5. Réduction des matrices carrées

5.1. Valeurs propres et vecteurs propres

5.1.1. Définition

Un vecteur $\mathbf{V}$ non nul de K^n est appelé **vecteur propre** d'une matrice $A \in \mathbf{M}_n(K)$ s'il existe un scalaire λ de K tel que :

$$A\,V = \lambda\,V$$

Le scalaire λ est appelé **valeur propre** de A et $\mathbf{V}$ vecteur propre associé à la valeur propre λ. La direction définie par le vecteur $\mathbf{V}$ est appelée **direction propre.**

5.1.2. Détermination des valeurs propres et des vecteurs propres

Propriété 1. — **Les valeurs propres de** A **sont les racines de l'équation** $\det(A-\lambda I) = 0$.

En effet, les vecteurs propres de A sont solution de $(A-\lambda I)\,V = 0$ ou :

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = 0 \\ a_{21}\,x_1 + (a_{22}-\lambda)\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\,x_n = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène de n équations à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$ possède une solution non nulle si et seulement si son déterminant est nul.

$\det(A-\lambda I)$ est un polynôme de degré n en λ appelé **polynôme caractéristique** de A.

L'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre λ (ensemble auquel on ajoute le vecteur nul) est un sous-espace vectoriel de K^n appelé **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ.

On appelle **valeur propre d'ordre** r de A un zéro d'ordre r du polynôme caractéristique.

On appelle **trace** de A la somme des valeurs propres (chaque valeur propre étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité) :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Propriété 2. — On a : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

et : $\det(A) = \lambda_1\,\lambda_2 \ldots \lambda_n$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$(-1)^n\,\lambda^n + (-1)^{n-1}\,(a_{11} + \ldots + a_{nn})\,\lambda^{n-1} + \ldots + \det(A)$$

En effet, pour $\lambda = 0$, on obtient $\det(A)$. D'autre part (§ 3.3.) :

$$\det(A-\lambda I) = \sum_{P \in G_n} \sigma_P\, a'_{P(1),1} \cdots a'_{P(n),n}$$

avec : $a'_{ii} = a_{ii} - \lambda$; $a'_{ij} = a_{ij}$ (si $i \neq j$)

La permutation identité donne le terme :

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda)$$

Pour une autre permutation, si $P(i) = j$ avec $j \neq i$, on a $P(j) \neq j$ et donc les facteurs $(a_{ii} - \lambda)$ et $(a_{jj} - \lambda)$ ne figurent pas, ce qui donne un polynôme en λ de degré $n-2$ au plus. Les deux premiers coefficients du polynôme caractéristique sont donc :

$$(-1)^n \quad \text{et} \quad (-1)^{n-1}\,(a_{11} + \ldots + a_{nn})$$

On obtient la propriété en remarquant que le polynôme caractéristique s'écrit aussi :

$$(-1)^n\,(\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n)$$

Remarque 1. — Si A est une matrice réelle et si λ est réel, on obtient un vecteur propre réel.
Si $\lambda \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$, une composante au moins du vecteur $\mathbf{V}$ est complexe. En outre, $\overline{\lambda}$ conjugué de λ est aussi valeur propre de A et le vecteur $\overline{\mathbf{V}}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.

Remarque 2. — Pour qu'une matrice A soit régulière, il faut et il suffit qu'elle n'admette aucune valeur propre nulle, car :

$$\det(A) = \lambda_1\,\lambda_2 \ldots \lambda_n$$

5.1.3. Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme

Soit $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une base de K^n et A la matrice d'un endomorphisme f par rapport à cette base.

On appelle **valeurs propres et vecteurs propres de l'endomorphisme** f les valeurs propres et vecteurs propres de A. La trace de A est appelée **trace de l'endomorphisme** f.

Vérifions que ces notions sont indépendantes de la base $(\mathbf{e}_i)$ choisie. Soit $(\mathbf{e}'_i)$ une nouvelle base et B la matrice de f par rapport à cette base.
P désignant la matrice de passage, on a :

$$B = P^{-1}\ A\ P$$

$$B - \lambda I = P^{-1}\ A\ P - P^{-1}\ (\lambda I)\ P = P^{-1}\ (A - \lambda I)\ P$$

soit pour les déterminants :

$$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1})\ \det(A - \lambda I)\ \det(P) = \det(A - \lambda I)$$

A et B ont même polynôme caractéristique donc mêmes valeurs propres. Quant aux vecteurs propres, ils ne dépendent pas de la base puisqu'ils forment le noyau de $f - \lambda i$ défini par $(f - \lambda i)\ (\mathbf{V}) = \mathbf{0}$.

Propriété. – **Deux matrices semblables ont même trace.**

En effet, A et $B = P^{-1}\ AP$ ont mêmes valeurs propres.

Exercices - Exemples

$\boxed{E_1}$ Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice :

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est :

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + \frac{7}{4}$$

Il y a deux valeurs propres distinctes :

$$\lambda_1 = \frac{5 + i\sqrt{3}}{4} \qquad \lambda_2 = \frac{5 - i\sqrt{3}}{4}$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 sont définis par :

$$\begin{cases} \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{4}\, x - \dfrac{1}{2}\, y = 0 \\[2mm] \dfrac{1}{2}\, x - \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{4}\, y = 0 \end{cases}$$

Un vecteur propre étant défini à une constante multiplicative près, choisissons :

$$\mathbf{V}_1 = (2,\ 1 - i\sqrt{3})$$

Pour $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$, un vecteur propre est le conjugué de $\mathbf{V}_1$, soit :

$$\mathbf{V}_2 = (2,\ 1 + i\sqrt{3})$$

$\boxed{E_2}$ Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & -1 \\ 2a+2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$-\lambda^3 + (a+4)\,\lambda^2 - (a+3)\,\lambda = -\lambda\,(\lambda - 1)\,(\lambda - a - 3)$$

1) Si $a \neq -2$ et $a \neq -3$, il y a 3 valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = a+3$.

Déterminons les vecteurs propres :

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{cases} (a+1)\,x + y - z = 0 \\ (2a+2)\,x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{V}_1 = (0,1,1)$$

$\lambda_2 = 1$

$$\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ (2a+2)\,x + y - 2z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{V}_2 = (1,2,a+2)$$

$\lambda_3 = a+3$

$$\begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ (2a+2)\,x - (a+1)\,y - 2z = 0 \\ 2x - y - (a+2)z = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{V}_3 = (1,2,0)$$

2) Si $a = -3$, on a : $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Le calcul précédent donne : $\mathbf{V}_2 = (1,\ 2,\ -1)$ Le système d'équations donnant les vecteurs propres associés à $\lambda = 0$ se réduit à : $2x - y + z = 0$ ce qui définit un sous-espace propre de dimension 2 engendré, par exemple, par $\mathbf{V}_1 = (0,\ 1,\ 1)$ et $\mathbf{V}_3 = (1,\ 2,\ 0)$ précédemment obtenus.

3) Si $a = -2$, on a : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ On a encore : $\mathbf{V}_1 = (0,\ 1,\ 1)$ Le système d'équations donnant les vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ se réduit à :

$$\begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ 2x - y \phantom{{}-z} = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire : $z = 0$, $2x - y = 0$, ce qui définit un sous-espace propre de dimension 1 engendré par le vecteur $\mathbf{V}_2 = (1,\ 2,\ 0)$.

TESTS

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres des matrices suivantes :

T₁ $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

T₂ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a & b \\ 0 & 1 & 3 & c \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

T₃ $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 9 \\ -9 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

T₄ $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 11 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

T₅ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & 0 & 1 \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 \dots 0 \end{bmatrix}$ matrice *(n, n)*

T₆ Soit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots 0 & a_n \\ 0 & 0 & \dots 0 & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & \dots a_2 & a_1^2 \end{bmatrix}$$

avec $a_2, \dots, a_n$ réels non tous nuls.

1) Déterminer le polynôme caractéristique P_n de A (on établira une relation de récurrence entre P_n et P_{n-1}).
2) Déterminer les vecteurs propres de A.

Réponses

T₁ $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$; $\mathbf{V}_1 = (1, 1)$; $\mathbf{V}_2 = (4, 1)$

T₂ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$

Sous-espace propre de dimension 1 engendré par $\mathbf{V}(1, 0, 0, 0)$.

T₃ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1+3i, \lambda_3 = 1-3i$

$\mathbf{V}_1 = (3, 9, 2)$; $\mathbf{V}_2 = (1-i, 3, 1)$; $\mathbf{V}_3 = (1+i, 3, 1)$

T₄ $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6$

$\mathbf{V}_1 = (1, 2, 2)$; $\mathbf{V}_2 = (2, 1, -2)$; $\mathbf{V}_3 = (2, -2, 1)$

T₅ $\lambda_1 = n - 1, \lambda_2 = \dots = \lambda_n = -1$

$\mathbf{V}_1 = (1, 1, \dots, 1)$

Pour la valeur propre -1, on a un sous-espace propre de dimension $(n-1)$ défini par $x_1 = -x_2 - \dots - x_n$.

T₆ 1) $P_n = -\lambda P_{n-1} + (-1)^{n-1} a_n^2 \lambda^{n-2}$

$P_n = (-\lambda)^{n-2} [\lambda^2 - a_1^2 \lambda - (a_2^2 + \dots + a_n^2)]$

2) $\lambda_1 = \frac{1}{2} [a_1^2 + \sqrt{a_1^4 + 4(a_1^2 + \dots + a_n^2)}\,]$

$\lambda_2 = a_1^2 - \lambda_1, \ \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$

$\mathbf{V}_1 = (a_n, \dots, a_2, \lambda_1)$; $\mathbf{V}_2 = (a_n, \dots, a_2, \lambda_2)$

Pour la valeur propre 0, on a un sous-espace propre de dimension $(n-2)$ défini par :

$$x_n = 0, \ a_n x_1 + \dots + a_2 x_{n-1} = 0$$

5.2. Diagonalisation des matrices

5.2.1. Indépendance linéaire des vecteurs propres

Propriété. – **p vecteurs propres $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_p$ associés à p valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ deux à deux distinctes sont linéairement indépendants.**

La propriété est vraie pour $p = 1$, un vecteur propre étant non nul par définition. Supposons la propriété vraie pour $(p-1)$ vecteurs et $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_p$ liés par la relation :

$$\mathbf{V}_1 = \alpha_2 \mathbf{V}_2 + \dots + \alpha_p \mathbf{V}_p$$

On a alors :

$$f(\mathbf{V}_1) = f(\alpha_2 \mathbf{V}_2 + \dots + \alpha_p \mathbf{V}_p) = \lambda_1 \mathbf{V}_1$$

$$\alpha_2 f(\mathbf{V}_2) + \dots + \alpha_p f(\mathbf{V}_p) - \lambda_1 \mathbf{V}_1 = \mathbf{0}$$

$$\alpha_2 \lambda_2 \mathbf{V}_2 + \dots + \alpha_p \lambda_p \mathbf{V}_p - \lambda_1 (\alpha_2 \mathbf{V}_2 + \dots + \alpha_p \mathbf{V}_p) = \mathbf{0}$$

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{V}_2 + \dots + \alpha_p (\lambda_p - \lambda_1) \mathbf{V}_p = \mathbf{0}$$

ou, d'après l'indépendance linéaire des $(p-1)$ vecteurs $\mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_p$:

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) = \dots = \alpha_p (\lambda_p - \lambda_1) = 0$$

Les λ_i étant deux à deux distincts, on en déduit $\alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$, soit $\mathbf{V}_1 = \mathbf{0}$ ce qui est impossible.

Les vecteurs $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_p$ sont donc linéairement indépendants.

5.2.2. Matrices diagonalisables

On dit qu'une **matrice** A de $\mathbf{M}_n(K)$ est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale de $\mathbf{M}_n(K)$.

On dit qu'un **endomorphisme** f d'un espace vectoriel E est **diagonalisable** s'il existe une base de E par rapport à laquelle la matrice de f soit diagonale. f étant représenté par rapport à deux bases différentes par des matrices semblables, cela revient à dire que la matrice de f par rapport à une base quelconque est diagonalisable.

5.2.3. Conditions de diagonalisation

Propriété. – **Pour qu'une matrice A de $M_n(K)$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'on puisse trouver une base de K^n formée de vecteurs propres de A.**

a) Si A est diagonalisable, il existe une base (e'_i) par rapport à laquelle la matrice de f est diagonale :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \mathbf{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

On a donc $f(e'_j) = \lambda_j\, e'_j$ et les e'_j sont vecteurs propres de A.

b) Réciproquement, soit $(\mathbf{V}_1, ..., \mathbf{V}_n)$ une base de K^n formée de vecteurs propres de A.
On a $f(\mathbf{V}_i) = \lambda_i\, \mathbf{V}_i$ et par rapport à la base $(\mathbf{V}_i)$, f est représenté par la matrice D.
La matrice A représentant f dans une autre base est semblable à D.

Corollaire. – **Toute matrice carrée de $M_n(\mathbf{C})$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.**

En effet, les n vecteurs propres correspondants sont linéairement indépendants (§ 5.2.1.) et forment une base de $\mathbf{C}^n$.

Propriété. – **Pour qu'une matrice de $M_n(K)$ soit diagonalisable, il faut et il suffit que toutes ses valeurs propres soient dans K et que la dimension du sous-espace propre associé à chaque valeur propre soit égale à l'ordre de cette valeur propre** (à une valeur propre d'ordre r, on peut associer r vecteurs propres linéairement indépendants).

a) Si A est diagonalisable, il existe une base (e'_i) formée de vecteurs propres de A.
Supposons $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r$ et $\lambda_i \neq \lambda_1$ pour $i > r+1$.

Si $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, e'_i$ est un vecteur propre associé à λ_1, la relation $f(\mathbf{V}) - \lambda_1\, \mathbf{V} = \mathbf{0}$ donne :

$$\sum_{i=r+1}^{n} \alpha_i\,(\lambda_i - \lambda_1)\, e'_i = \mathbf{0}$$

d'où : $\alpha_{r+1} = \ldots = \alpha_n = 0$

Le sous-espace propre associé à λ_1 est donc de dimension r (engendré par $e'_1, ..., e'_r$).

b) Réciproquement, soient $\lambda_1, ..., \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A, d'ordres respectifs $r_1, ..., r_k$ avec $r_1 + \ldots + r_k = n$. Supposons qu'à chaque valeur propre λ_j, on puisse associer r_j vecteurs propres linéairement indépendants.
Soit $(\mathbf{V}_1, ..., \mathbf{V}_n)$ le système de vecteurs obtenu par réunion de tous ces vecteurs propres. Montrons que c'est un système libre.

La relation $\alpha_1\, \mathbf{V}_1 + \ldots + \alpha_n\, \mathbf{V}_n = \mathbf{0}$ s'écrit, en regroupant les vecteurs associés à une même valeur propre :

$$\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 + \ldots + \mathbf{W}_k = \mathbf{0}$$

où $\mathbf{W}_j$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_j ou le vecteur nul.

Les vecteurs $\mathbf{W}_j$ sont tous nuls car des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont linéairement indépendants (§ 5.2.1.) et ne peuvent avoir une somme nulle.

$\mathbf{V}_1, ..., \mathbf{V}_{r_1}$ étant linéairement indépendants, le vecteur

$$\mathbf{W}_1 = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i\, \mathbf{V}_i$$

ne peut être nul que si $\alpha_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant r_1)$. On démontre de même que les autres α_i sont nuls.

$(\mathbf{V}_1, ..., \mathbf{V}_n)$ système de n vecteurs linéairement indépendants de K^n est donc une base de K^n et A est diagonalisable.

Remarque. – Si A est une matrice réelle diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$, elle n'est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{R})$ que si toutes ses valeurs propres sont réelles.

Exercice - Exemple

$\boxed{E_3}$ A quelles conditions peut-on diagonaliser la matrice suivante de $M_3(\mathbf{R})$?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Pour qu'on puisse diagonaliser A, il faut et il suffit qu'on puisse trouver une base de vecteurs propres.

Les valeurs propres sont 1, 1, c.

1) Si $c = 1$, on a la valeur propre triple $\lambda = 1$ et les vecteurs propres sont donnés par :

$$\begin{cases} ay + bz = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

- *si $a \neq 0$: $y = z = 0$ (sous-espace propre de dimension 1) ;*
- *si $a = 0$: $z = 0$ (sous-espace propre de dimension 2).*

On a donc au plus 2 vecteurs propres linéairement indépendants et A n'est pas diagonalisable.

2) Si $c \neq 1$, $\lambda = 1$ est valeur propre double et les vecteurs propres associés vérifient :

$$\begin{cases} ay + bz = 0 \\ z = 0 \\ (c-1)z = 0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} z = 0 \\ ay = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

- *si $a \neq 0$: $y = z = 0$ (sous-espace propre de dimension 1) ;*
- *si $a = 0$: $z = 0$ (sous-espace propre de dimension 2).*

La matrice n'est donc diagonalisable que pour $a = 0$ et $c \neq 1$. Dans ce cas, on peut prendre comme vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ les vecteurs :

$$\mathbf{V}_1 = (1, 0, 0) \quad ; \quad \mathbf{V}_2 = (0, 1, 0)$$

A la valeur propre $\lambda = c$, on associe le vecteur propre : $\mathbf{V}_3 = (b, 1, c-1)$. On a alors :

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} P^{-1}$$

avec :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & c-1 \end{bmatrix}$$

TESTS

A quelles conditions les matrices réelles suivantes sont-elles diagonalisables ?

$\boxed{T_7}$ $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 2a & -2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{T_8}$ $$\begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ 0 & 1 & b & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{T_9}$ Matrice d'ordre $2n$ vérifiant :

$$\begin{cases} a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i < j \\ a_{2k-1,2k-1} = a_{2k,2k} = \lambda_k \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nombres distincts.

Réponses

T_7 $P(\lambda) = \lambda(4a + 4 - \lambda^2)$

Si $a > -1$, matrice diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$.
Si $a < -1$, matrice diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbf{C})$.
Si $a = -1$, matrice non diagonalisable.

T_8 Matrice diagonalisable dans $\mathbf{M}_4(\mathbf{R})$ si $a = b = 0$.

T_9 Matrice diagonalisable dans $\mathbf{M}_{2n}(\mathbf{R})$ si $a_{2k,2k-1} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n)$

5.3. Applications de la diagonalisation

5.3.1. Calcul des puissances d'une matrice

Si A est une matrice carrée d'ordre n diagonalisable, on a :

$$D = P^{-1} AP$$

où D est une matrice diagonale. On en déduit :

$$A = PD P^{-1}$$
$$A^2 = (PD P^{-1})(PD P^{-1}) = P D^2 P^{-1}$$

et plus généralement :

$$A^k = P D^k P^{-1}$$

la puissance $k^{ème}$ de D se calculant immédiatement.

Si A est en outre régulière, on peut calculer les puissances entières négatives de A :

$$A^{-1} = P D^{-1} P^{-1}$$
$$A^{-2} = A^{-1} A^{-1} = P D^{-2} P^{-1}$$
$$A^{-k} = P D^{-k} P^{-1}$$

Exercice - Exemple

$\boxed{E_4}$ Calculer la puissance $n^{ème}$ de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 44\lambda + 48$$
$$= -(\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 6)$$

Calculons les vecteurs propres :

$$\lambda_1 = 2 \quad \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{V}_1 = (0, 1, 1)$$

$$\lambda_2 = 4 \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{V}_2 = (1, 0, 1)$$

$$\lambda_3 = 6 \quad \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{V}_3 = (1, 1, 0)$$

On a :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = D$$

avec :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et :

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$A^n = P D^n P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6^n + 4^n & 6^n - 4^n & -6^n + 4^n \\ 6^n - 2^n & 6^n + 2^n & -6^n + 2^n \\ 4^n - 2^n & -4^n + 2^n & 4^n + 2^n \end{bmatrix}$$

TESTS

Calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ des matrices suivantes :

$\boxed{\mathbf{T_{10}}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$\boxed{\mathbf{T_{11}}}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Réponses

T₁₀ $-\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4^n - 3.2^n & 4^n - 2^n \\ 3.2^n - 3.4^n & 2^n - 3.4^n \end{bmatrix}$

T₁₁ $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{bmatrix}$

avec : $a_n = 2^n + 2(-1)^n$
$b_n = 2^n + (-1)^{n+1}$

5.3.2. Suites récurrentes

Soit $\{u_j\}$ une suite de nombres de K définis par une relation de récurrence linéaire, par exemple :

$$u_j = a_1 u_{j-1} + a_2 u_{j-2} + a_3 u_{j-3} \qquad j \geqslant 3$$

avec u_0, u_1, u_2 donnés. On cherche à exprimer u_j en fonction de j. Pour cela on ajoute à la relation de récurrence, les relations :

$$u_{j-1} = u_{j-1}$$
$$u_{j-2} = u_{j-2}$$

soit, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_j \\ u_{j-1} \\ u_{j-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{j-1} \\ u_{j-2} \\ u_{j-3} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} u_{j-1} \\ u_{j-2} \\ u_{j-3} \end{bmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{bmatrix} u_j \\ u_{j-1} \\ u_{j-2} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} u_{j-1} \\ u_{j-2} \\ u_{j-3} \end{bmatrix} = A^2\begin{bmatrix} u_{j-2} \\ u_{j-3} \\ u_{j-4} \end{bmatrix} = \ldots = A^{j-2}\begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

et on est ramené à calculer les puissances de la matrice A.

La même méthode peut s'appliquer au cas de plusieurs suites récurrentes définies par une relation de la forme :

$$\begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} u_{j-1} \\ v_{j-1} \\ w_{j-1} \end{bmatrix}$$

avec u_0, v_0, w_0 donnés.

Exercice - Exemple

$\boxed{\mathbf{E_5}}$ Calculer en fonction de n les nombres u_n et v_n définis pour $n \geqslant 1$ par les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} - 4v_{n-1} \\ v_n = u_{n-1} + 2v_{n-1} \end{cases}$$

avec u_0 et v_0 donnés.

On a :

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = A^n\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 2 + 2i$ et $\lambda_2 = 2 - 2i$, les vecteurs propres associés $\mathbf{V}_1 = (2i, 1)$ et $\mathbf{V}_2 = (-2i, 1)$. On a alors :

$$P^{-1} AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = D$$

avec :

$$P = \begin{bmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \frac{1}{4i}\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ -1 & 2i \end{bmatrix}$$

$$A^n = P\,D^n\,P^{-1} = \frac{1}{4i}\begin{bmatrix} 2i(\lambda_1^n + \lambda_2^n) & -4(\lambda_1^n - \lambda_2^n) \\ \lambda_1^n - \lambda_2^n & 2i(\lambda_1^n + \lambda_2^n) \end{bmatrix}$$

Les relations :

$$\lambda_1 = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\; e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = 2\sqrt{2}\; e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

donnent :

$$\lambda_1^n + \lambda_2^n = 2\,(2\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\lambda_1^n - \lambda_2^n = 2\,(2\sqrt{2})^n\, i \sin\frac{n\pi}{4}$$

et finalement :

$$A^n = 2^{n-1}\,(\sqrt{2})^n \begin{bmatrix} 2\cos\frac{n\pi}{4} & -4\sin\frac{n\pi}{4} \\ \sin\frac{n\pi}{4} & 2\cos\frac{n\pi}{4} \end{bmatrix}$$

$$u_n = 2^n\,(\sqrt{2})^n\,(u_0 \cos\frac{n\pi}{4} - 2\,v_0 \sin\frac{n\pi}{4})$$

$$v_n = 2^{n-1}\,(\sqrt{2})^n\,(u_0 \sin\frac{n\pi}{4} + 2\,v_0 \cos\frac{n\pi}{4})$$

TESTS

T_{12} Calculer u_n défini pour $n \geqslant 2$ par la relation de récurrence $u_n = -u_{n-1} + u_{n-2}$ avec u_0 et u_1 donnés.

T_{13} Calculer en fonction de n les nombres u_n et v_n définis pour $n \geqslant 1$ par :

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + v_{n-1} \\ v_n = -5\,u_{n-1} - 3\,v_{n-1} \end{cases}$$

avec u_0 et v_0 donnés.

T_{14} Calculer en fonction de n les nombres u_n, v_n, w_n définis pour $n \geqslant 1$ par :

$$\begin{aligned} u_n &= \phantom{2\,u_{n-1}} - 2\,v_{n-1} + 3\,w_{n-1} \\ v_n &= 2\,u_{n-1} - 3\,v_{n-1} + 6\,w_{n-1} \\ w_n &= u_{n-1} - 2\,v_{n-1} + 4\,w_{n-1} \end{aligned}$$

avec u_0, v_0, w_0 donnés (pour l'écriture du résultat, distinguer les cas n pair et n impair).

Réponses

T_{12} $$u_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}}\, u_1 + \frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\sqrt{5}}\, u_0$$

avec : $\lambda_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $\lambda_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

T_{13} $$u_n = (\sqrt{2})^n\,[u_o\,(\cos\frac{3n\pi}{4} + 2\sin\frac{3n\pi}{4}) + v_o \sin\frac{3n\pi}{4}]$$

$$v_n = (\sqrt{2})^n\,[-5\,u_0 \sin\frac{3n\pi}{4} + v_0\,(\cos\frac{3n\pi}{4} - 2\sin\frac{3n\pi}{4})]$$

T_{14} $$\begin{cases} u_{2k} = (-1)^k\,u_0 \\ v_{2k} = [-3 + 4(-1)^k]\,v_0 + [6 - 6(-1)^k]\,w_0 \\ w_{2k} = [-2 + 2(-1)^k]\,v_0 + [4 - 3(-1)^k]\,w_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{2k+1} = 2\,(-1)^{k+1}\,v_0 + 3\,(-1)^k\,w_0 \\ v_{2k+1} = 2\,(-1)^k\,u_0 - 3\,v_0 + 6\,w_0 \\ w_{2k+1} = (-1)^k\,u_0 - 2\,v_0 + 4\,w_0 \end{cases}$$

*5.4. Forme triangulaire des matrices

Propriété. – **Toute matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ est semblable à une matrice triangulaire.**

Soit A une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ et f l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ représenté par cette matrice dans une base de $\mathbf{C}^n$.

Dans $\mathbf{C}$, le polynôme caractéristique de A possède n zéros. Soit λ_1 l'un de ces zéros et $\mathbf{V}_1$ un vecteur propre associé. Il existe (§ 1.4.) une base de $\mathbf{C}^n$ ayant $\mathbf{V}_1$ comme premier vecteur.

On a : $f(\mathbf{V}_1) = \lambda_1\,\mathbf{V}_1$ et la matrice A' de f par rapport à la nouvelle base s'écrit :

$$A' = P^{-1} AP = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right]$$

où B est une matrice carrée d'ordre $(n-1)$.

Si $n = 2$, A' est triangulaire et le résultat est démontré.

Si $n > 2$, supposons construite une base $(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_k, \mathbf{e}_{k+1},..., \mathbf{e}_n)$ de $\mathbf{C}^n$ par rapport à laquelle la matrice de f soit :

$$A' = \left[\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline \mathbf{O} & B \end{array}\right]$$

avec :

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & c_{12} \ldots c_{1k} \\ & \lambda_2 \ldots c_{2k} \\ & \ddots \\ \mathbf{O} & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

$D \in \mathbf{M}_{k,n-k}(\mathbf{C})$; $B \in \mathbf{M}_{n-k}(\mathbf{C})$.

(On sait construire une telle base pour $k = 1$). On a alors :

$$f(\mathbf{V}_j) = \lambda_j \mathbf{V}_j + \sum_{i<j} c_{ij} \mathbf{V}_i \qquad (j = 1,..., k)$$

$$f(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{k} d_{i,j-k} \mathbf{V}_i + \sum_{i=k+1}^{n} b_{i-k,j-k} \mathbf{e}_i \qquad (j = k+1,..., n)$$

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^n$ engendré par $(\mathbf{e}_{k+1},..., \mathbf{e}_n)$ et g l'endomorphisme de F défini par :

$$g(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=k+1}^{n} b_{i-k,j-k} \mathbf{e}_i \qquad (j = k+1,..., n)$$

Par rapport à la base $(\mathbf{e}_{k+1},..., \mathbf{e}_n)$, la matrice de g est B.

Toute valeur propre de B est aussi valeur propre de A car :

$$\det(A-\lambda I) = \det(A'-\lambda I)$$
$$= (\lambda_1 - \lambda) \ldots (\lambda_k - \lambda) \det(B-\lambda I)$$

Soit : $\mathbf{W} = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j \mathbf{e}_j$ un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ_{k+1}.

$\mathbf{W}$ étant non nul, on peut dans la base $(\mathbf{e}_{k+1},..., \mathbf{e}_n)$ remplacer l'un des vecteurs $\mathbf{e}_j$ par $\mathbf{W}$ (§ 1.4.).

On obtient ainsi $(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_k, \mathbf{W}, \mathbf{e}'_{k+2},..., \mathbf{e}'_n)$ base de $\mathbf{C}^n$ dans laquelle :

$$f(\mathbf{V}_j) = \lambda_j \mathbf{V}_j + \sum_{i<j} c_{ij} \mathbf{V}_i \qquad (j = 1,..., k)$$

$$f(\mathbf{W}) = \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j f(\mathbf{e}_j)$$
$$= \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j \left[\sum_{i=1}^{k} d_{i,j-k} \mathbf{V}_i + g(\mathbf{e}_j)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j d_{i,j-k}\right] \mathbf{V}_i + \sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j g(\mathbf{e}_j)$$

et on a :

$$\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j g(\mathbf{e}_j) = g(\mathbf{W}) = \lambda_{k+1} \mathbf{W}$$

Dans la nouvelle base, la $(k+1)^{\text{ème}}$ colonne de la matrice de f comporte donc des zéros sous la diagonale et on retrouve une forme analogue à celle de A' mais avec $(k+1)$ colonnes de zéros au lieu de k.

On continue la même construction à partir de la nouvelle base et on obtient finalement une base $(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_{n-1}, \mathbf{e}''_n)$ par rapport à laquelle la matrice de f est triangulaire.

Corollaire. – **Le rang d'une matrice est égal au nombre de valeurs propres non nulles (chacune étant comptée un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité).**

Ce résultat est vrai pour une matrice triangulaire (§ 4.2.1.) et deux matrices semblables représentant un même endomorphisme par rapport à deux bases différentes ont même rang.

Remarques. – *a)* Le vecteur propre de B est un vecteur à $(n-k)$ composantes. D'après le calcul précédent, on en déduit $\mathbf{W}$ en ajoutant k premières composantes nulles.

b) Pour diminuer le nombre de changements de base, on introduit à chaque fois dans la nouvelle base le plus grand nombre possible de vecteurs propres de la matrice B (ou A lors du premier changement de base).

c) La matrice de f par rapport à la base $(\mathbf{e}_1,..., \mathbf{e}_n)$ étant triangulaire supérieure, il suffit de considérer la base $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n-1},..., \mathbf{e}_1)$ pour obtenir une matrice triangulaire inférieure.

d) **Toute matrice réelle à valeurs propres réelles est semblable à une matrice triangulaire réelle.** En effet, les vecteurs propres sont à composantes réelles et tous les calculs précédents s'effectuent sur des nombres réels.

e) **Forme de Jordan.** – On démontre que toute matrice A de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ est semblable à une matrice A' diagonale par blocs. Si $\lambda_1,..., \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes de A, la matrice A' comporte p blocs, le bloc associé à une valeur propre λ d'ordre r étant la matrice carrée d'ordre r égale à :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{O} \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{O} & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Exercice - Exemple

$\boxed{E_6}$ Déterminer une matrice triangulaire semblable à la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 & 5 \\ 10 & 7 & 4 & 9 \\ 9 & 6 & 4 & 8 \\ -15 & -9 & -5 & -12 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2)^2$$

Les vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 1$ *et* $\lambda_2 = 2$ *sont respectivement :*

$$\mathbf{V}_1 = (3, 2, 3, -6)$$
$$\mathbf{V}_2 = (0, 1, 1, -1)$$

On complète en une base par $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$. *La matrice de passage est alors :*

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et :

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$A_1 = P^{-1} AP = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 11 \end{bmatrix}$$

On considère alors la matrice B d'ordre 2 :

$$B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$$

B a pour valeurs propres $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = 2$ *et pour vecteurs propres :*

$$\mathbf{W}_3 = (-8, 5)$$
$$\mathbf{W}_4 = (1, -1)$$

On leur associe dans $\mathbf{R}^4$ *les vecteurs* $\mathbf{V}_3 = (0, 0, -8, 5)$ *et* $\mathbf{V}_4 = (0, 0, 1, -1)$. *On prend pour base* $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4)$ *:*

$$A_2 = Q^{-1} A_1 Q$$

avec :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

et :

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

TESTS

Déterminer des matrices triangulaires semblables aux matrices suivantes :

$\boxed{T_{15}}$ $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{T_{16}}$ $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ -5 & -6 & -5 \end{bmatrix}$

Réponses

T_{15} $\lambda = 1$ valeur propre double $\mathbf{V}_1 = (1,1,1)$ $\lambda = 2$, $\mathbf{V}_2 = (4, 2, 1)$. On complète par $\mathbf{V}_3 = (0, 0, 1)$

$$P^{-1} AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Un choix différent du 3ème vecteur de la nouvelle base conduit à une matrice triangulaire différente. Par exemple avec $\mathbf{V}_3 = (1, 0, 0)$, on obtient la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T_{16} $\lambda = 2$ valeur propre triple. Un seul vecteur propre $\mathbf{V}_1 = (2, 3, -4)$. Par rapport à la base $(\mathbf{V}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, on obtient la matrice :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 3 & 1/2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{V}_2 = (0, -1, 2)$ et par rapport à la base $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{e}_3)$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3/2 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*5.5. Théorème de Cayley - Hamilton

5.5.1. Propriétés des polynomes de matrice

A étant une matrice de $\mathbf{M}_n(K)$ et q un polynôme à coefficients dans K, on a défini la matrice $q(A)$ en posant :

$$q(A) = a_0 A^r + a_1 A^{r-1} + \dots + a_{r-1} A + a_r I$$

avec :

$$q(x) = a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \dots + a_{r-1} x + a_r$$

Des relations :

$$A^k A^{k'} = A^{k+k'} \quad , \quad I A^k = A^k I = A^k$$

$$(Q^{-1} A Q)^k = Q^{-1} A^k Q$$

on déduit les propriétés suivantes :

a) Si q est un produit de deux polynômes $(q = q_1 q_2)$:

$$q(A) = q_1(A)\, q_2(A) = q_2(A)\, q_1(A)$$

b) Si $q(x) = (x_1 - x) \dots (x_r - x)$:

$$q(A) = (x_1 I - A) \dots (x_r I - A)$$

le produit de ces r matrices pouvant être calculé dans n'importe quel ordre.

c) $q(Q^{-1} A Q) = Q^{-1} q(A) Q$

5.5.2. Théoreme de Cayley - Hamilton

Si P est le polynôme caractéristique de A : $P(A) = \mathbf{O}$.

Pour démontrer le théorème, on peut d'après la propriété *c)* remplacer A par une matrice semblable. Soit donc A une matrice triangulaire de $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

Supposons les k premières colonnes de la matrice $B_k = (\lambda_1 I - A) \dots (\lambda_k I - A)$ nulles, ce qui est vérifié pour $k = 1$.
Dans les $(k + 1)$ premières colonnes de $C = \lambda_{k+1} I - A$, il y a des zéros à partir de la ligne $k + 1$. Pour la matrice $B_{k+1} = B_k C$, on obtient, pour $j \leqslant k + 1$:

$$\sum_{p=1}^{n} b_{ip}\, c_{pj} = 0$$

car : $b_{ip} = 0$ si $p \leqslant k$

$c_{pj} = 0$ si $p \geqslant k+1$

Donc les $(k+1)$ premières colonnes de B_{k+1} sont nulles et $P(A) = B_n$ est la matrice nulle.

Exercice - Exemple

E$_7$ Calculer en utilisant le théorème de Cayley - Hamilton l'inverse de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 23\lambda + 14$$

D'après le théorème de Cayley - Hamilton :

$$A^3 - 10A^2 + 23A - 14I = \mathbf{O}$$

$$A(A^2 - 10A + 23I) = 14I$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14}(A^2 - 10A + 23I)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & 10 & -36 \\ -3 & -4 & 27 \\ -1 & -6 & 23 \end{bmatrix}$$

TESTS

Calculer en utilisant le théorème de Cayley - Hamilton les inverses des matrices :

T$_{17}$ $\begin{bmatrix} 3 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

T$_{18}$ $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

Réponses

T_{17} $- A^3 + 5\,A^2 - 13\,A - 3\,I = \mathbf{O}$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\,(-A^2 + 5\,A - 13\,I)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & -2 & -17 \\ 3 & 0 & -9 \\ 6 & -1 & -19 \end{bmatrix}$$

T_{18} $- A^3 - 35\,I = \mathbf{O}$

$$A^{-1} = -\frac{1}{35}\,A^2 = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -10 & 0 & 5 \\ -12 & 21 & -1 \end{bmatrix}$$