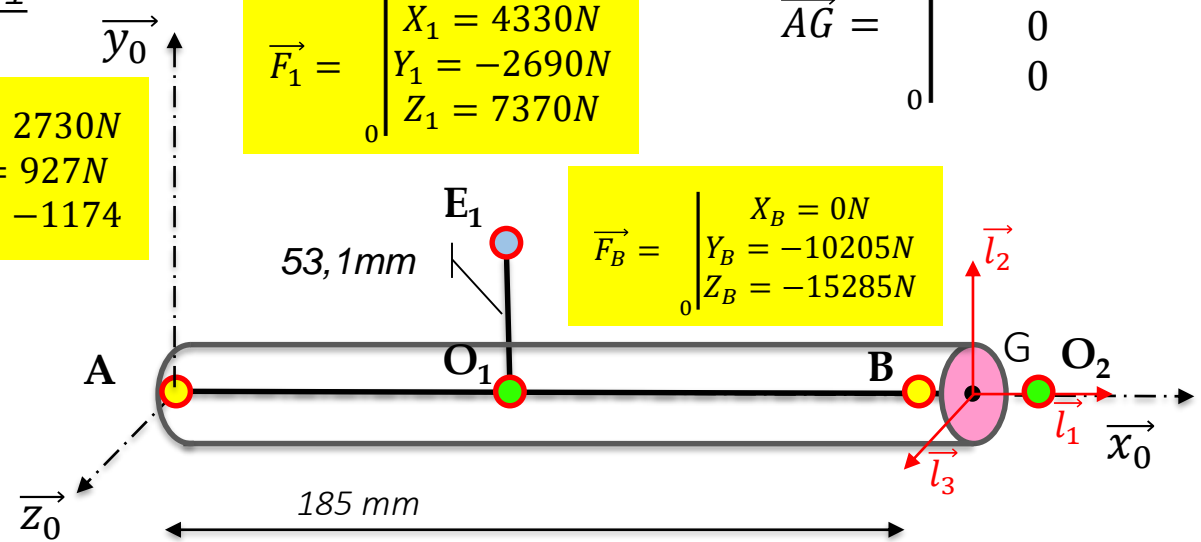
$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} X_1 = 4330N \\ Y_1 = -2690N \\ Z_1 = 7370N \end{pmatrix}$$

$$\vec{AG} = \begin{pmatrix} 0,185 + x_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{GE}_1 = \begin{pmatrix} -0,08 - x_G \\ 0,0531 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_B = \begin{pmatrix} X_B = 0N \\ Y_B = -10205N \\ Z_B = -15285N \end{pmatrix}$$

$$\vec{GB} = \begin{pmatrix} -x_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

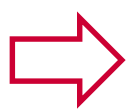


$$\{F_{D/G}\} = \begin{pmatrix} N_1 & M_1 \\ T_2 & M_2 \\ T_3 & M_3 \end{pmatrix}_{G, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]}$$

$$\sum \overline{M_{ext}}_G = \vec{0} = \vec{GA} \wedge \vec{F}_A + \vec{GE}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{GB} \wedge \vec{F}_B + \overline{M_{D/G}}$$

$$\begin{vmatrix} -0,185 - x_G & 2730 \\ 0 & 927 \\ 0 & -1174 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -0,08 - x_G & 4330 \\ 0,0531 & -2690 \\ 0 & 7370 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -x_G & 0 \\ 0 & -10205 \\ 0 & -15285 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ -1174 \cdot (0,185 + x_G) \\ -927 \cdot (0,185 + x_G) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 391 \\ 7370 \cdot (0,08 + x_G) \\ 2690 \cdot (0,08 + x_G) - 230 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ -15285 \cdot x_G \\ +10205 \cdot x_G \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{vmatrix} = \vec{0}$$



$$\begin{cases} M_1 = -391 \text{ N.m} \\ M_2 = 9089 \cdot x_G - 372 \\ M_3 = -11968 x_G + 186 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1 = -391 \text{ N.m} \\ M_2 = -372 \text{ N.m} \\ M_3 = 186 \text{ N.m} \end{cases}$$

En B+

$$\begin{cases} M_1 = -391 \text{ N.m} \\ M_2 = -100 \text{ N.m} \\ M_3 = -173 \text{ N.m} \end{cases}$$

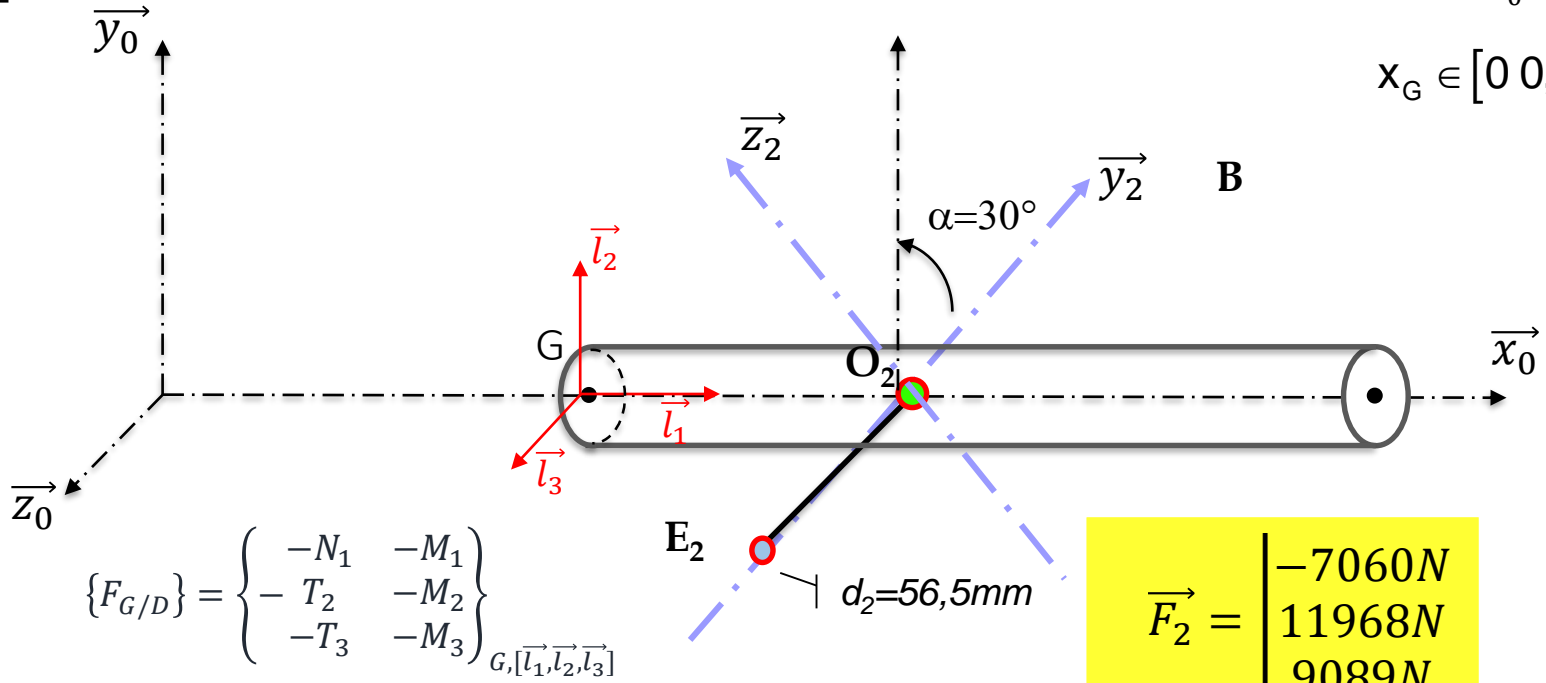
En O2-

Calcul des efforts intérieurs, torseurs de cohésion

$$\overrightarrow{GO_2} = \begin{pmatrix} x_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_G \in [0, 0,03]$$

Approche 2



$$\{F_{G/D}\}_{G, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]} = \begin{pmatrix} -N_1 & -M_1 \\ -T_2 & -M_2 \\ -T_3 & -M_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -7060 \text{ N} \\ 11968 \text{ N} \\ 9089 \text{ N} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -N_1 - 7060 = 0 \\ -T_2 + 11968 = 0 \\ -T_3 9089 = 0 \end{cases}$$



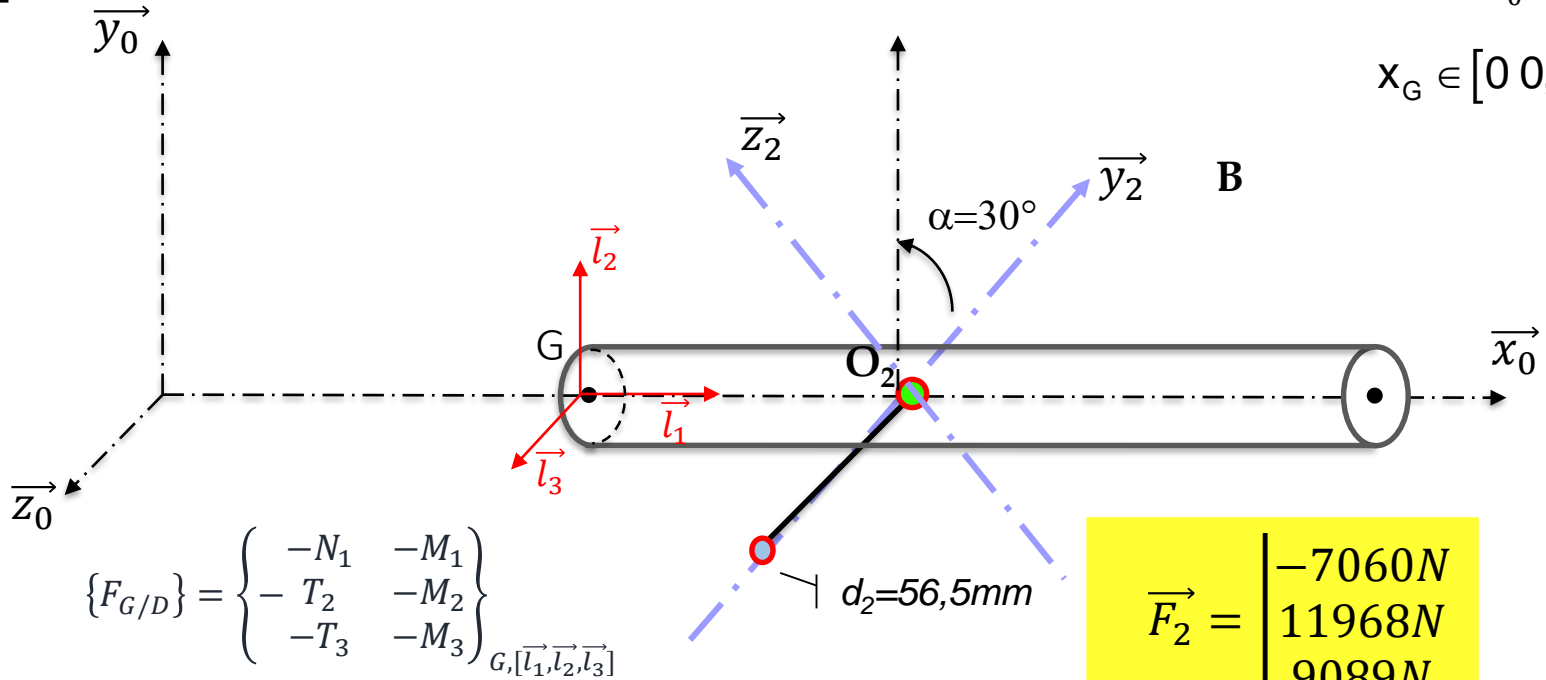
$$\overrightarrow{R_{D/G_B+O_2^-}} = \begin{cases} N_1 = -7060 \text{ N} \\ T_2 = 11968 \text{ N} \\ T_3 = 9089 \text{ N} \end{cases}$$

Calcul des efforts intérieurs, torseurs de cohésion

$$\overrightarrow{GO_2} = \begin{vmatrix} x_G \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$x_G \in [0, 0,03]$$

Approche 2

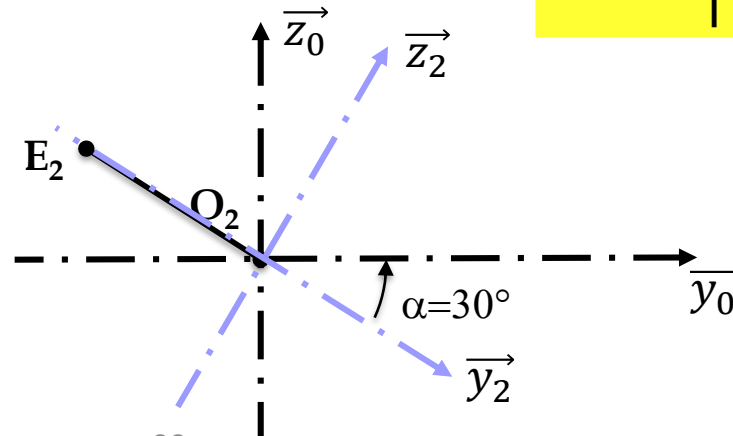


$$\{F_{G/D}\}_{G, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]} = \begin{Bmatrix} -N_1 & -M_1 \\ -T_2 & -M_2 \\ -T_3 & -M_3 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_2 = \begin{vmatrix} -7060N \\ 11968N \\ 9089N \end{vmatrix}$$

$$\sum \overrightarrow{M_{ext}(G)} = \vec{0} = \overrightarrow{GE_2} \wedge \overrightarrow{F_{E_2}} + \overrightarrow{M_G(G)}$$

$$\overrightarrow{G_2E_2} = \begin{vmatrix} x_G \\ -\frac{d_2}{2} \cos 30 = -0.0245 \\ \frac{d_2}{2} \sin 30 = 0.0141 \\ 0 \end{vmatrix}$$

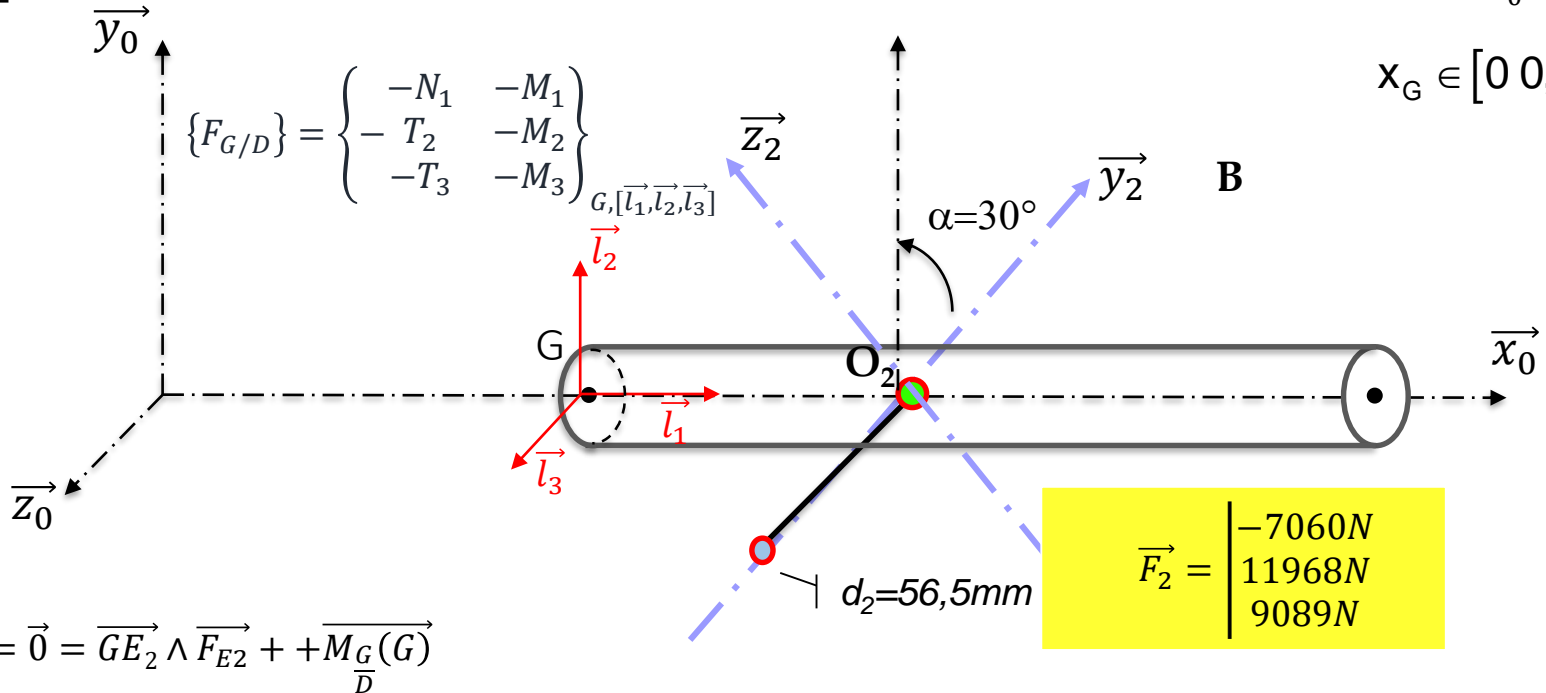


Calcul des efforts intérieurs, torseurs de cohésion

$$\overrightarrow{GO_2} = \begin{pmatrix} x_G \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_G \in [0, 0,03]$$

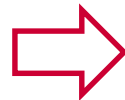
Approche 2



$$\overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} -7060 \text{ N} \\ 11968 \text{ N} \\ 9089 \text{ N} \end{pmatrix}$$

$$\sum \overrightarrow{M_{ext}}(G) = \vec{0} = \overrightarrow{GE_2} \wedge \overrightarrow{F_{E_2}} + \overrightarrow{M_G}(G)$$

$$\begin{pmatrix} x_G \\ -0.0245 \\ 0.0141 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -7060 \\ 11968 \\ 9089 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -M_1 \\ -M_2 \\ -M_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

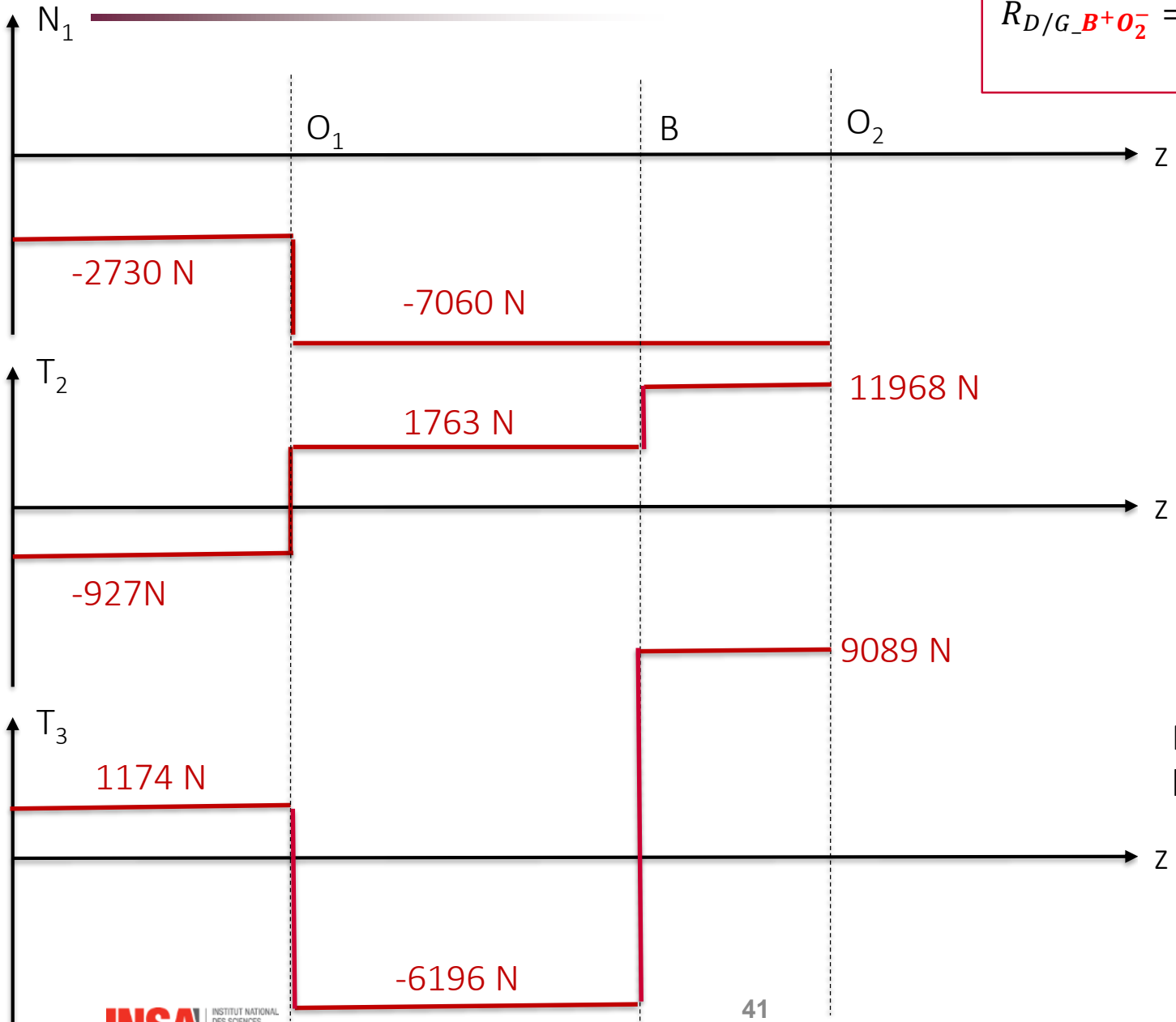


$$\begin{cases} M_1 = -391 \text{ N.m} \\ M_2 = 9089 \cdot x_G - 100 \\ M_3 = -11968 x_G - 173 \end{cases}$$

Attention : Le x_G n'est pas défini de la même manière que dans l'approche 1

Evolution du torseur de cohésion

$$\overrightarrow{R_{D/G_B+O_2^-}} = \begin{vmatrix} N_1 = -7060N \\ T_2 = 11968N \\ T_3 = 9089N \end{vmatrix}_0$$



$$\overrightarrow{F_2} = \begin{vmatrix} -7060N \\ 11968N \\ 9089N \end{vmatrix}$$

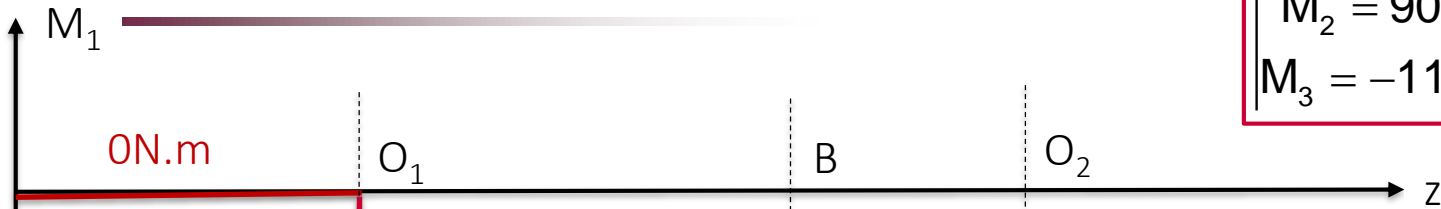
Rq : On retrouve bien les efforts en E2

Evolution du torseur de cohésion

$$M_1 = -391 \text{ N.m}$$

$$M_2 = 9089.x_G - 372$$

$$M_3 = -11968x_G + 186$$



-391 N.m

$$M_1 = -391 \text{ N.m}$$

$$M_2 = -372 \text{ N.m}$$

$$M_3 = 186 \text{ N.m}$$

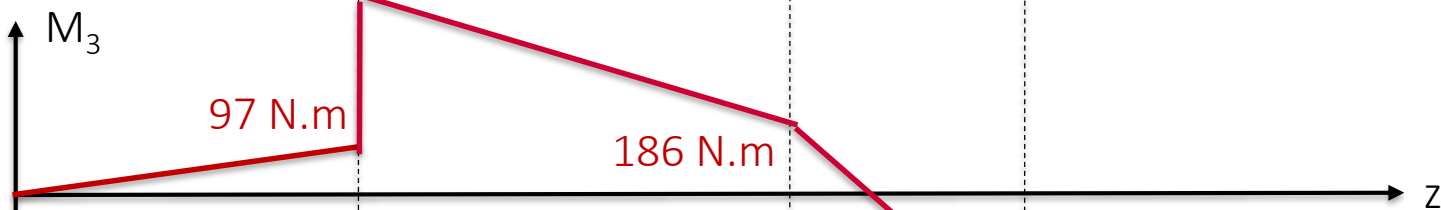
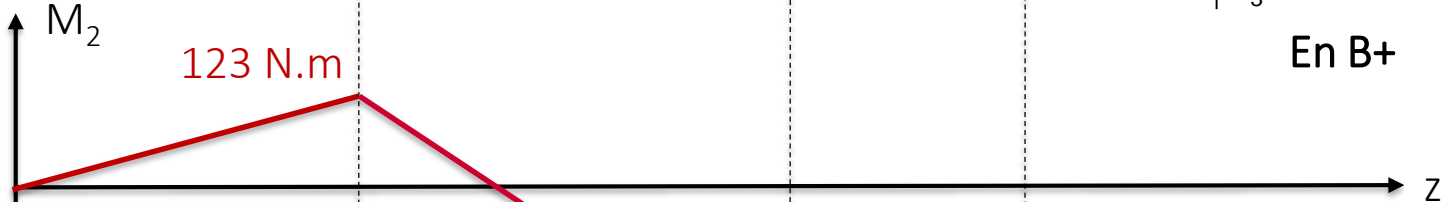
En B+

$$M_1 = -391 \text{ N.m}$$

$$M_2 = -100 \text{ N.m}$$

$$M_3 = -173 \text{ N.m}$$

En O2-



Rappel : relations torseur de cohésion/contraintes

Démarche conception

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} + \frac{M_2}{I_{22}} x_3 - \frac{M_3}{I_{33}} x_2 \quad \sigma_{12} = \frac{T_2}{S} - \frac{M_1}{I_{11}} x_3 \quad \sigma_{13} = \frac{T_3}{S} + \frac{M_1}{I_{11}} x_2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{array} \right\} [G, \vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3] \quad \longleftrightarrow \quad \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}$$

$$N_1 = \int_S \sigma_{11} dS \quad M_1 = \int_S x_2 \sigma_{13} - x_3 \sigma_{12} dS$$

$$T_2 = \int_S \sigma_{12} dS \quad M_2 = \int_S x_3 \sigma_{11} dS$$

$$T_3 = \int_S \sigma_{13} dS \quad M_3 = - \int_S x_2 \sigma_{11} dS$$

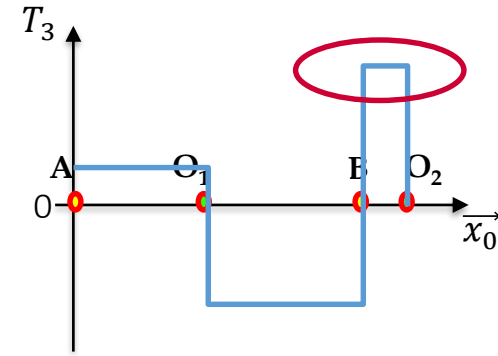
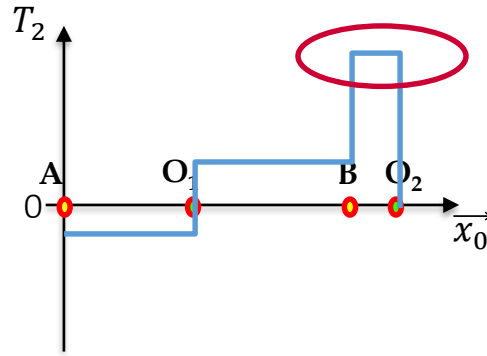
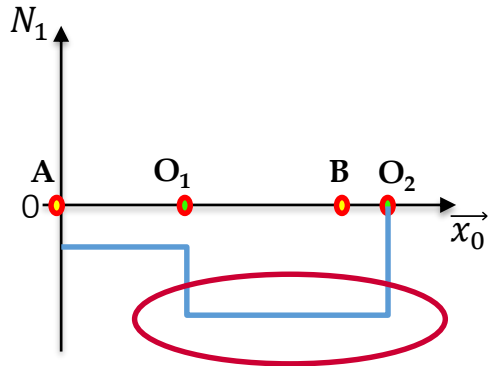
Section critique

$$\{F_{D/G}\} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{Bmatrix}_{G, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]}$$

$$\vec{R}_{D/G, AO_1^-} = \begin{Bmatrix} N_1 = -2730N \\ T_2 = -927N \\ T_3 = 1174N \end{Bmatrix}_0$$

$$\vec{R}_{D/G, O_1^+ B^-} = \begin{Bmatrix} N_1 = -7060N \\ T_2 = 1763N \\ T_3 = -6196N \end{Bmatrix}_0$$

$$\vec{R}_{D/G, B^+ O_2^-} = \begin{Bmatrix} N_1 = -7060N \\ T_2 = 11968N \\ T_3 = 9089N \end{Bmatrix}_0$$

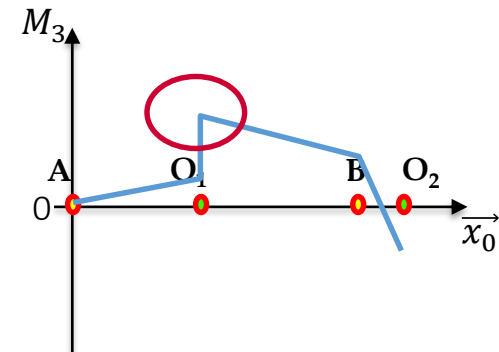
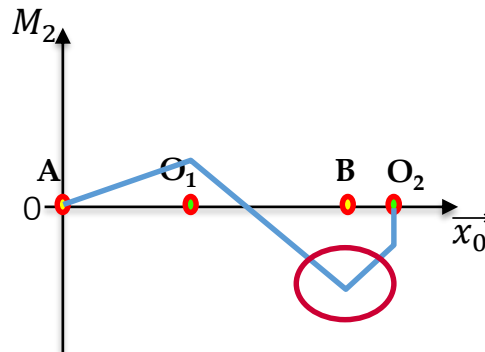
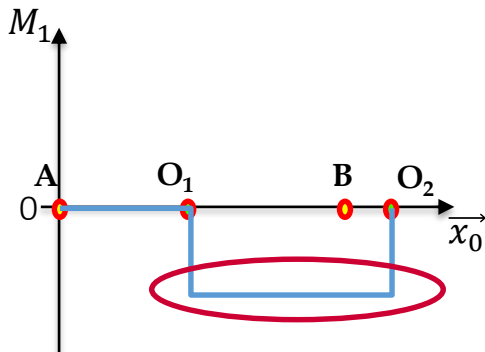


$$\vec{M}_D(\vec{O}_1^-) = \begin{Bmatrix} M_1 = 0 \\ M_2 = 123N.m \\ M_3 = 97N.m \end{Bmatrix}_0$$

$$\vec{M}_D(\vec{O}_1^+) = \begin{Bmatrix} M_1 = -391N.m \\ M_2 = 123N.m \\ M_3 = 327N.m \end{Bmatrix}_0$$

$$\vec{M}_D(\vec{B}) = \begin{Bmatrix} M_1 = -391N.m \\ M_2 = -372N.m \\ M_3 = 186N.m \end{Bmatrix}_0$$

$$\vec{M}_D(\vec{O}_2^-) = \begin{Bmatrix} M_1 = -391N.m \\ M_2 = -100N.m \\ M_3 = -173N.m \end{Bmatrix}_0$$



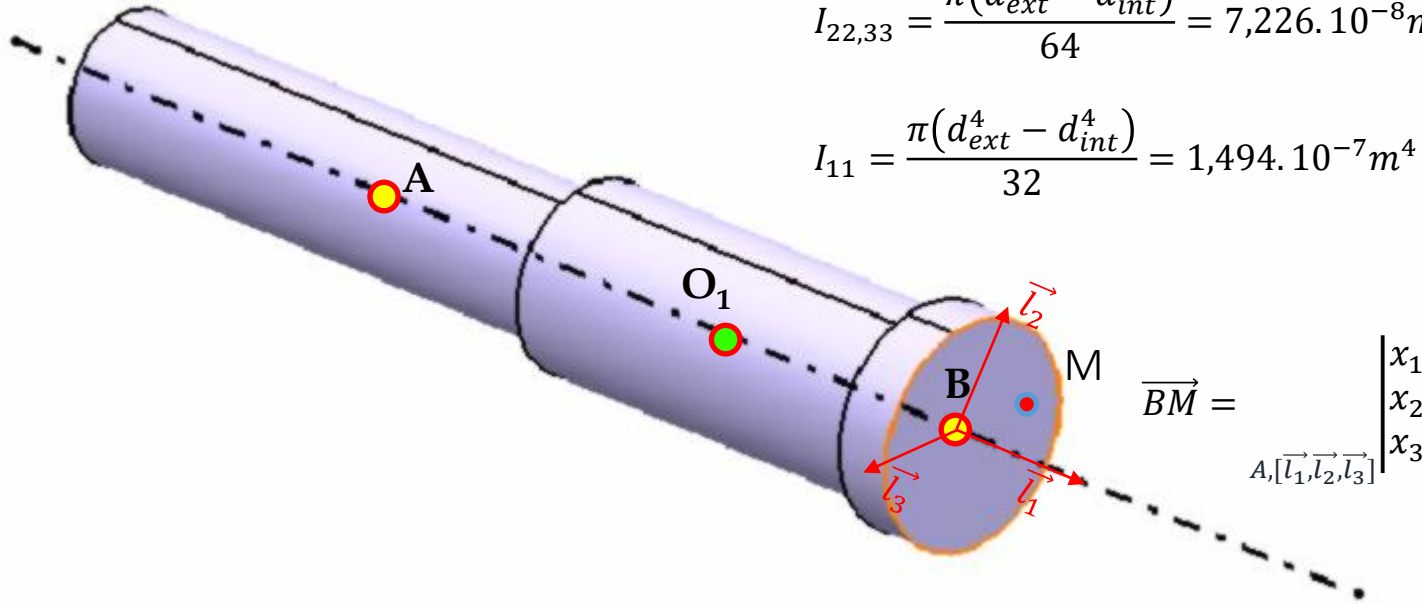
Contraintes dans la section critique B+

$$\{F_{D/G}\} = \begin{Bmatrix} N_1 = -7060N & M_1 = -391N.m \\ T_2 = 11968N & M_2 = -372N.m \\ T_3 = 9089N & M_3 = 186N.m \end{Bmatrix}_{B^+, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]}$$

$$S = \frac{\pi(d_{ext}^2 - d_{int}^2)}{4} = \frac{\pi(0.035^2 - 0.013^2)}{4} = 8,294 \cdot 10^{-4} m^2$$

$$I_{22,33} = \frac{\pi(d_{ext}^4 - d_{int}^4)}{64} = 7,226 \cdot 10^{-8} m^4$$

$$I_{11} = \frac{\pi(d_{ext}^4 - d_{int}^4)}{32} = 1,494 \cdot 10^{-7} m^4$$



$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{N}{S} + \frac{M_2}{I_{22}} x_3 - \frac{M_3}{I_{33}} x_2 = \frac{-7060}{8,294 \cdot 10^{-4}} - \frac{372}{7,226 \cdot 10^{-8}} x_3 - \frac{186}{7,226 \cdot 10^{-8}} x_2 \\ \sigma_{12} &= \frac{T_2}{S} - \frac{M_1}{I_{11}} x_3 = \frac{11968}{8,294 \cdot 10^{-4}} + \frac{391}{1,494 \cdot 10^{-7}} x_3 \\ \sigma_{13} &= \frac{T_3}{S} + \frac{M_1}{I_{11}} x_2 = \frac{9089}{8,294 \cdot 10^{-4}} - \frac{391}{1,494 \cdot 10^{-7}} x_2 \end{aligned}$$

Contraintes dans la section critique B+

$$\sigma_{11} = \frac{-7060}{8,294 \cdot 10^{-4}} - \frac{372}{7,226 \cdot 10^{-8}} x_3 - \frac{186}{7,226 \cdot 10^{-8}} x_2$$

$$\sigma_{12} = \frac{11968}{8,294 \cdot 10^{-4}} + \frac{391}{1,494 \cdot 10^{-7}} x_3$$

$$\sigma_{13} = \frac{9089}{8,294 \cdot 10^{-4}} - \frac{391}{1,494 \cdot 10^{-7}} x_2$$

$$\overrightarrow{BB_3} = \begin{vmatrix} 0 \\ d_{ext}/2 \\ 0 \end{vmatrix}_{A, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]}$$

$$\sigma_{11} = -5,36 \cdot 10^7 Pa$$

$$\sigma_{12} = 1,44 \cdot 10^7 Pa$$

$$\sigma_{13} = -3,48 \cdot 10^7 Pa$$

$$\sigma_{11} = 1,04 \cdot 10^8 Pa$$

$$\sigma_{12} = 4,68 \cdot 10^7 Pa$$

$$\sigma_{13} = -2,14 \cdot 10^7 Pa$$

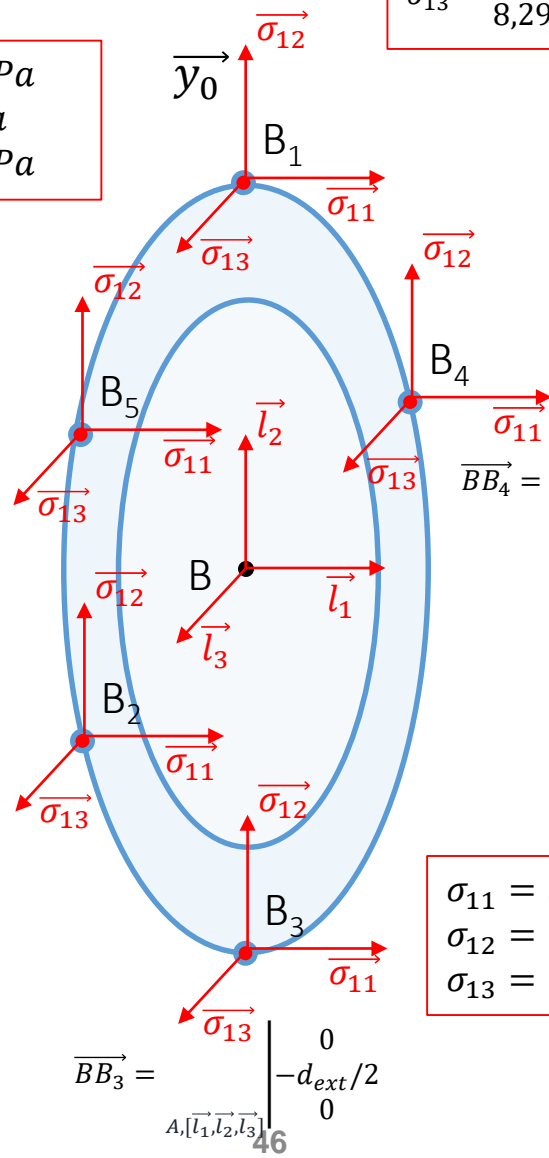
$$\overrightarrow{BB_3} = \begin{vmatrix} 0 \\ d_{ext}/(2\sqrt{2}) \\ d_{ext}/(2\sqrt{2}) \end{vmatrix}_{A, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]}$$

$$\sigma_{11} = -9,86 \cdot 10^7 Pa$$

$$\sigma_{12} = 6,02 \cdot 10^7 Pa$$

$$\sigma_{13} = 1,1 \cdot 10^7 Pa$$

$$\overrightarrow{BB_2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ d_{ext}/2 \end{vmatrix}_{A, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]}$$



$$\sigma_{11} = 8,16 \cdot 10^7 Pa$$

$$\sigma_{12} = -3,14 \cdot 10^7 Pa$$

$$\sigma_{13} = 1,1 \cdot 10^7 Pa$$

$$\overrightarrow{BB_4} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_{ext}/2 \end{vmatrix}_{A, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]}$$

$$\sigma_{11} = 3,65 \cdot 10^7 Pa$$

$$\sigma_{12} = 1,44 \cdot 10^7 Pa$$

$$\sigma_{13} = 5,68 \cdot 10^7 Pa$$

$$\overrightarrow{BB_3} = \begin{vmatrix} 0 \\ -d_{ext}/2 \\ 0 \end{vmatrix}_{A, [\vec{l}_1, \vec{l}_2, \vec{l}_3]}$$

Contraintes dans la section critique B+, contrainte équivalente

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

$$\tau = \sqrt{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2} \quad \sigma = \sigma_{11}$$

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 1,04 \cdot 10^8 Pa \\ \sigma_{12} &= 4,68 \cdot 10^7 Pa \\ \sigma_{13} &= -2,14 \cdot 10^7 Pa \end{aligned}$$

$$\sigma_{VM_{B5}} = 1,37 \cdot 10^8 Pa = 137 MPa$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -9,86 \cdot 10^7 Pa \\ \sigma_{12} &= 6,02 \cdot 10^7 Pa \\ \sigma_{13} &= 1,1 \cdot 10^7 Pa \end{aligned}$$

$$\sigma_{VM_{B2}} = 1,45 \cdot 10^8 Pa = 145 MPa$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -5,36 \cdot 10^7 Pa \\ \sigma_{12} &= 1,44 \cdot 10^7 Pa \\ \sigma_{13} &= -3,48 \cdot 10^7 Pa \end{aligned}$$

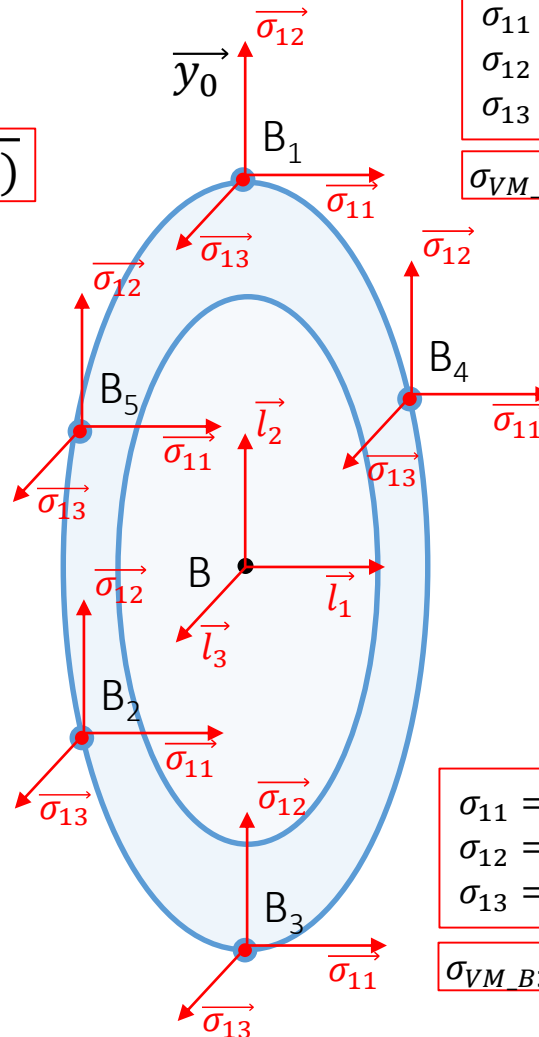
$$\sigma_{VM_{B1}} = 8,44 \cdot 10^7 Pa = 84,4 MPa$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 8,16 \cdot 10^7 Pa \\ \sigma_{12} &= -3,14 \cdot 10^7 Pa \\ \sigma_{13} &= 1,1 \cdot 10^7 Pa \end{aligned}$$

$$\sigma_{VM_{B4}} = 9,99 \cdot 10^7 Pa = 99,9 MPa$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 3,65 \cdot 10^7 Pa \\ \sigma_{12} &= 1,44 \cdot 10^7 Pa \\ \sigma_{13} &= 5,68 \cdot 10^7 Pa \end{aligned}$$

$$\sigma_{VM_{B3}} = 1,08 \cdot 10^8 Pa = 108 MPa$$



Evolution des contraintes....

