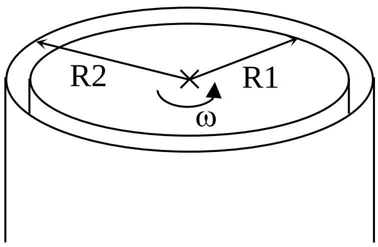
TD2 - VISCOSIMÈTRES

Viscosimètre de Couette - Coordonnées Cylindriques

Le viscosimètre de Couette permet de mesurer la viscosité d'un fluide introduit entre deux cylindres concentriques. Le cylindre interne tourne à la vitesse ω, le cylindre externe est fixe. Le rayon du cylindre intérieur est R1, le rayon du cylindre extérieur est R2, on notera le jeu entre cylindres C = R2 - R1, la longueur des cylindres est L.



Hypothèses :

- ρ et μ constants
- Régime permanent ($\partial/\partial t = 0$)
- Cylindres coaxiaux ($\partial/\partial\theta = 0$)
- Pas d'écoulement selon z (w = 0)
- v n'est fonction que de r

1) À partir des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (cf. annexe), calculer les vitesses u (selon r) et v (selon θ) du fluide.

note : $\frac{1}{r}\frac{\partial(vr)}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}$ et $r\frac{\partial\left(v/r\right)}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$

- *Continuité* (conservation du débit massique)

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \cancel{\frac{\partial v}{r\partial\theta}} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = \frac{1}{r}\frac{\partial(ur)}{\partial r} = 0$$

$$\rightarrow \quad ur = cte$$

$$u(R2) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{u = 0}$$

- *Équations d'équilibre* ($f_r = 0$, $f_\theta = 0$, $f_z = -g$)

$$\rho\left[\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}+u\cancel{\frac{\partial u}{\partial r}}+v\cancel{\frac{\partial u}{r\partial\theta}}+\cancel{w}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}\right]=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\cancel{\Delta u}-\cancel{\frac{u}{r^2}}-\frac{2}{r}\cancel{\frac{\partial v}{r\partial\theta}}\right]$$

$$\rho\left[\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}+u\cancel{\frac{\partial v}{\partial r}}+v\cancel{\frac{\partial v}{r\partial\theta}}+\cancel{w}\frac{\partial v}{\partial z}+\cancel{\frac{uv}{r}}\right]=-\cancel{\frac{\partial p}{r\partial\theta}}+\mu\left[\Delta v-\frac{v}{r^2}+\frac{2}{r}\cancel{\frac{\partial u}{r\partial\theta}}\right]$$

$$\rho\left[\cancel{\frac{\partial w}{\partial t}}+u\cancel{\frac{\partial w}{\partial r}}+v\cancel{\frac{\partial w}{r\partial\theta}}+\cancel{w}\frac{\partial w}{\partial z}\right]=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left[\cancel{\Delta w}\right]$$

avec $$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\cancel{\frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2}}+\cancel{\frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

$$\rho\left[-\frac{v^2}{r}\right]=-\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\rightarrow\quad 0=\mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}\right]\quad\rightarrow\quad\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}-\frac{v}{r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(vr)}{\partial r}\right]=0$$

$$0=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(vr)}{\partial r}\right]=0\quad\rightarrow\quad\frac{\partial(vr)}{\partial r}=Ar\quad\rightarrow\quad vr=A\frac{r^2}{2}+B$$

$$v(r)=\frac{A}{2}r+\frac{B}{r}$$

C.L. $v(R1) = \omega\, R1$ $\quad$ $v(R2) = 0$

$$\frac{A}{2}=\frac{-R1^2}{R2^2-R1^2}\omega\qquad B=\frac{R1^2R2^2}{R2^2-R1^2}\omega$$

$$\boxed{v(r)=\frac{R1^2}{R2^2-R1^2}\omega r\left[\left(\frac{R2}{r}\right)^2-1\right]}$$

2) Calculer le couple de frottement agissant sur les parois de chaque cylindre.

$$\text{Couple} = \int_0^L \int_0^{2\pi} R_{1ou2} \left(\sigma_{r\theta}\right) R_{1ou2} d\theta dz \qquad \text{avec} \qquad \sigma_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{r^2}\right)\right] = \mu\left[-2\frac{B}{r^2}\right]$$

$$\text{Couple} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(\sigma_{r\theta}\right)_{R_{1ou2}} R_{1ou2}^2 d\theta dz \quad \rightarrow \quad \text{Couple} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \mu\left[-2\frac{B}{R_{1ou2}^2}\right] R_{1ou2}^2 d\theta dz$$

$$\rightarrow \quad \text{Couple} = -2\mu B \int_0^L \int_0^{2\pi} d\theta dz \quad \rightarrow \quad \text{Couple} = -2\mu B 2\pi L$$

$$\boxed{\text{Couple} = -4\pi L\mu\frac{R1^2 R2^2}{R2^2 - R1^2}\omega}$$

3) Considérant le jeu petit devant les rayons des cylindres ($R \approx R1 \approx R2$, $C << R$), simplifier l'expression du couple obtenue précédemment.

Simplification si C = R2 - R1 est petit devant R ($R \approx R1 \approx R2$)

$$R2^2 - R1^2 = \left(R2 + R1\right)\left(R2 - R1\right) = 2RC$$

$$\text{Couple} = -4\pi L\mu\frac{R1^2 R2^2}{R2^2 - R1^2}\omega = -2\pi L\mu\frac{R^3}{C}\omega \quad \rightarrow \quad \boxed{\text{Couple} = -2\pi\mu\frac{R^2 L}{C}R\omega}$$

Viscosité dynamique

$$\mu = \frac{\text{Couple}}{\left[\dfrac{2\pi R^3 L\omega}{C}\right]}$$

4) Avec R1 = 40 mm, R2 = 40.1 mm, L = 100 mm, μ = 0.01 Pa.s, ω = 100 rad/s, comparez les solutions des deux questions précédentes.

2) Couple = 0.4036 [Nm]   3) Couple = 0.4021 [Nm]

5) Quelle est la puissance dissipée ?

Puis = Couple.ω = 40 [W]

***Un mot sur les pressions** (v(r) ≈ Ar, r variant de 0 à h)*

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} \qquad p(r,z) = \rho \frac{A^2 r^2}{2} + f_1(z) \qquad f_2(r) = \rho \frac{A^2 r^2}{2} + cte$$

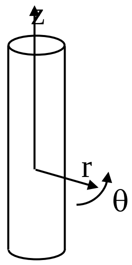
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad p(r,z) = -\rho g z + f_2(r) \qquad f_1(z) = -\rho g z + cte$$

$$p(r,z) = \rho \frac{A^2 r^2}{2} - \rho g (z - z_0) + p_{atm}$$

Surface libre $p = p_{atm}$ $\rightarrow$ $z - z_0 = \dfrac{A^2 r^2}{2g}$

Viscosimètre à capillaire - Coordonnées Cylindriques

Le viscosimètre à capillaire permet de mesurer la viscosité d'un fluide qui soumis à la pesanteur s'écoule dans un tube fin. Cette viscosité est déterminée en mesurant le temps t nécessaire pour l'écoulement d'un volume V de fluide, c'est à dire la mesure du débit d'écoulement (V/t).
Le fluide est libre de s'écouler selon l'axe z qui est vertical, la seule vitesse du fluide considérée est w(r), le fluide est à pression constante.



Hypothèses :

- Régime permanent ($\partial/\partial t = 0$)
- ρ et μ constants

1) À partir des équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques (cf. annexe), calculer la vitesse w(r) du fluide.

- *Équations d'équilibre* ($f_r = 0$, $f_\theta = 0$, $f_z = -g$)

$$\rho\left[\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\cancel{\frac{\partial u}{\partial r}} + v\cancel{\frac{\partial u}{r\partial\theta}} + w\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} - \cancel{\frac{v^2}{r}}\right] = -\cancel{\frac{\partial p}{\partial r}} + \mu\left[\Delta u - \cancel{\frac{u}{r^2} - \frac{2}{r}\frac{\partial v}{r\partial\theta}}\right]$$

$$\rho\left[\cancel{\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + v\frac{\partial v}{r\partial\theta} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r}}\right] = -\cancel{\frac{\partial p}{r\partial\theta}} + \mu\left[\Delta v - \cancel{\frac{v}{r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{r\partial\theta}}\right]$$

$$\rho\left[\cancel{\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + v\frac{\partial w}{r\partial\theta} + w\frac{\partial w}{\partial z}}\right] = \rho(-g) - \cancel{\frac{\partial p}{\partial z}} + \mu[\Delta w]$$

avec $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{\rho g}{\mu} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} \qquad \frac{\rho g}{\mu} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial w}{\partial r}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial w}{\partial r}\right] = \frac{\rho g}{\mu}r$$

$$r\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\rho g}{\mu}\frac{r^2}{2} + cte$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\rho g}{\mu}\frac{r}{2} + \frac{cte}{r}$$

En r = 0, la dérivée est nulle par symétrie $\rightarrow$ cte = 0
(ou la vitesse w n'est pas infinie en r = 0)

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\rho g}{\mu}\frac{r}{2} \quad \rightarrow \quad w(r) = \frac{\rho g}{\mu}\frac{r^2}{4} + A$$

C.L. w(R) = 0

$$\rightarrow \quad \boxed{w(r) = \frac{\rho g}{4\mu}\left(r^2 - R^2\right)}$$

2) Calculer le débit d'écoulement du fluide.

$$Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} w(r).rd\theta.dr \qquad Q = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\rho g}{4\mu}\left(r^2 - R^2\right).rd\theta.dr$$

$$Q = 2\pi \int_0^R \frac{\rho g}{4\mu}\left(r^2 - R^2\right).r.dr \qquad Q = \frac{\pi \rho g}{2\mu}\int_0^R \left(r^3 - rR^2\right)dr$$

$$Q = \frac{\pi \rho g}{2\mu}\left[\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{2}\right] \quad \rightarrow \quad \boxed{Q = \frac{-\pi g}{8\left(\mu / \rho\right)}R^4}$$

Viscosité cinématique

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{\pi g R^4 t}{8V}$$

Equations de base (**milieu continu**) – Coordonnées Cartésiennes

- *Continuité* (conservation du débit massique)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i)=0$$

Ex : $\rho = \text{cte}$ $\rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$

- *Equations d'équilibre* $\left(\rho\vec{\gamma}=\vec{f}\right)$ - f_i : accélération volumique

$$\rho\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]=\rho f_i+\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \qquad i=1,2,3$$

- *Loi de comportement* (**fluide newtonien**)

$$\sigma_{ij}=(-p+\lambda\theta)\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}$$

avec :

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \delta_{ij}\left|\begin{array}{l}=0 \;\; \text{si} \;\; i\neq j\\ =1 \;\; \text{si} \;\; i=j\end{array}\right., \quad \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad \lambda \text{ et } \mu \;\; \text{coef. de Navier}$$

Ex : $\rho = \text{cte}$ $\rightarrow$ $\theta=0$

$\rightarrow$ $\sigma_{xx}=-p+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)$

$\sigma_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$

$\sigma_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$

- *Lois d'état*

$\rho = (p,T)$ $\qquad$ $\mu = (p,T)$

Ex : $\mu=\mu_o e^{\alpha(p-p_o)} e^{\beta\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_o}\right)}$

- *Thermique*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)-\frac{T}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_p\frac{dp}{dt}+\lambda\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2+\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\rho C_p\frac{dT}{dt}$$

Ex : $\rho = \text{cte}$ $\rightarrow$ $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)=\rho C_p\frac{dT}{dt}$

Les variables sont : u, v, w, p, T, ρ et μ

Équations de base (**μ= cte et ρ = cte**) - Coordonnées Cartésiennes

- *Continuité* (conservation du débit massique)

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

- *Équations d'équilibre* $\left(\rho\vec{\gamma}=\vec{f}\right)$

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\Delta u$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]=\rho f_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\Delta v$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]=\rho f_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\Delta w$$

avec $$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- *Loi de comportement* (**fluide newtonien**)

$$\sigma_{xx}=-p+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\sigma_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Équations de base (**μ= cte et ρ = cte**) - Coordonnées Cylindriques

- *Continuité* (conservation du débit massique)

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial v}{r\partial\theta}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

- *Équations d'équilibre* $\left(\rho\vec{\gamma}=\vec{f}\right)$

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+v\frac{\partial u}{r\partial\theta}+w\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{v^2}{r}\right]=\rho f_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left[\Delta u-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r}\frac{\partial v}{r\partial\theta}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial r}+v\frac{\partial v}{r\partial\theta}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{uv}{r}\right]=\rho f_\theta-\frac{\partial p}{r\partial\theta}+\mu\left[\Delta v-\frac{v}{r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{r\partial\theta}\right]$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+v\frac{\partial w}{r\partial\theta}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]=\rho f_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu[\Delta w]$$

avec $$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- *Loi de comportement* (**fluide newtonien**)

$$\sigma_{rr}=-p+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$\sigma_{r\theta}=\mu\left(\frac{\partial u}{r\partial\theta}+r\frac{\partial\left(v/r\right)}{\partial r}\right)$$

$$\sigma_{rz}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)$$