2. Matrices

Rappelons que K désigne le corps **R** des réels ou le corps **C** des complexes.

2.1. Définitions générales

2.1.1. Matrice

On appelle **(n, p) matrice** (à éléments dans K) ou matrice à n lignes et p colonnes un tableau rectangulaire de np éléments de K rangés en n lignes et p colonnes.

En notant a_{ij} le $j^{\text{ème}}$ élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne (le premier indice indique la ligne et le second la colonne), la matrice s'écrit :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1j} \ldots a_{1p} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1} & a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots a_{ip} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nj} \ldots a_{np} \end{bmatrix}$$

On utilise aussi la notation condensée :

$$A = \left[a_{ij}\right]$$

On dit que l'on a une **matrice réelle** lorsque $K = \mathbf{R}$ et une **matrice complexe** lorsque $K = \mathbf{C}$.

L'ensemble des (n, p) matrices à éléments dans K est noté $\mathbf{M}_{np}(K)$ ou lorsqu'il n'y a pas ambiguité $\mathbf{M}_{np}$.

Si $p = 1$, on dit que A est une **matrice colonne**. On utilise alors un seul indice et on écrit :

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Notation. – **Dans toute la suite, étant donné un vecteur V de K^n, on notera V la matrice colonne de $\mathbf{M}_{n,1}(K)$ dont les éléments sont les composantes du vecteur V.**

Si $n = 1$, on dit que A est une **matrice ligne** et on écrit :

$$A = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \ldots \beta_p \end{bmatrix}$$

Si $n = p$, on dit que A est une **matrice carrée d'ordre** n. L'ensemble $\mathbf{M}_{nn}(K)$ des matrices carrées d'ordre n est simplement noté $\mathbf{M}_n(K)$.

On appelle **$i^{\text{ème}}$ vecteur ligne de A** le vecteur de K^p dont les composantes sont les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et **$j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de A** le vecteur de K^n dont les composantes sont les éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Deux **matrices** A et B de $\mathbf{M}_{np}(K)$ sont dites **égales** si elles ont mêmes éléments c'est-à-dire si :

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j \ (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant p)$$

2.1.2. Application linéaire associée a une matrice

Soit $A = \left[a_{ij}\right]$ une matrice de $\mathbf{M}_{np}(K)$, E et F deux espaces vectoriels sur K de dimensions respectives p et n (par exemple K^p et K^n) rapportés à deux bases $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p)$ et $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$.

On appelle **application linéaire associée à la matrice** A l'application linéaire (§ 1.6.) f_A : $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ de E dans F définie par :

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j \qquad i = 1, \ldots, p$$

avec :

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{p} x_j \mathbf{e}_j \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbf{f}_i$$

On dit aussi que **A est la matrice de l'application** f_A (par rapport aux bases considérées dans E et F).

L'application $A \to f_A$ est (lorsqu'on a fixé des bases dans E et F) une bijection de $\mathbf{M}_{np}$ sur $\mathcal{L}(E,F)$.

En effet, tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$ a un antécédent. D'autre part, si $f_A = f_B$, on a :

$$f_A(\mathbf{e}_j) = f_B(\mathbf{e}_j) \qquad 1 \leqslant j \leqslant p$$

et les matrices A et B sont égales (mêmes vecteurs colonnes).

Dans les formules définissant f_A, prenons tous les x_j nuls sauf x_k égal à 1. On a alors $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$ et on obtient pour $\mathbf{y} = f_A(\mathbf{e}_k)$ le vecteur de composantes $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$. Donc, **les éléments de la $k^{\text{ème}}$ colonne de A sont les composantes du vecteur $f_A(\mathbf{e}_k)$, image par f_A du $k^{\text{ème}}$ vecteur de la base de E.** Ce qui permet de déterminer colonne par colonne la matrice d'une application linéaire.

On appelle **matrice nulle** de $\mathbf{M}_{np}$ et on note O la matrice de l'application nulle :

$$(x_1, \ldots, x_p) \to (0, \ldots, 0)$$

On a donc :

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i, j \ (1 \leqslant i \leqslant n, \ 1 \leqslant j \leqslant p)$$

On appelle **matrice unité d'ordre** p et on note I_p (ou I quand il n'y a pas d'ambiguité) la matrice de l'application identique de E dans lui-même :

$$(x_1, \ldots, x_p) \to (x_1, \ldots, x_p)$$

On a donc :

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases} \quad (1 \leqslant i \leqslant p, \ 1 \leqslant j \leqslant p)$$

Exercices - Exemples

E₁ $\mathbf{R}^3$ étant rapporté à un trièdre orthonormé $0xyz$ de vecteurs unitaires **i**, **j**, **k**, déterminer la matrice de la symétrie par rapport au plan $y = z$.

On a une application de $\mathbf{R}^3$ *dans* $\mathbf{R}^3$, *représentée par une matrice carrée d'ordre 3.*

i *est invariant (contenu dans le plan),* **j** *devient* **k** *et* **k** *devient* **j**. *Les vecteurs colonnes de A sont donc* **i**, **k**, **j** *et :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

E₂ $\mathbf{R}^3$ étant rapporté à un trièdre $0xyz$ de vecteurs unitaires **i**, **j**, **k**, déterminer la matrice de la projection sur le plan $x0y$ parallèlement au vecteur **V** de composantes $(1, 1, 1)$.

On a une application de $\mathbf{R}^3$ *dans* $\mathbf{R}^3$, *représentée par une matrice carrée d'ordre 3.*

i *et* **j** *sont invariants (contenus dans le plan x0y) et* **k** *a pour image le vecteur de composantes (–1, –1, 0) ce qui donne :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut aussi chercher globalement A en déterminant les relations liant les composantes (x, y, z) d'un vecteur **OM** *aux composantes (X, Y, Z) de sa projection* **OM'**. *On a Z = 0 et* **MM'** *est parallèle au vecteur* **V** *:*

$$\frac{X-x}{1} = \frac{Y-y}{1} = \frac{Z-z}{1}, \quad Z = 0$$

soit : $X = x - z \ ; \ Y = y - z \ ; \ Z = 0.$

E₃ P_n désignant l'espace des polynômes à coefficients dans K, de degré au plus égal à n, rapporté à la base $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ avec $\mathbf{e}_i : x \to x^i$, déterminer la matrice de l'application linéaire $P \to Q$ de P_2 dans P_3 définie par :

$$Q(x) = x^2 \ P'(x) - P(x)$$

Transformons les vecteurs de la base de P_2 *:*

$$\begin{array}{lllll} 1 & \to -1 + & 0\,x + & 0\,x^2 + & 0\,x^3 \\ x & \to \ \ 0 - & x + & x^2 + & 0\,x^3 \\ x^2 & \to \ \ 0 + & 0\,x - & x^2 + & 2\,x^3 \end{array}$$

La matrice de l'application est donc :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

TESTS

Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes :

T₁ Dans $\mathbf{R}^3$, rapporté à un repère orthonormé, la rotation d'angle θ autour de $0z$.

T₂ Dans $\mathbf{R}^2$, rapporté à un repère orthonormé, la symétrie par rapport à la droite Δ d'angle polaire θ.

T₃ L'application $P \to Q$ de P_2 dans P_3 définie par :

$$Q(x) = P(x) - \int_0^x P(t)\,dt$$

par rapport aux bases $(1, x, x^2)$ et $(1, x, x^2, x^3)$.

Réponses

T₁ $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

T₂ $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$

T₃ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}$

2.1.3. Rang d'une matrice

On appelle **rang d'une matrice** A le rang de l'application linéaire f_A associée à cette matrice.

Propriété. – **Le rang d'une matrice A est le rang du système des vecteurs colonnes de A** (ou le nombre maximum de vecteurs colonnes linéairement indépendants).

En effet, le rang de f_A est (§ 1.6.) le rang du système des vecteurs $f_A(\mathbf{e}_1),\ldots, f_A(\mathbf{e}_p)$ donc aussi le rang du système des vecteurs colonnes de A qui ont mêmes composantes.

Cette propriété montre que la notion de rang ne dépend que de A et est indépendante des espaces E, F (et de leurs bases) utilisés pour définir l'application f_A.

Remarque. – Le rang de A est aussi égal au rang du système des vecteurs lignes de A (§ 4.2.).

Exercice - Exemple

E$_4$ Déterminer le rang de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Soient $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}_4$ les vecteurs colonnes de A. La relation :

$$\lambda_1 \mathbf{V}_1 + \lambda_2 \mathbf{V}_2 + \lambda_3 \mathbf{V}_3 + \lambda_4 \mathbf{V}_4 = \mathbf{0}$$

donne :

$$\begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$

$$\mathbf{V}_4 = -(\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3)$$

Les vecteurs sont liés. Cherchons si $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ forment un système libre. Cela revient à faire le calcul précédent avec $\lambda_4 = 0$. On obtient alors :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ sont linéairement indépendants et la matrice A est de rang 3.

TESTS

Déterminer le rang des matrices suivantes :

T$_4$
$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T$_5$
$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Réponses

T$_4$ Rang $(A) = 3$

T$_5$ Rang$(B) = 2 : \mathbf{V}_1 = 3\mathbf{V}_2 + 2\mathbf{V}_4$, $\mathbf{V}_3 = 5\mathbf{V}_2 + 3\mathbf{V}_4$

2.2. Espace vectoriel $\mathbf{M}_{np}(K)$

2.2.1. Addition des matrices

A et B étant deux matrices de $\mathbf{M}_{np}(K)$, on appelle **somme** de A et B et on note $A + B$ la matrice C de l'application linéaire $f_A + f_B$.

On a donc :

$$f_C(\mathbf{e}_j) = f_A(\mathbf{e}_j) + f_B(\mathbf{e}_j) \qquad 1 \leqslant j \leqslant p$$

et le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de C est la somme du $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de A et du $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de B, ce qui conduit à la formule d'addition de deux matrices (de mêmes dimensions) :

$$\boxed{\left[a_{ij}\right] + \left[b_{ij}\right] = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]}$$

ou : **la somme de 2 matrices s'obtient en ajoutant les éléments de mêmes indices.**

Propriétés. – Elles se déduisent des propriétés de l'addition dans K :

a) L'addition est commutative :

$$A + B = B + A \qquad \forall A, B \in \mathbf{M}_{np}$$

b) L'addition est associative :

$$(A + B) + C = A + (B + C) \qquad \forall A, B, C \in \mathbf{M}_{np}$$

c) Il existe un élément neutre : la matrice nulle O de $\mathbf{M}_{np}$:

$$A + \mathrm{O} = A \qquad \forall A \in \mathbf{M}_{np}$$

d) Toute matrice A possède une opposée notée $-A$:

$$A + (-A) = \mathrm{O} \quad \text{avec} \quad -A = (-a_{ij})$$

$\mathbf{M}_{np}(K)$ est donc pour l'addition un groupe commutatif.

2.2.2. Produit par un scalaire

Si $A \in \mathbf{M}_{np}(K)$ et $\lambda \in K$, on appelle **produit de la matrice A par le scalaire λ** et on note λA la matrice C associée à l'application linéaire λf_A.

On a donc :

$$f_C(\mathbf{e}_j) = \lambda f_A(\mathbf{e}_j)$$

ce qui donne la formule du produit par un scalaire :

$$\boxed{\lambda\left[a_{ij}\right] = \left[\lambda a_{ij}\right]}$$

ou : le produit de la matrice A par le scalaire λ s'obtient en multipliant tous les éléments de A par λ.

Propriétés. – Elles se déduisent des propriétés de la multiplication dans K.

a) Distributivité par rapport à l'addition des matrices :

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \quad \forall \lambda \in K, \quad \forall A, B \in \mathbf{M}_{np}$$

b) Distributivité par rapport à l'addition des scalaires :

$$(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A \quad \forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall A \in \mathbf{M}_{np}$$

c) Associativité :

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) A \quad \forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall A \in \mathbf{M}_{np}$$

d) $1\, A = A \quad \forall A \in \mathbf{M}_{np}$

2.2.3. ESPACE VECTORIEL $\mathbf{M}_{np}(K)$

Les propriétés précédentes montrent que $\mathbf{M}_{np}(K)$ est un espace vectoriel sur K de dimension np.

Soit en effet $B_{k\ell}$ la matrice de $\mathbf{M}_{np}$ dont tous les éléments sont nuls sauf $b_{k\ell}$ égal à 1. Les B_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p)$ forment un système de générateurs car pour $A \in \mathbf{M}_{np}$ on a :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} B_{ij}$$

C'est aussi un système libre car :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} B_{ij} = \mathrm{O}$$

entraîne : $\lambda_{ij} = 0 \quad \forall i, j$

Les np matrices B_{ij} forment donc une base de $\mathbf{M}_{np}$.

Exercice - Exemple

$\boxed{E_5}$ Vérifier que dans $\mathbf{M}_{32}$ les matrices suivantes sont trois éléments linéairement indépendants :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

La matrice $\alpha A + \beta B + \gamma C$ *s'écrit :*

$$\begin{bmatrix} \alpha - \beta - 2\gamma & 3\beta \\ 4\alpha + 2\beta + 2\gamma & -\alpha + \beta + 5\gamma \\ -3\alpha + \gamma & 3\alpha - 2\beta + 3\gamma \end{bmatrix}$$

La relation $\alpha A + \beta B + \gamma C = \mathrm{O}$ *se traduit par les 6 conditions :*

$$\left|\begin{array}{l} \alpha - \beta - 2\gamma = 0 \\ 3\beta = 0 \\ 4\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ -3\alpha + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 2\beta + 3\gamma = 0 \end{array}\right.$$

Les trois premières donnent $\alpha = \beta = \gamma = 0$, *valeurs qui vérifient les trois dernières conditions.*

A, B, C sont donc trois éléments de $\mathbf{M}_{32}$ *linéairement indépendants.*

TESTS

$\boxed{T_6}$ Calculer $3A + 2B - C$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\boxed{T_7}$ Les trois matrices suivantes sont-elles des éléments linéairement indépendants de $\mathbf{M}_{23}$?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 7 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Réponses

T_6 $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

T_7 Non : $A + 3B - 2C = \mathrm{O}$

2.3. Produit de matrices

2.3.1. PRODUIT DE DEUX MATRICES

Considérons deux matrices $A \in \mathbf{M}_{qn}(K)$ et $B \in \mathbf{M}_{np}(K)$.

Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimensions respectives p, n, q (par exemple K^p, K^n, K^q). Ayant choisi dans chacun de ces espaces une base, on associe à A et B les applications linéaires $f_A \in \mathcal{L}(F, G)$ et $f_B \in \mathcal{L}(E, F)$ définies par :

$$\mathbf{x} \in E \xrightarrow{f_B} \mathbf{y} \in F \xrightarrow{f_A} \mathbf{z} \in G$$

$$y_k = \sum_{j=1}^{p} b_{kj}\, x_j \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, y_k \qquad i = 1, \ldots, q$$

On appelle **produit** de A par B et on note AB la matrice C associée à l'application linéaire $f_A \circ f_B$ de E dans G.

D'après la définition, **le produit AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.**

D'autre part, **le nombre de lignes de AB est égal au nombre de lignes de A et le nombre de colonnes de AB est égal au nombre de colonnes de B** car $f_{AB} \in \mathcal{L}(E, G)$:

$$\boxed{A \in \mathbf{M}_{qn},\ B \in \mathbf{M}_{np} \Rightarrow AB \in \mathbf{M}_{qp}}$$

Cherchons l'élément c_{ij} de la matrice $C = AB$.

En reportant la valeur de y_k dans z_i, on a :

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj}\, x_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}\, x_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \right) x_j$$

Or : $$z_i = \sum_{j=1}^{p} c_{ij}\, x_j$$

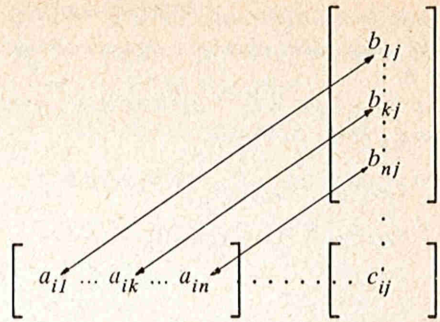
D'où la formule permettant de calculer le produit de deux matrices :

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}}$$

ou : **l'élément c_{ij} de AB s'obtient en multipliant élément par élément la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B et en faisant la somme des produits ainsi obtenus.**

Remarque. – L'élément c_{ij} de AB est égal au produit scalaire du $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne de A et du $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de B.

Pour faciliter le calcul du produit, on peut utiliser la disposition suivante. On écrit les matrices A et B de façon à ce que l'élément c_{ij} de AB se trouve à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B comme sur la figure ci-dessous. Pour obtenir c_{ij}, on ajoute les produits des éléments reliés par des flèches.



Exercices - Exemples

$\boxed{E_6}$ Effectuer le produit matriciel AB avec :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Donc le produit est possible.

On utilise la disposition indiquée précédemment :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 10 & 0 & -6 \end{bmatrix} & \leftarrow AB \end{array}$$

Par exemple, l'élément c_{12} de AB est obtenu en faisant le produit de la 1ère ligne de A par la 2e colonne de B ce qui donne :

$$c_{12} = (1).(-1) + (-2).(1) + (3).(2) = 3$$

$\boxed{E_7}$ Soient p, q, n trois entiers tels que $1 \leqslant p < q \leqslant n$ et α, β deux nombres réels. Soit $B = (b_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. Calculer le produit AB où A est la matrice carrée d'ordre n définie par :

$$\begin{cases} a_{pp} = a_{qq} = \alpha \\ a_{ii} = 1 \quad \text{si} \quad i \neq p \quad \text{et} \quad i \neq q \\ a_{qp} = \beta, \quad a_{pq} = -\beta \\ a_{ij} = 0 \quad \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On a : $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Si $i \neq p$ et $i \neq q$, dans la $i^{\text{ème}}$ ligne de A, les termes autres que a_{ii} sont nuls :

$$c_{ij} = a_{ii}\, b_{ij} = b_{ij}$$

Les lignes de AB différentes de la $p^{ème}$ et de la $q^{ème}$ sont donc identiques aux lignes correspondantes de B.

Si $i = p$ ou q, dans la $i^{ème}$ ligne de A, les termes autres que a_{ip} et a_{iq} sont nuls :

$$c_{pj} = a_{pp}\, b_{pj} + a_{pq}\, b_{qj} = \alpha\, b_{pj} - \beta\, b_{qj}$$

$$c_{qj} = a_{qp}\, b_{pj} + a_{qq}\, b_{qj} = \beta\, b_{pj} + \alpha\, b_{qj}$$

TESTS

$\boxed{T_8}$ Effectuer (si cela est possible) les produits AB et BA avec :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Effectuer les produits matriciels suivants :

$\boxed{T_9}$ $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

$\boxed{T_{10}}$ $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\boxed{T_{11}}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$\boxed{T_{12}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{T_{13}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{T_{14}}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & j \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ j^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2j \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 2j^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

avec : $j^3 = 1$.

$\boxed{T_{15}}$ Trouver les matrices $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ telles que :

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$\boxed{T_{16}}$ Trouver les matrices $A \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ telles que :

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 6 \\ -1 & 8 & 4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{T_{17}}$ Soit $A = [a_{ij}]$ la matrice carrée de dimension n définie par $a_{ij} = (-1)^{i+j}$. Calculer $A^2 = AA$.

$\boxed{T_{18}}$ Calculer le produit matriciel :

$$\begin{bmatrix} C_0^0 & 0 & 0 \,.\,.\, 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & 0 \,.\,.\, 0 \\ C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 \,.\,.\, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 \,.\,.\, C_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 \cdot\cdot & a_{n+1} \\ a_1^{\,2} & a_2^{\,2} \ldots & a_{n+1}^{\,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{\,n} & a_2^{\,n} \ldots & a_{n+1}^{\,n} \end{bmatrix}$$

Réponses

T_8 $AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Le produit BA n'est pas possible car le nombre de colonnes de B n'est pas égal au nombre de lignes de A.

T_9 $\begin{bmatrix} 8 & -9 & -7 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -7 & 9 \end{bmatrix}$

T_{10} $\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$

T_{11} $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

T_{12} $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 12 & -7 & 3 \end{bmatrix}$

T_{13} $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -9 & 7 & -6 \\ 14 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

T_{14} $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

T_{15} $A = \lambda \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbf{R}$

T_{16} $A = \begin{bmatrix} a & a-1 & 2a-1 \\ b & b-3 & 2b-4 \\ c & c-2 & 2c-1 \end{bmatrix}$

a, b, c réels arbitraires.

T_{17} $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\; a_{kj}$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k+k+j} = n(-1)^{i+j}$$

$$A^2 = nA$$

T₁₈

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^{k} (a_j)^k = (1+a_j)^{i-1}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1+a_1 & 1+a_2 & \vdots & 1+a_{n+1} \\ (1+a_1)^2 & (1+a_2)^2 & \vdots & (1+a_{n+1})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (1+a_1)^n & (1+a_2)^n & \vdots & (1+a_{n+1})^n \end{bmatrix}$$

2.3.2. Produit de plusieurs matrices

Si $A \in \mathbf{M}_{qn}$ et $B \in \mathbf{M}_{np}$, on a défini $AB \in \mathbf{M}_{qp}$. Soit alors $D \in \mathbf{M}_{pr}$. Le nombre de colonnes de AB étant égal au nombre de lignes de D, on peut définir le produit $(AB)D$.

On peut aussi définir BD qui est un élément de $\mathbf{M}_{nr}$ et ensuite $A(BD)$. D'après l'associativité de la composition des applications, on a :

$$(f_A \circ f_B) \circ f_D = f_A \circ (f_B \circ f_D)$$

ce qui entraîne : $(AB)D = A(BD)$.

Par définition la valeur commune de ces deux matrices est appelée produit ABD. On a donc :

$$\boxed{(AB)D = A(BD) = ABD}$$

Plus généralement, on peut définir le produit $A_1 A_2 \ldots A_k$ de k matrices pourvu que le nombre de colonnes de A_j soit égal au nombre de lignes de A_{j+1} pour $j = 1, 2, \ldots, k-1$.

En prenant toutes les matrices égales, on obtient la **puissance $k^{\text{ème}}$ d'une matrice carrée** A et l'associativité du produit montre que :

$$A^k A^{k'} = A^{k+k'}$$
$$(A^k)^{k'} = A^{kk'}$$

Si A est une matrice carrée d'ordre n et q un polynôme à coefficients dans K :

$$q(x) = a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_{r-1} x + a_r$$

on appelle **polynôme de matrice** $q(A)$ la matrice définie par :

$$q(A) = a_0 A^r + a_1 A^{r-1} + \ldots + a_{r-1} A + a_r I$$

où I est la matrice unité d'ordre n.

Exercices - Exemples

E₈ Calculer par récurrence sur n la puissance $n^{\text{ème}}$ de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a successivement :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supposons :

$$A^{n-1} = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & 1 & w_{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a alors :

$$A^n = A^{n-1} A = \begin{bmatrix} 2^n & u_n & v_n \\ 0 & 1 & w_n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + 2^{n-1} & u_1 = 1 \\ v_n = v_{n-1} + 2u_{n-1} - 2^n & v_1 = -2 \\ w_n = w_{n-1} + 2 & w_1 = 2 \end{cases}$$

On en déduit : $w_n = 2n$.

On a ensuite :

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + 2^{n-1} \\ u_{n-1} &= u_{n-2} + 2^{n-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_2 &= u_1 + 2 \end{aligned}$$

soit, en ajoutant membre à membre ces égalités :

$$u_n = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$$
$$= \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

En reportant, on obtient :

$$v_n = v_{n-1} - 2, \ v_1 = -2$$

c'est-à-dire : $v_n = -2n$

et :

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 2^n - 1 & -2n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

E₉ Soit $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ une suite de nombres réels définis pour $n \geqslant 2$ par

$u_n = u_{n-1} - u_{n-2}$ avec u_0 et u_1 donnés.
Calculer u_n en fonction de n.

On peut écrire :

$$u_n = u_{n-1} - u_{n-2}$$
$$u_{n-1} = u_{n-1}$$

c'est-à-dire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-3} \end{bmatrix}$$
$$= \ldots = A^{n-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$$

ce qui donne (pour k entier) :

$$A^{3k} = (-1)^k I, \quad A^{3k+1} = (-1)^k A,$$
$$A^{3k+2} = (-1)^k A^2$$

soit :

$$\begin{cases} u_{3k} = (-1)^k u_0 \\ u_{3k+1} = (-1)^k u_1 \\ u_{3k+2} = (-1)^k (u_1 - u_0) \end{cases}$$

TESTS

Calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ des matrices suivantes :

T_{19} $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

T_{20} $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

T_{21} $\begin{bmatrix} \cos\theta & -2\sin\theta \\ \dfrac{\sin\theta}{2} & \cos\theta \end{bmatrix}$

T_{22} $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

T_{23} Calculer en fonction de n le terme u_n de la suite $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ définie pour $n \geqslant 2$ par $u_n = -2u_{n-1} - 4u_{n-2}$ avec u_0 et u_1 donnés.

T_{24} Calculer le polynôme de matrice $q(A) = A^3 + A^2 - 2A - 4I$ avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Réponses

T_{19} $2^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

T_{20} $\begin{bmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

T_{21} $\begin{bmatrix} \cos n\theta & -2\sin n\theta \\ \dfrac{\sin n\theta}{2} & \cos n\theta \end{bmatrix}$

T_{22} $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & n & 1 \end{bmatrix}$

T_{23} $\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}$ avec $A^3 = 8I$

$$u_{3k} = 2^{3k} u_0, \; u_{3k+1} = 2^{3k} u_1$$
$$u_{3k+2} = 2^{3k+1} (-u_1 - 2u_0)$$

T_{24} $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

2.3.3. Propriétés du produit

Elles résultent des propriétés des applications linéaires. Nous ne préciserons pas dans chaque énoncé les dimensions des matrices (nous les supposerons telles que toutes les opérations écrites soient possibles) :

a) Associativité : $(AB)C = A(BC)$.

b) Distributivité par rapport à l'addition :

$$A(B + B') = AB + AB'$$
$$(A + A')B = AB + A'B$$

c) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB) \qquad \forall \lambda \in K$

On écrira simplement λAB.

d) Si $A \in \mathbf{M}_{qn}$, on a : $I_q\ A = A$ et $A\ I_n = A$ où I_q, I_n sont les matrices unité d'ordre respectif q et n.

Remarque 1. – Le produit de deux matrices n'est pas commutatif :

- si $A \in \mathbf{M}_{qn}$ et $B \in \mathbf{M}_{np}$, on ne peut définir BA que si $p = q$. On a alors $AB \in \mathbf{M}_{pp}$ et $BA \in \mathbf{M}_{nn}$;
- si $p = q \neq n$, les matrices AB et BA ne sont pas du même ordre et ne sont pas égales ;
- si $p = q = n$ (A et B matrices carrées d'ordre n), on a en général $AB \neq BA$ comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Si $AB = BA$, on dit que **les deux matrices** A et B **commutent.**

Remarque 2. – Le produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune des matrices ne soit nulle. Par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.3.4. Representation matricielle d'une application lineaire

Soit $A \in \mathbf{M}_{np}$. Considérons les deux matrices colonnes :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

L'application linéaire f_A associée à A est définie (§ 2.1.2.) par :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}\ x_1 + \ldots + a_{1p}\ x_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}\ x_1 + \ldots + a_{np}\ x_p \end{cases}$$

Ces formules traduisent simplement l'égalité matricielle $Y = AX$. On a donc l'équivalence :

$$\boxed{\mathrm{y} = f_A(\mathrm{x}) \Leftrightarrow Y = AX}$$

Exercice - Exemple

$\boxed{E_{10}}$ Dans $\mathbf{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé $0xyz$, déterminer la matrice de la transformation produit d'une rotation d'angle α autour de $0z$ par une rotation d'angle β autour de $0x$.

Au point $M(x, y, z)$ correspond dans la rotation autour de Oz le point $M'(x', y', z')$ défini par :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Au point M' correspond dans la rotation autour de $0x$ le point $M''(x'', y'', z'')$ défini par :

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = BA\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

avec :

$$BA = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \cos\beta\ \sin\alpha & \cos\beta\cos\alpha & -\sin\beta \\ \sin\beta\ \sin\alpha & \sin\beta\cos\alpha & \cos\beta \end{bmatrix}$$

TESTS

$\boxed{T_{25}}$ Dans $\mathbf{R}^2$ rapporté à un repère orthonormé, déterminer la matrice de la transformation produit d'une symétrie par rapport à $0x$ par une symétrie par rapport à la droite d'angle polaire $\pi/3$.

$\boxed{T_{26}}$ On considère les relations suivantes :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ y_2 = -2x_1 + x_2 + x_3 \\ y_3 = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = 2y_1 - y_2 - y_3 \\ z_2 = 3y_1 + y_2 - 2y_3 \end{cases}$$

Calculer, à l'aide du produit matriciel, z_1 et z_2 en fonction de x_1, x_2, x_3.

Réponses

T_{25} $$A = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

rotation de $2\pi/3$.

$\boxed{T_{26}}$ $z_1 = x_1 - 4x_2 + 5x_3$
$z_2 = -5x_1 - 3x_2 + 11x_3$

2.4. Transposition

Soit $A \in \mathbf{M}_{np}$. On appelle **matrice transposée** de A et on note ${}^tA$ la matrice $B \in \mathbf{M}_{pn}$ définie par :

$$b_{ij} = a_{ji} \qquad 1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant n$$

${}^tA$ a donc pour lignes les colonnes de A et pour colonnes les lignes de A.

Propriétés de la transposition

a) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$

b) ${}^t({}^tA) = A$

c) ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$

Démontrons *c)*. Soit $A \in \mathbf{M}_{qn}$ et $B \in \mathbf{M}_{np}$, $C = AB$ et $D = {}^t(AB)$.

On a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

$$d_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki}$$

d_{ij} s'obtient en faisant le produit élément par élément de la $j^{\text{ème}}$ ligne de A par la $i^{\text{ème}}$ colonne de B c'est-à-dire le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de ${}^tB$ par la $j^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tA$. On a donc :

$$D = {}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$$

2.5. Anneau $\mathbf{M}_n$ des matrices carrées

2.5.1. Matrices carrées d'ordre n

Les propriétés énoncées § 2.2.1 et 2.3.3. montrent que pour l'addition et le produit des matrices, $\mathbf{M}_n$ est un anneau unitaire (l'élément neutre de la multiplication étant la matrice unité I_n).

Ce n'est pas un anneau commutatif car en général $AB \neq BA$.

Ce n'est pas un anneau d'intégrité car :

$AB = \mathrm{O}$ n'entraîne pas nécessairement $A = \mathrm{O}$ ou $B = \mathrm{O}$.

$AB = AC$ n'entraîne pas nécessairement $B = C$.

2.5.2. Matrices carrées particulieres

Pour une matrice carrée d'ordre n, les éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sont appelés **éléments diagonaux** et la suite $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ est appelée **diagonale principale.**

On appelle **matrice diagonale** une matrice carrée telle que $a_{ij} = 0$ lorsque $i \neq j$.

On appelle **matrice scalaire** une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont égaux. Une telle matrice est donc de la forme λI_n où λ est un scalaire.

On appelle **matrice triangulaire inférieure** (resp. **supérieure**) une matrice carrée dont les éléments situés au-dessus (resp. au-dessous) de la diagonale principale sont nuls c'est-à-dire :

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i < j \quad (\text{resp. } i > j)$$

Pour indiquer que les éléments situés au-dessus (ou au-dessous) de la diagonale principale d'une matrice sont nuls, on utilise le symbole O ce qui conduit aux notations suivantes :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \mathrm{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \mathrm{O} \\ & \mathrm{O} & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

La somme (ou le produit) de deux matrices diagonales est encore une matrice diagonale. On vérifie la même propriété pour les matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures).

On appelle **matrice symétrique** une matrice telle que :

$${}^tA = A \quad \text{ou} \quad a_{ji} = a_{ij} \qquad \forall i, j$$

On appelle **matrice antisymétrique** une matrice telle que :

$${}^tA = -A \quad \text{ou} \quad a_{ji} = -a_{ij} \qquad \forall i, j$$

(ce qui entraîne en particulier la nullité des éléments diagonaux).

TESTS

$\boxed{T_{27}}$ Calculer la puissance $k^{\text{ème}}$ de la matrice diagonale :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathrm{O} \\ & \lambda_2 & \\ \mathrm{O} & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

T₂₈ Vérifier que le produit de 2 matrices triangulaires inférieures d'ordre n est une matrice triangulaire inférieure d'ordre n.

Réponses

T₂₇

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & O \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

T₂₈ Posons $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}], C = AB = [c_{ij}]$

Si $i < j$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik}\, b_{kj} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = 0$$

car $b_{kj} = 0$ si $k \leqslant i < j$ et $a_{ik} = 0$ si $k > i$.

2.5.3. FORMULE DU BINOME

Si A et B sont deux matrices de $\mathbf{M}_n$ qui commutent $(AB = BA)$, on a pour tout entier $k > 0$:

$$(A+B)^k = A^k + C_k^1 A^{k-1} B + \ldots + C_k^j A^{k-j} B^j + \ldots + B^k$$

ou, avec la convention : $A^0 = B^0 = I_n$

$$\boxed{(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j A^{k-j} B^j}$$

La formule est vraie pour $k = 1$; supposons-la exacte pour l'exposant $k-1$. On a alors :

$$(A+B)^k = (A+B)(A+B)^{k-1}$$

$$= (A+B) \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j A^{k-1-j} B^j$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j A^{k-j} B^j + \sum_{j=0}^{k-1} C_{k-1}^j A^{k-(j+1)} B^{j+1}$$

$$= C_{k-1}^0 A^k + \sum_{m=1}^{k-1} (C_{k-1}^m + C_{k-1}^{m-1}) A^{k-m} B^m + C_{k-1}^{k-1} B^k$$

$$= A^k + \sum_{m=1}^{k-1} C_k^m A^{k-m} B^m + B^k$$

$$= \sum_{j=0}^{k} C_k^j A^{k-j} B^j$$

ce qui démontre le résultat.

Exercice - Exemple

E₁₁ Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculer les puissances successives de $B = A - I$. En déduire A^n.

On a successivement :

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^4 = O$$

Pour $n \geqslant 4$:

$$A^n = (I+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k I^{n-k} B^k$$

$$= I + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + C_n^3 B^3$$

$$= I + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} B^3$$

Cette formule est encore valable pour $n = 1, 2, 3$ et on obtient :

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & n & 1 & 0 \\ \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6} & \dfrac{n(n+1)}{2} & n & 1 \end{bmatrix}$$

TESTS

Calculer par la formule du binôme la puissance $n^{\text{ème}}$ des matrices suivantes :

T₂₉ $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

T₃₀ $I + \mu \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

T₃₁ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

T₃₂ $\begin{bmatrix} a & 0 & b^2 \\ 0 & a+bc & 0 \\ c^2 & 0 & a \end{bmatrix}$ avec $bc \neq 0$

Réponses

T29 $\left(\lambda I + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\,\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

T30 $\begin{bmatrix} 1 & n\mu+n(n-1)\mu^2 & 2\,n\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & n\mu & 1 \end{bmatrix}$

T31 $A = 2I + B$ avec $B^2 = I$

$$A^n = (2^n + C_n^2\, 2^{n-2} + \ldots)\, I$$
$$+ (C_n^1\, 2^{n-1} + C_n^3\, 2^{n-3} + \ldots)\, B$$
$$A^n = \frac{1}{2}(3^n + 1^n)\, I + \frac{1}{2}(3^n - 1^n)\, B$$
$$A^n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{bmatrix}$$

T32 $A = aI + B$ avec $B^2 = b^2 c^2\, I$

$$A^n = \frac{(a+bc)^n + (a-bc)^n}{2}\, I$$
$$+ \frac{(a+bc)^n - (a-bc)^n}{2bc}\, B$$

2.5.4. Matrices carrées régulieres

Soit A une matrice carrée d'ordre n. E étant un espace vectoriel de dimension n, on associe à A un endomorphisme f_A de E. On dit que A est une **matrice régulière** ou **inversible** si f_A est bijectif.

Pour que $A \in M_n$ soit inversible, il faut et il suffit qu'il existe $B \in M_n$ telle que $AB = BA = I_n$.

En effet, f_A est bijectif si et seulement s'il existe un endomorphisme g de E vérifiant :

$$g \circ f_A = f_A \circ g = i$$

(i application identique).

B matrice de g est appelée **matrice inverse** de A et notée A^{-1}.

Propriétés. – *a)* Si A est inversible, A^{-1} est unique (car g est unique).

b) On démontre que $A \in M_n$ est inversible si et seulement s'il existe $B \in M_n$ vérifiant $AB = I_n$ **ou** $BA = I_n$. On a alors : $A^{-1} = B$.

c) Si A est inversible, ${}^tA$ et A^{-1} le sont aussi et on a :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}),\ (A^{-1})^{-1} = A$$

En effet : ${}^t(A^{-1})\,{}^tA = {}^t(AA^{-1}) = {}^tI = I$

d) **A est inversible si et seulement si les vecteurs colonnes (resp. lignes) sont linéairement indépendants.**

En effet (§ 1.6.), f_A est inversible si et seulement si rang$(f_A) = n$, soit rang$(A) = n$, ce qui équivaut à l'indépendance linéaire des vecteurs colonnes de A. Pour les vecteurs lignes, on applique la propriété à ${}^tA$.

e) Si A et B sont inversibles, AB l'est aussi et :

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}\, A^{-1}}$$

car : $B^{-1}\, A^{-1}\, AB = B^{-1}\,(A^{-1}\, A)\, B = B^{-1}\, I\, B$
$= B^{-1}\, B = I$

Remarque. – En supposant A inversible, la relation matricielle $Y = AX$ (§ 2.3.4.) donne en multipliant à gauche par A^{-1} :

$$A^{-1}\, Y = A^{-1}\, AX = X$$

On a donc : $Y = AX \Leftrightarrow X = A^{-1}\, Y$
ou :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

La détermination de A^{-1} revient donc à exprimer $x_1, \ldots, x_n$ en fonction de $y_1, \ldots, y_n$. Ce qui permet de calculer A^{-1} dans certains cas simples : on vérifie ainsi que l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure).

Exercices - Exemples

E12. Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Calculer A^2 et en déduire A^{-1}.

On a :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 12 & 4 & -4 \\ 6 & 10 & 6 \\ -2 & 2 & 14 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 6 & 2 & 6 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

On a donc : $A^2 = 2A + 8I$

ou : $A^2 - 2A = (A - 2I)\, A = 8I$

$$\frac{1}{8}(A - 2I)\, A = I$$

D'après cette relation :

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(A - 2I) = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

E₁₃ Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$.

La relation $Y = AX$ s'écrit :

$$\begin{cases} y_1 = a\,x_1 + b\,x_2 \\ y_2 = c\,x_1 + d\,x_2 \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{d\,y_1 - b\,y_2}{ad - bc} \\[2ex] x_2 = \dfrac{-c\,y_1 + a\,y_2}{ad - bc} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

E₁₄ Calculer l'inverse de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La relation $Y = AX$ donne :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = -x_1 + 2x_2 \\ y_3 = 3x_1 + 2x_3 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\[1ex] x_2 = \dfrac{1}{2}y_1 + \dfrac{1}{2}y_2 \\[2ex] x_3 = -\dfrac{3}{2}y_1 + \dfrac{1}{2}y_3 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

TESTS

T₃₃ On donne :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Calculer A^2 et en déduire A^{-1}.

T₃₄ Calculer l'inverse de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

T₃₅ Soit k un entier ($k \geqslant 2$) et A une matrice de $\mathbf{M}_n$ telle que $A^k = 0$. Vérifier que : $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$.

Réponses

T₃₃ $A^2 = 4A - 3I$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}(A-4I) = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

T₃₄

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

T₃₅ $(I-A)(I+A+\ldots+A^{k-1}) = I - A^k = I$

2.6. Changements de base

E et F étant deux espaces vectoriels rapportés aux bases $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p)$ et $(\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$, on considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

A désignant la matrice de f par rapport aux deux bases $(\mathbf{e}_i)$ et $(\mathbf{f}_i)$, on cherche la matrice A' de f par rapport à deux autres bases $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_p)$ et $(\mathbf{f}'_1, \ldots, \mathbf{f}'_n)$.

2.6.1. Matrice de passage

Les vecteurs de la nouvelle base s'écrivent :

$$\mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij}\,\mathbf{e}_i \qquad j = 1, \ldots, p$$

On appelle **matrice de passage de la base $(\mathbf{e}_i)$ à la base $(\mathbf{e}'_i)$** la matrice :

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pp} \end{bmatrix}$$

La matrice de passage a pour vecteurs colonnes les vecteurs de la nouvelle base (exprimés à l'aide de leurs composantes dans l'ancienne base).

Notons que la matrice de passage est inversible car ses vecteurs colonnes sont linéairement indépendants (§ 2.5.4.).

2.6.2. EFFET D'UN CHANGEMENT DE BASE SUR LES COMPOSANTES D'UN VECTEUR

Soit **V** un vecteur de E qui s'écrit dans les 2 bases :

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{p} x_i\,\mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = \sum_{j=1}^{p} x'_j\,\mathbf{e}'_j$$

On a alors :

$$\mathbf{V} = \sum_{j=1}^{p} x'_j \left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij}\,\mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij}\,x'_j\right) \mathbf{e}_i$$

ce qui donne :

$$x_i = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij}\,x'_j \qquad i = 1,\dots, p$$

ou sous forme matricielle :

$$\boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_p \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad X = PX'}$$

La matrice colonne des anciennes composantes est le produit de la matrice de passage par la matrice colonne des nouvelles composantes.

Remarque. – **La matrice de passage de la base $(\mathbf{e}'_i)$ à la base $(\mathbf{e}_i)$ est l'inverse de la matrice de passage de la base $(\mathbf{e}_i)$ à la base $(\mathbf{e}'_i)$.**

En effet, la matrice P étant inversible, on obtient en multipliant la relation $X = PX'$ à gauche par P^{-1} : $X' = P^{-1} X$.

Exercice - Exemple

$\boxed{\mathbf{E}_{15}}$ Dans $\mathbf{R}^2$, rapporté à la base canonique, on considère le vecteur $\mathbf{V} = (-3, 2)$. Quelles sont les composantes du vecteur **V** par rapport à la base $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ avec $\mathbf{e}'_1 = (2, 1)$, $\mathbf{e}'_2 = (3, 2)$.

La matrice de passage est :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

son inverse : $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Les composantes de **V** *vérifient :*

$$X' = P^{-1} X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 7 \end{bmatrix}$$

V *a donc comme composantes dans la nouvelle base : $(-12, 7)$.*

TESTS

$\boxed{\mathbf{T}_{36}}$ Dans $\mathbf{R}^2$, rapporté à la base canonique, on considère le vecteur $\mathbf{V} = (2, 5)$. Quelles sont les composantes de **V** par rapport à la base $\mathbf{e}'_1 = (3, 5)$, $\mathbf{e}'_2 = (1, 2)$.

$\boxed{\mathbf{T}_{37}}$ Dans $\mathbf{R}^3$ rapporté à la base canonique, on considère le vecteur $\mathbf{V} = (4, -3, 2)$. Quelles sont les composantes de **V** par rapport à la base $\mathbf{e}'_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}'_2 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{e}'_3 = (1, 1, 1)$.

$\boxed{\mathbf{T}_{38}}$ Dans P_n, on considère les deux bases $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ et $(R_0, R_1, \dots, R_n)$ avec $Q_i : x \to x^i$, $R_k : x \to x^k\,(1+x)^{n-k}$.

1) Quelle est la matrice P de passage de la base (Q_i) à la base (R_i) ?

2) Déterminer la matrice P^{-1} (utiliser $(1+x) - x = 1$).

Réponses

$\mathbf{T}_{36}$ $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

$\mathbf{V} = (-1, 5)$

$\mathbf{T}_{37}$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathbf{V} = (7, -5, 2)$

$\mathbf{T}_{38}$ 1)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & O \\ C_n^1 & 1 & & \\ C_n^2 & C_{n-1}^1 & 1 \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ C_n^n & C_{n-1}^{n-1} & \dots\dots & 1 \end{bmatrix}$$

2) P^{-1} est la matrice de passage de la base (R_i) à la base (Q_i) :

$$x^k = x^k \left[(1+x) - x\right]^{n-k}$$

$$Q_k = R_k - C_{n-k}^1\,R_{k+1} + \dots + (-1)^{n-k}\,C_{n-k}^{n-k}\,R_n$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & O \\ -C_n^1 & 1 & & \\ C_n^2 & -C_{n-1}^1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ (-1)^n C_n^n & (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1} & \dots\dots & 1 \end{bmatrix}$$

2.6.3. Effet d'un changement de bases sur la matrice d'une application linéaire

Soit P la matrice de passage de la base $(\mathbf{e}_i)$ à la base $(\mathbf{e}'_i)$ et Q la matrice de passage de la base $(\mathbf{f}_i)$ à la base $(\mathbf{f}'_i)$.

Pour $\mathbf{x} \in E$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} x_i \ \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{p} x'_i \ \mathbf{e}'_i$$

et pour $\mathbf{y} \in F$:

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \ \mathbf{f}_i = \sum_{i=1}^{n} y'_i \ \mathbf{f}'_i$$

Soit A la matrice de f par rapport aux bases $(\mathbf{e}_i)$ et $(\mathbf{f}_i)$ et A' la matrice par rapport aux nouvelles bases $(\mathbf{e}'_i)$ et $(\mathbf{f}'_i)$.

$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ s'écrit donc sous forme matricielle :

$Y = A\,X$ dans les anciennes bases
$Y' = A'X'$ dans les nouvelles bases

avec : $X = P\,X'$ et $Y = Q\,Y'$

soit en reportant :

$$Q\,Y' = A\,P\,X'$$
$$Y' = Q^{-1}\,A\,P\,X'$$

On a donc :

$$\boxed{A' = Q^{-1}\,A\,P}$$

ou : $\quad Y = A\,X \Leftrightarrow Y' = (Q^{-1}\,A\,P)\,X'$

On dit alors que les **matrices** A et A' sont **équivalentes.**

2.6.4. Cas particulier des matrices carrées

Si A est une matrice carrée, on peut prendre E et F confondus, les bases $(\mathbf{e}_i)$ et $(\mathbf{f}_i)$ confondues ainsi que les bases $(\mathbf{e}'_i)$ et $(\mathbf{f}'_i)$.

On a alors : $Q = P$ et :

$$\boxed{A' = P^{-1}\,A\,P}$$

On dit alors que les **matrices** A et A' sont **semblables.**

Exercice - Exemple

$\boxed{E_{16}}$ Dans $\mathbf{R}^2$ rapporté à la base canonique, on considère la transformation f de matrice :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Déterminer la matrice de f dans la base déduite de la base canonique par rotation de $\pi/6$ autour de l'origine.

On a : $\quad \mathbf{e}'_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \frac{1}{2}\right)$

$\mathbf{e}'_2 = \left(-\frac{1}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

D'où la matrice de passage et son inverse .

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Dans la nouvelle base, f est représentée par la matrice :

$$A' = P^{-1}\,A\,P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

f est donc une symétrie par rapport au support du vecteur $\mathbf{e}'_2$.

TESTS

$\boxed{T_{39}}$ Dans $\mathbf{R}^2$ rapporté à la base canonique, soit f l'application de matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Quelle est la matrice de f par rapport à la base $\mathbf{e}'_1 = (4, 3)$, $\mathbf{e}'_2 = (1, 1)$?

$\boxed{T_{40}}$ Dans $\mathbf{P}_2$ rapporté à la base $(1,\ 1+x,\ 1+x+x^2)$, on considère l'application linéaire f de matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Quelle est la matrice de f par rapport à la base $(1, x, x^2)$?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Décomposons A en 4 blocs à 2 lignes et 2 colonnes et cherchons A^{-1} sous la même forme :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O & A_4 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right]$$

La relation $AA^{-1} = I$ donne :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_1 B_1 + A_2 B_3 & A_1 B_2 + A_2 B_4 \\ \hline A_4 B_3 & A_4 B_4 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & O \\ \hline O & I_2 \end{array}\right]$$

On a d'abord :

$$A_1 B_1 + A_2 B_3 = I_2$$
$$A_4 B_3 = O$$

A_4 étant inversible, on obtient (en multipliant à gauche par A_4^{-1}) $B_3 = O$ et en reportant $A_1 B_1 = I_2$.

D'où : $\quad B_1 = A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

On a ensuite :

$$A_1 B_2 + A_2 B_4 = O$$
$$A_4 B_4 = I_2$$

D'où : $\quad B_4 = A_4^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

$$B_2 = -A_1^{-1} A_2 A_4^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalement :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -12 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

TESTS

$\boxed{T_{43}}$ A et B étant deux matrices de $\mathbf{M}_n(K)$, déterminer en utilisant les opérations par blocs la matrice CD-DC avec :

$$C = \left[\begin{array}{c|c} I_n & A \\ \hline A & I_n \end{array}\right] \qquad D = \left[\begin{array}{c|c} B & I_n \\ \hline I_n & B \end{array}\right]$$

$\boxed{T_{44}}$ Pour $A \in \mathbf{M}_n$, on considère la matrice :

$$B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda I_n & A \\ \hline O & \lambda I_n \end{array}\right]$$

Calculer, en utilisant la formule du binôme, B^k.

$\boxed{T_{45}}$ Inverser en utilisant les opérations par blocs la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Réponses

T_{43} $\quad \left[\begin{array}{c|c} O & AB - BA \\ \hline AB - BA & O \end{array}\right]$

T_{44} $\quad B^k = \left[\begin{array}{c|c} \lambda^k I_n & k\lambda^{k-1} A \\ \hline O & \lambda^k I_n \end{array}\right]$

T_{45} On décompose A en 4 blocs à 2 lignes et 2 colonnes :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ -15 & -10 & -1 & 13 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$