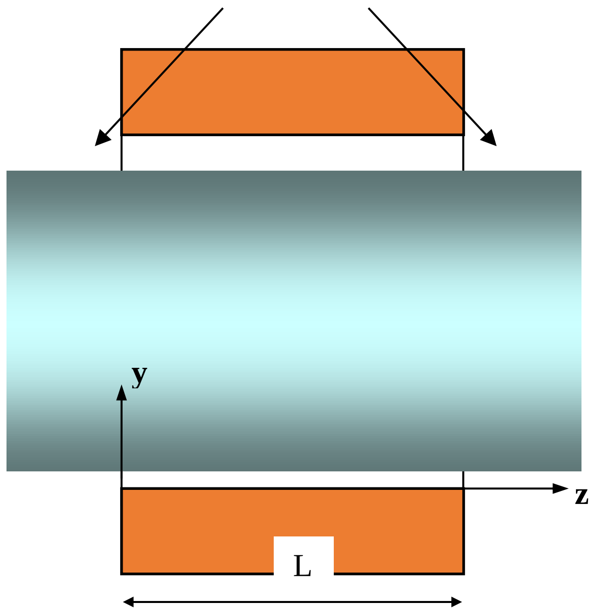
Palier court

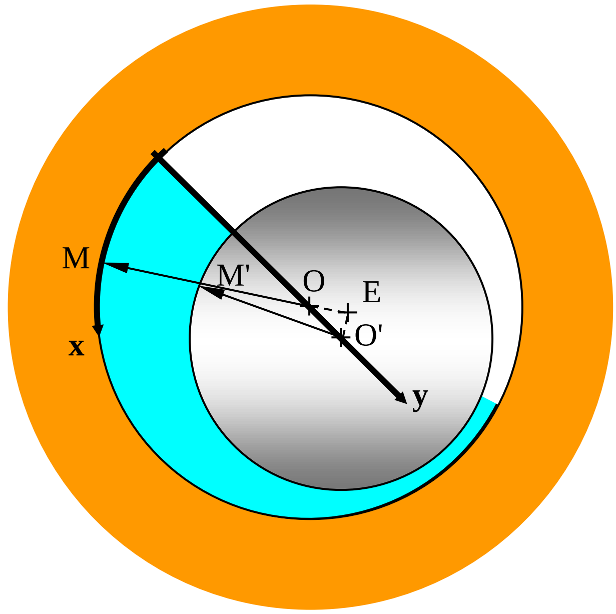
Hypothèses :

- milieu continu
- fluide Newtonien $\rightarrow$ Équation de Reynolds
- film mince

ρ = cte , μ = cte , régime permanent

pression atmosphérique





Rayon de l'arbre Ra = O'M'
Rayon du coussinet Rc = OM
$Ra \approx Rc \approx R$

jeu = C = Rc - Ra
Excentricité e = OO'
Excentricité relative $\varepsilon = e/C$

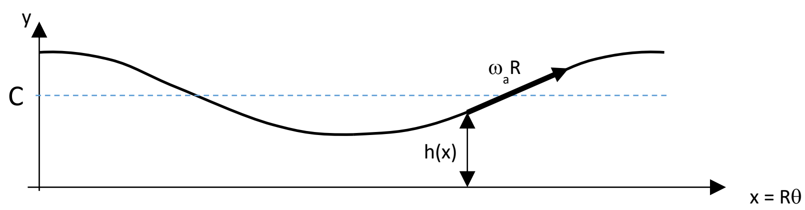
Le repère est "enroulé sur le coussinet" $\rightarrow$ $x = R.\theta$

Détermination de h(x)

h(x) = OM - OM' $\rightarrow$ h(x) = Rc - OM' OM' = EM' – EO

EO = e cos(θ) $\rightarrow$ $OM' = \sqrt{Ra^2 - e^2 \sin(\theta)^2} - e\cos(\theta) \approx Ra - e\cos(\theta)$

$\rightarrow$ $\boxed{h(x) = C + e\cos(\theta)}$ avec $\dfrac{\partial h}{\partial x} = -e\sin(\theta)$ et $x = R.\theta$



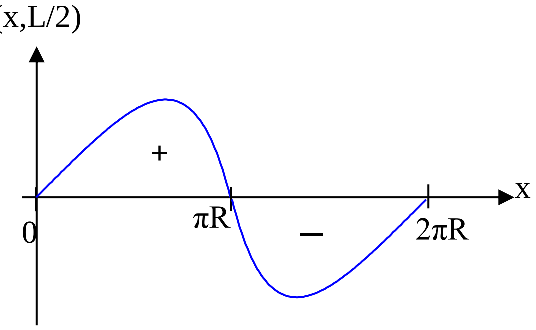
Détermination des pressions (Reynolds) **U = Rωa , ωc = 0**

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right]=6\eta R\left(\omega_a+\omega_c\right)\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right]=6\eta U\frac{\partial h}{\partial x} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{6\eta U}{h^3}\frac{\partial h}{\partial x}$$

On intègre deux fois par rapport à z

$$\boxed{p(x,z)=\frac{3\eta U}{h^3}\frac{\partial h}{\partial x}z\left(z-L\right)}$$



avec comme conditions aux limites : p(x,0) = p(x,L) = 0.

Les fluides habituels ne supportant pas les pressions négatives (inférieures à la pression atmosphérique), le fluide "cavite" et la pression est mise à zéro, p (x > πR, z) = 0.

Calcul de la portance

On projette dans le repère (r,t) *(r = -y)*

$$W_t=\int_0^L\int_0^{\pi R}p(x,z)\sin\left(x/R\right).dx.dz \qquad W_r=-\int_0^L\int_0^{\pi R}p(x,z)\cos\left(x/R\right).dx.dz$$

$$W_t=\int_0^L\int_0^{\pi}p(x,z)\sin\left(\theta\right).Rd\theta.dz \qquad W_r=-\int_0^L\int_0^{\pi}p(x,z)\cos\left(\theta\right).Rd\theta.dz$$

On intègre par rapport à z

$$W_t=2\frac{\eta UL^3\varepsilon}{2C^2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\theta\right)^2}{\left[1+\varepsilon\cos(\theta)\right]^3}d\theta \qquad W_r=-2\frac{\eta UL^3\varepsilon}{2C^2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(\theta\right)\cos\left(\theta\right)}{\left[1+\varepsilon\cos(\theta)\right]^3}d\theta$$

Ces intégrales sont résolues en effectuant le changement de variable de Sommerfeld.

$$1+\varepsilon\cos\theta=\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\psi}$$

soit

$$\cos\theta = \frac{\cos\psi - \varepsilon}{1-\varepsilon\cos\psi} \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}.\sin\psi}{1-\varepsilon\cos\psi} \qquad \text{et} \qquad d\theta = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos\psi}d\psi$$

on a alors

$$\int_0^\pi \frac{\sin(\theta)^2}{[1+\varepsilon\cos(\theta)]^3}d\theta = \int_0^\pi \frac{\sin\psi^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}d\psi = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\psi}{2}d\psi = \frac{\pi}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$$

et

$$\int_0^\pi \frac{\sin(\theta)\cos(\theta)}{[1+\varepsilon\cos(\theta)]^3}d\theta = \int_0^\pi \frac{[\sin\psi\cos\psi - \varepsilon\sin\psi]}{(1-\varepsilon^2)^2}d\psi = \frac{-2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2}$$

$$\rightarrow \qquad W_t = \frac{\eta UL^3}{4C^2}\frac{\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \qquad W_r = \frac{\eta UL^3}{C^2}\frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$$

$$W = \sqrt{W_t^2 + W_r^2}$$

$$\boxed{W = \eta LU\left(\frac{L}{D}\right)^2\left(\frac{R}{C}\right)^2\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2}\sqrt{16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)}}$$

ou sous forme adimensionnée

$$\boxed{\frac{1}{S} = \frac{\pi W}{\eta LU\left(\frac{R}{C}\right)^2} = \left(\frac{L}{D}\right)^2\frac{\pi\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2}\left[16\varepsilon^2+\pi^2(1-\varepsilon^2)\right]^{1/2}}$$

L'angle de calage s'écrit : $\tan(\Phi) = \frac{W_t}{W_r}$ (Φ : angle de calage)

$$\boxed{\tan(\Phi) = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}}$$

Calcul du débit de fuite

$$w = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}z(z-h) \qquad Q_z = \iint w.dy.dx$$

$$Q_z = \int_0^{\pi R}\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\left[\frac{-h^3}{6}\right].dx \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{3\eta U}{h^3}\frac{\partial h}{\partial x}(2z-L)$$

$$Q_z = \int_0^{\pi R} -\frac{U(2z-L)}{4}\frac{\partial h}{\partial x}.dx \qquad Q_z(z=L) = \frac{ULC\varepsilon}{2}$$

La fuite est des deux cotés du système et est donc égal à deux fois Q_z (z = L).

$$\boxed{Q_f = ULC\varepsilon}$$

Continuité du débit dans le divergent

En négligeant le terme en $\frac{\partial p}{\partial x}$, le débit circonférentiel en $\theta = \pi$, ($h = h_s$), est $ULh_s/2$.

Par la suite, le débit est constant mais se fait sur une largeur effective du coussinet L'. Le débit est UL'h/2. La continuité du débit conduit à :

$$L' = L\frac{h}{h_s} \qquad \text{avec} \qquad hs = C(1\text{-}\varepsilon)$$

***Calcul du couple de frottement,* U = Rω_a , ω_c = 0**

$$\tau_{xy} = \eta\frac{\partial u}{\partial y} \qquad u = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y(y-h) + \omega_c R\frac{h-y}{h} + \omega_a R\frac{y}{h}$$

$$\rightarrow \qquad \tau_{xy} = \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(2y-h) + \eta\frac{(\omega_a - \omega_c)R}{h}$$

$$\rightarrow \qquad Couple = R\int_0^L \left[\int_0^{\pi R}\tau_{xy}.dx + \int_{\pi}^{2\pi R}\tau_{xy}\frac{h_s}{h}.dx\right]dz$$

on négligera le terme en $\frac{\partial p}{\partial x}$ $\qquad \tau_{xy} = \eta\frac{UR}{h} \qquad \rightarrow \qquad C_{arbre} = C_{coussinet}$

$$C_a = \eta UR^2L\left[\int_0^{\pi}\frac{1}{h}d\theta + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{h_s}{h^2}d\theta\right]$$

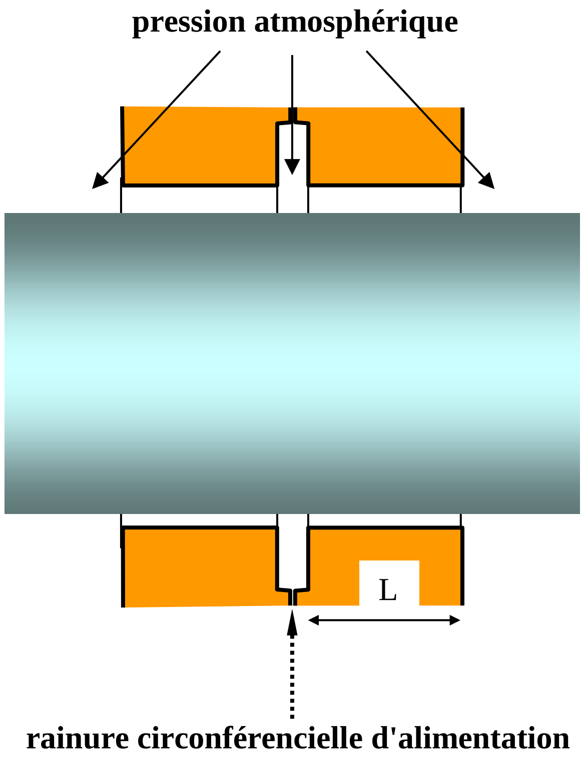
Changement de variable de Sommerfeld $\qquad 1+\varepsilon\cos\theta = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\psi}$

$$C_a = \frac{\eta UR^2L}{C}\left[\int_0^{\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + (1-\varepsilon)\int_{\pi}^{2\pi}\frac{1-\varepsilon\cos\psi}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{3/2}}d\psi\right]$$

$$\boxed{C_a = \frac{\mu UR^2L}{C}\frac{\pi(2+\varepsilon)}{2(1+\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}}$$

Palier double

Chaque moitié de palier est un palier court (L)



pour la même excentricité :

portance x2

Couple de frottement x2

Débit de fuite **identique**