3. Intégration par parties

3.1. Méthode de calcul pour la recherche des primitives

3.1.1. Cas général

Si u et v sont deux fonctions dérivables, le produit uv est dérivable et sa dérivée vérifie :

$$(uv)' = u'\,v + uv'\,.$$

On en déduit pour les primitives :

$$\int (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x + \int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$$

soit

$$\int u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

C'est la formule dite d'intégration par parties que l'on écrit en utilisant la notation différentielle :

$$\boxed{\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u}\,. \qquad (1)$$

Cette formule s'applique lorsqu'on cherche les primitives d'un produit de deux fonctions si les primitives de l'une des fonctions sont facilement calculables et si $\int v\,\mathrm{d}u$ est plus simple à calculer que $\int u\,\mathrm{d}v$.

C'est le cas en particulier pour le produit :

— d'une fonction polynôme et d'une fonction sinus ou cosinus,

— d'une fonction polynôme et d'une fonction logarithme, trigonométrique inverse ou hyperbolique inverse,

— d'une fonction exponentielle et d'une fonction sinus ou cosinus.

Il faut prendre comme fonction u la fonction polynôme dans le premier cas, la fonction logarithme, trigonométrique inverse ou hyperbolique inverse dans le second.

Dans le dernier cas on peut prendre pour u indifféremment la fonction exponentielle et la fonction sinus ou cosinus.

Remarques. — 1) Pour trouver les primitives, il faut parfois répéter plusieurs fois la méthode.

2) La constante d'intégration n'intervient qu'à la fin du calcul.

Exercices-Exemples

E₁ Calculer

$$I_1 = \int x \cos x\,\mathrm{d}x\,.$$

On pose

$$u = x \qquad \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$$

d'où

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}x \qquad v = \sin x$$

et en appliquant la formule d'intégration par parties :

$$I_1 = x \sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

Les primitives de $\sin x$ *étant connues, on obtient :*

$$\int x \cos x\,\mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + C\,.$$

E₂ Calculer

$$I_2 = \int x\,\mathrm{Log}\,x\,\mathrm{d}x\,.$$

En posant

$$u = \mathrm{Log}\,x \qquad \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x\,,$$

on trouve

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

et

$$I_2 = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{Log}\,x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$$

soit

$$x\,\mathrm{Log}\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{Log}\,x - \frac{1}{4}x^2 + C\,.$$

$\boxed{E_3}$ Calculer

$$I_3 = \int e^{-2x} \cos x \, dx .$$

Posons

$$u = e^{-2x} \qquad dv = \cos x \, dx .$$

On a alors :

$$du = -2 e^{-2x} dx \qquad v = \sin x$$

et

$$I_3 = e^{-2x} \sin x + 2 \int e^{-2x} \sin x \, dx .$$

On applique la méthode une deuxième fois avec :

$$u = e^{-2x} \quad \textit{et} \quad dv = \sin x \, dx .$$

On obtient ainsi :

$$du = -2 e^{-2x} dx \qquad v = -\cos x$$

et

$$I_3 = e^{-2x} \sin x + \\ +2 \left[-e^{-2x} \cos x - 2 \int e^{-2x} \cos x \, dx \right]$$

ou encore :

$$\int e^{-2x} \cos x \, dx = e^{-2x} \sin x \\ -2 e^{-2x} \cos x - 4 \int e^{-2x} \cos x \, dx .$$

Les primitives apparaissant dans le second membre étant les primitives cherchées, on en déduit :

$$5 \int e^{-2x} \cos x \, dx \\ = e^{-2x} [\sin x - 2 \cos x] + C$$

soit

$$\int e^{-2x} \cos x \, dx \\ = \frac{1}{5} e^{-2x} [\sin x - 2 \cos x] + C .$$

TESTS

Calculer les primitives suivantes :

$\boxed{T_1}$ $\int x \sin x \, dx .$

$\boxed{T_2}$ $\int x \operatorname{ch} x \, dx .$

$\boxed{T_3}$ $\int \operatorname{Arc\,tg} x \, dx .$

$\boxed{T_4}$ $\int x^n \operatorname{Log} x \, dx , \qquad n \in \mathbb{N} .$

$\boxed{T_5}$ $\int x e^{-2x} \, dx .$

$\boxed{T_6}$ $\int \frac{x \operatorname{Arc\,sin} x}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx .$

Réponses

T_1 $- x \cos x + \sin x + C .$

T_2 $x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x + C .$

T_3 $x \operatorname{Arc\,tg} x - \frac{1}{2} \operatorname{Log} (1 + x^2) + C .$

T_4 $\frac{x^{n+1}}{n+1} \left[\operatorname{Log} x - \frac{1}{n+1} \right] + C .$

T_5 $- \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) e^{-2x} + C .$

T_6 $- \sqrt{1 - x^2} \operatorname{Arc\,sin} x + x + C .$

3.1.2. Primitives de la forme $\int P_n(x) \, e^{kx} \, dx$

P_n est un polynôme de degré n et k un nombre réel. On peut calculer ces primitives en appliquant plusieurs fois la méthode d'intégration par parties, la fonction polynôme étant toujours prise comme fonction u.

Le calcul montre que les primitives sont de la forme $F : x \mapsto Q_n(x) \, e^{kx} + C$ où Q_n est un polynôme de degré n et il est plus rapide de déterminer $Q_n(x)$ en identifiant $F'(x)$ avec $P_n(x) \, e^{kx}$.

Exercice-Exemple

$\boxed{E_4}$ Calculer

$$I_4 = \int (x^2 - 5x + 7) \, e^{-x} \, dx .$$

Les primitives sont de la forme

$$F : x \mapsto (a_0 x^2 + a_1 x + a_2) \, e^{-x} + C ,$$

a_0, a_1 et a_2 étant des coefficients réels à déterminer. On en déduit :

$$F'(x) = (2 a_0 x + a_1 - a_0 x^2 - a_1 x - a_2) \, e^{-x} \\ = [-a_0 x^2 + (2 a_0 - a_1) x + (a_1 - a_2)] \, e^{-x}$$

soit en identifiant $F'(x)$ avec (x^2-5x+7) :

$$-a_0=1 \qquad \text{donc} \qquad a_0=-1$$
$$2a_0-a_1=-5 \qquad \text{donc} \qquad a_1=3$$

et

$$a_1-a_2=7 \qquad \text{donc} \qquad a_2=-4\,.$$

On obtient ainsi :

$$\int (x^2-5x+7)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = (-x^2+3x-4)\,\mathrm{e}^{-x}+C\,.$$

TESTS

Calculer les primitives suivantes :

T$_7$ $\int x^2\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x\,.$

T$_8$ $\int (x^2+3x+2)\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x\,.$

Réponses

T$_7$ $\frac{1}{3}(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{2}{9})\,\mathrm{e}^{3x}+C\,.$

T$_8$ $(x^2+x+1)\,\mathrm{e}^{x}+C\,.$

3.1.3. Primitives de la forme $\int \mathrm{e}^{kx}\cos px\,\mathrm{d}x$ et $\int \mathrm{e}^{kx}\sin px\,\mathrm{d}x$

k et p sont deux nombres réels.

Deux intégrations par parties successives permettent d'obtenir ces primitives mais le calcul montre qu'elles sont de la forme

$$G : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}(\lambda\cos px+\mu\sin px)+C$$

où λ et μ sont deux nombres réels. On peut donc aussi chercher les coefficients λ et μ en identifiant $G'(x)$ avec $\mathrm{e}^{kx}\cos px$ ou $\mathrm{e}^{kx}\sin px$.

Exercice-Exemple

E$_5$ Calculer à nouveau

$$I_5=\int \mathrm{e}^{-2x}\cos x\,\mathrm{d}x$$

en procédant par identification.

Les primitives sont de la forme

$$G : x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}(\lambda\cos x+\mu\sin x)+C\,.$$

On a donc :

$$G'(x)=\mathrm{e}^{-2x}\times(-\lambda\sin x+\mu\cos x - 2\lambda\cos x-2\mu\sin x)$$

ou encore

$$G'(x) = \mathrm{e}^{-2x}[(\mu-2\lambda)\cos x-(\lambda+2\mu)\sin x]\,.$$

En identifiant $G'(x)$ avec $\mathrm{e}^{-2x}\cos x$, on obtient les équations :

et $\quad \mu-2\lambda=1$
$\quad\lambda+2\mu=0$

d'où l'on déduit :

et $\quad 5\mu=1$ c'est-à-dire $\mu=\frac{1}{5}$
$\quad\lambda=-2\mu=-\frac{2}{5}\,.$

Les primitives cherchées sont donc :

$$\int \mathrm{e}^{-2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{5}(-2\cos x+\sin x)+C\,.$$

TESTS

Calculer les primitives suivantes :

T$_9$ $\int \mathrm{e}^{-3x}\sin 2x\,\mathrm{d}x\,.$

T$_{10}$ $\int \mathrm{e}^{4x}\cos 3x\,\mathrm{d}x\,.$

Réponses

T$_9$ $-\frac{\mathrm{e}^{-3x}}{13}(2\cos 2x+3\sin 2x)+C\,.$

T$_{10}$ $\frac{\mathrm{e}^{4x}}{25}(4\cos 3x+3\sin 3x)+C\,.$

3.2. Cas d'une intégrale

Soient u et v deux fonctions possédant des dérivées continues sur l'intervalle $[a, b]$, on a comme au paragraphe 3.1.1 :

$$(uv)'=u'v+uv'\,.$$

En intégrant les deux membres de cette égalité sur l'intervalle $[a, b]$ on obtient :

$$\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)\, u'(x)\, \mathrm{d}x$$

qui s'écrit en utilisant la notation différentielle :

$$\boxed{\int_a^b u\, \mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\, \mathrm{d}u} \,. \qquad (2)$$

Les cas d'application de cette formule sont les mêmes que pour la recherche des primitives.

Exercice-Exemple

E_6 Calculer

$$I_6 = \int_1^e \operatorname{Log} x\, \mathrm{d}x\,.$$

On pose

d'où $u = \operatorname{Log} x \qquad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x$

$\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \qquad v = x$

et

$$I_6 = [x \operatorname{Log} x]_1^e - \int_1^e x \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$= [x \operatorname{Log} x]_1^e - \int_1^e \mathrm{d}x\,.$$

On obtient ainsi :

$$I_6 = e - [x]_1^e = e - (e - 1) = 1$$

c'est-à-dire :

$$\int_1^e \operatorname{Log} x\, \mathrm{d}x = 1\,.$$

TESTS

Calculer les intégrales suivantes :

T_{11} $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (x + 1) \cos x\, \mathrm{d}x\,.$

T_{12} $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, \mathrm{d}x\,.$

T_{13} $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x^2 \cos x\, \mathrm{d}x\,.$

T_{14} $\displaystyle\int_0^{1/2} \operatorname{Arc\,sin} x\, \mathrm{d}x\,.$

T_{15} $\displaystyle\int_1^e (\operatorname{Log} x)^2\, \mathrm{d}x\,.$

T_{16} $\displaystyle\int_0^1 x\, e^{-2x}\, \mathrm{d}x\,.$

T_{17} $\displaystyle\int_0^1 x^2\, e^{-3x}\, \mathrm{d}x\,.$

T_{18} $\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{-x} \sin 2\, x\, \mathrm{d}x\,.$

T_{19} $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Log}(1 + x)\, \mathrm{d}x\,.$

T_{20} $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Log}(1 + x^2)\, \mathrm{d}x\,.$

T_{21} $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{Arc\,tg} x\, \mathrm{d}x\,.$

T_{22} $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x\,.$

T_{23} $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{16\, x^2 + 9}\, \mathrm{d}x\,.$

T_{24} $\displaystyle\int_{1/2}^{5/4} \sqrt{2 + x - x^2}\, \mathrm{d}x\,.$

T_{25} $\displaystyle\int_{2/3}^1 \sqrt{9\, x^2 - 12\, x + 5}\, \mathrm{d}x\,.$

T_{26} $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{x^2 - x + 1}\, \mathrm{d}x\,.$

T_{27} On pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, \mathrm{d}x\,,$$

n étant un élément de $\mathbb{N}$.

a) Calculer I_0 et I_1.
b) On suppose n supérieur ou égal à 2, calculer I_n en fonction de I_{n-2}.
c) Pour tout entier p supérieur ou égal à 1, calculer I_{2p} et I_{2p+1}.

Réponses

T_{11} $\dfrac{\pi}{2}$.

T_{12} $\pi - 2$.

T13 $\sqrt{2}\left(\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} - 1\right)$.

T14 $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$.

T15 $e - 2$.

T16 $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{e^2}\right)$.

T17 $\frac{1}{27}\left(2 - \frac{17}{e^3}\right)$.

T18 $\frac{2 - e^{-\pi/4}}{5}$.

T19 $2 \operatorname{Log} 2 - 1$.

T20 $\operatorname{Log} 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

T21 $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

T22 $\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12}$.

T23 $\frac{5}{4} + \frac{9}{8} \operatorname{Log} 3$.

T24 $\frac{9\sqrt{3}}{32} + \frac{9\pi}{48}$.

T25 $\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{6} \operatorname{Log}(1 + \sqrt{2})$.

T26 $\frac{1}{4} + \frac{3}{16} \operatorname{Log} 3$.

T27 *a*) $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $\quad I_1 = 1$.

b) En écrivant I_n sous la forme

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x \, dx$$

et en intégrant par parties, on obtient :

$$I_n = [-\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$$

d'où

$$I_n = (n-1) \times \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = (n-1)[I_{n-2} - I_n]$$

et

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

c) En remplaçant n par $2p$ dans la relation de récurrence, on obtient :

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 3.1}{2p(2p-2)\dots 2} I_0 = \frac{2p(2p-1)(2p-2)\dots 3.2.1}{[2p(2p-2)\dots 2]^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

ou encore en écrivant

$$2p(2p-2)\dots 2 = 2^p p\,! :$$

$$I_{2p} = \frac{(2p)\,!}{2^{2p}(p\,!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

On a de même :

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p\,!)^2}{(2p+1)\,!}.$$