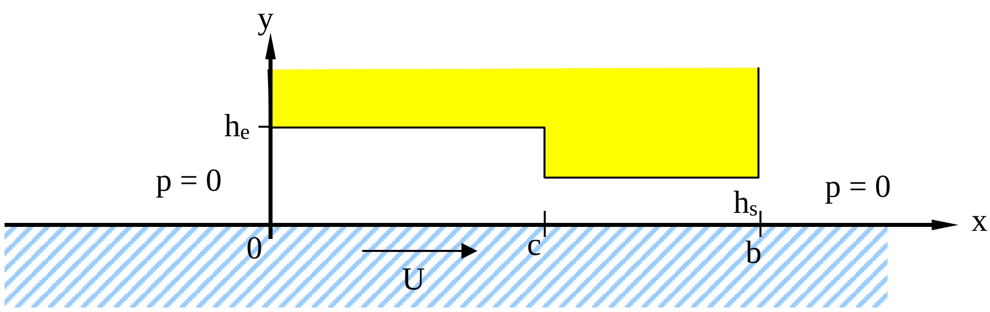
Patin à saut

Hypothèses :

- milieu continu
- fluide Newtonien $\quad\longrightarrow\quad$ Equation de Reynolds
- film mince

ρ = cte , η = cte , régime permanent



h_e : épaisseur à l'entrée du contact
h_s : épaisseur à la sortie du contact

Les résultats seront exprimés en fonction du paramètre $a = \dfrac{h_e}{h_s}$ et de $s = \dfrac{c}{b}$.

Équation de Reynolds (1D)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\cancel{\rho} h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right] = 6\frac{\partial\left[\cancel{\rho}(U_1+U_2)h\right]}{\partial x} + 12\cancel{\frac{\partial(\rho h)}{\partial t}}$$

Détermination des pressions (Reynolds)

ρ = cte, η = cte, régime permanent, $U_1 = U$, $U_2 = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right] = 6\eta U\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$h = \text{cte} \quad\longrightarrow\quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

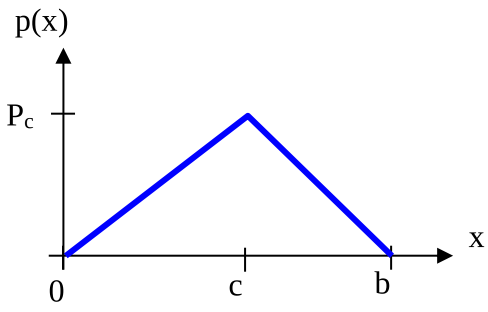
On intègre deux fois par rapport à x $\quad\longrightarrow\quad$ pression linéaire

Conditions aux limites :

en $x = 0$ $\quad p(0) = 0$

en $x = c$ $\quad p(c) = p_c$

en $x = b$ $\quad p(b) = 0$



$$x \in [0, c] \quad \rightarrow \quad \boxed{p(x) = p_c \frac{x}{c}}$$

$$x \in [c, b] \quad \rightarrow \quad \boxed{p(x) = p_c \frac{(x-b)}{(c-b)}}$$

La pression p_c au niveau de la discontinuité est inconnue

Calcul du débit

Vitesse selon x $\quad u = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + U\frac{(h-y)}{h}$

Débit selon x $\quad \frac{Q_x}{L} = \int_0^h u.dy$

$$\frac{Q_x}{L} = \int_0^h \left[\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} y(y-h) + U\frac{(h-y)}{h}\right] dy$$

$$\frac{Q_x}{L} = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\int_0^h y(y-h)\,dy + U\int_0^h \frac{(h-y)}{h} dy$$

$$\frac{Q_x}{L} = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}h\right]_0^h + U\left[y - \frac{y^2}{2h}\right]_0^h$$

$$\frac{Q_x}{L} = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left[-\frac{h^3}{6}\right] + U\left[\frac{h}{2}\right]$$

$x \in [0,c]$ $$\frac{Q_x}{L} = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left[-\frac{h_e^3}{6}\right] + U\left[\frac{h_e}{2}\right]$$

avec $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_c}{c}$

$$\rightarrow \quad \frac{Q_x}{L} = \frac{-h_e^3}{12\eta}\frac{p_c}{c} + \frac{Uh_e}{2}$$

$x \in [c,b]$ $$\rightarrow \quad \frac{Q_x}{L} = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left[-\frac{h_s^3}{6}\right] + U\left[\frac{h_s}{2}\right]$$

avec $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-p_c}{(b-c)}$

$$\rightarrow \quad \frac{Q_x}{L} = \frac{h_s^3}{12\eta}\frac{p_c}{(b-c)} + \frac{Uh_s}{2}$$

La continuité du débit en x = c donne une relation entre la pression p_c et la distance entre les surfaces h_s.

$$\frac{Q_x}{L} = \frac{-h_e^3}{12\eta}\frac{p_c}{c} + \frac{Uh_e}{2} = \frac{h_s^3}{12\eta}\frac{p_c}{(b-c)} + \frac{Uh_s}{2}$$

$$p_c = 6\eta U \frac{h_e - h_s}{\frac{h_s^3}{(b-c)} + \frac{h_e^3}{c}}$$

$$p_c = \frac{6\eta Ub}{h_s^2}\left[\frac{s(1-s)(a-1)}{a^3(1-s)+s}\right]$$

Calcul de la portance

$$\frac{W}{L}=\int_0^b p(x).dx=\int_0^c p(x).dx+\int_c^b p(x).dx$$

$$\boxed{\frac{W}{L}=\frac{P_c b}{2}=\frac{3\eta U b^2}{h_s^2}.\frac{s(1-s)(a-1)}{a^3(1-s)+s}}$$

Cette relation fait le lien entre la pression p_c et la charge W.

La portance est maximale pour a et s tels que $a(2a-3)^2=1$ et $s=\dfrac{1}{a^{-3/2}+1}$

on trouve a = 1,866 et s = 0,718.

Calcul de la force de frottement

$$\tau_{xy}=\eta\frac{\partial u}{\partial y} \qquad u=\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y(y-h)+U\frac{(h-y)}{h}$$

$$\rightarrow \qquad \tau_{xy}=\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(2y-h)-\frac{\eta U}{h}$$

$$\frac{F}{L}_{\substack{y=0\\ ou\\ y=h}}=\int_0^b \tau_{xy}dx$$

$$\frac{F}{L}=\int_0^c \tau_{xy}dx+\int_c^b \tau_{xy}dx$$

$$\frac{F}{L}=\int_0^c\left[\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(2y-h)-U\frac{\eta}{h}\right]dx+\int_c^b\left[\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}(2y-h)-U\frac{\eta}{h}\right]dx$$

$$\frac{F}{L}=\int_0^c\left[\frac{1}{2}\frac{p_c}{c}(2y-h_e)-U\frac{\eta}{h_e}\right]dx+\int_c^b\left[\frac{1}{2}\frac{p_c}{(c-b)}(2y-h_s)-U\frac{\eta}{h_s}\right]dx$$

$$\frac{F}{L}=\left[\frac{1}{2}\frac{p_c}{c}(2y-h_e)-U\frac{\eta}{h_e}\right]\int_0^c dx+\left[\frac{1}{2}\frac{p_c}{(c-b)}(2y-h_s)-U\frac{\eta}{h_s}\right]\int_c^b dx$$

$$\frac{F}{L}=\left[\frac{1}{2}\frac{p_c}{c}(2y-h_e)-U\frac{\eta}{h_e}\right]c+\left[\frac{1}{2}\frac{p_c}{(c-b)}(2y-h_s)-U\frac{\eta}{h_s}\right](b-c)$$

<u>sur la face inférieure (y = 0):</u>

$$\boxed{\frac{F_{y=0}}{L}=-\frac{p_c}{2}(h_e-h_s)-\eta U\left[\frac{c}{h_e}+\frac{(b-c)}{h_s}\right]}$$

<u>sur la face supérieure (y = h):</u>

$$\boxed{\frac{F_{y=h}}{L}=\frac{p_c}{2}(h_e-h_s)-\eta U\left[\frac{c}{h_e}+\frac{(b-c)}{h_s}\right]}$$

Déterminer $\frac{F_{y=0}}{L}-\frac{F_{y=h}}{L}$**, justifier.**

$$\frac{F_{y=0}}{L}-\frac{F_{y=h}}{L}=-p_c(h_e-h_s)$$

Actions des parois sur le fluide :

en y = 0	selon x :	$-F_{y=0}$
	selon y :	W
en y = h	selon x :	$F_{y=h}$
	selon y :	-W
sur la paroi verticale	selon x :	action de la pression
	selon y :	0
bilan	selon x :	$- F_{y=0} + F_{y=h} - p_c(h_e-h_s)= 0$
	selon y :	W - W = 0