4. Intégration des fractions rationnelles

Pour trouver les primitives d'une fraction rationnelle à coefficients réels f il faut la décomposer en somme d'un polynôme et de fractions rationnelles simples dont on sait calculer les primitives.

4.1. Décomposition en éléments simples

4.1.1. Définitions

1) Une fraction rationnelle P/Q est dite irréductible si les polynômes P et Q n'ont pas de zéro commun.

2) On appelle pôles d'une fraction rationnelle irréductible P/Q les zéros du polynôme Q.

4.1.2. Théorème fondamental

Soient P/Q une fraction rationnelle à coefficients réels irréductible et

$$Q(x) = (x - a_1)^{n_1} \dots (x - a_k)^{n_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \dots \dots (x^2 + p_r x + q_r)^{m_r}$$

la décomposition de $Q(x)$ en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$, $a_1, \dots, a_k$ étant les racines réelles distinctes du polynôme Q, $n_1, \dots, n_k$ leurs ordres respectifs et $(x^2+p_1 x+q_1), \dots, (x^2+p_r x+q_r)$ étant des polynômes distincts de discriminants négatifs.

On peut écrire de manière unique :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{i=1}^{k} S_i(x) + \sum_{j=1}^{r} T_j(x),$$

où E est un polynôme, $S_i(x)$ et $T_j(x)$ sont les sommes d'éléments simples associées respectivement au pôle a_i d'ordre n_i et au facteur $(x^2 + p_j x + q_j)^{m_j}$, la somme $S(x)$ associée à un pôle a d'ordre n étant de la forme :

$$S(x) = \frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a)^n}$$

et celle associée au facteur $(x^2 + px + q)^m$ étant de la forme :

$$T(x) = \frac{C_1 x + D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{C_m x + D_m}{(x^2+px+q)^m}$$

où $A_1, A_2, \dots, A_n, C_1, C_2, \dots, C_m, D_1, D_2, \dots, D_m$ sont des nombres réels.

4.1.3. Etapes de la décomposition

Les étapes de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à coefficients réels f sont les suivantes :

1) Mettre f sous la forme irréductible P/Q, le coefficient du terme de plus haut degré de Q étant égal à 1.

Exemple : Soit

$$f_1(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^2 + x - 1}.$$

La fraction rationnelle f_1 est irréductible car les zéros du dénominateur (-1 et $\frac{1}{2}$) ne sont pas des zéros du numérateur. On écrit $f_1(x)$ sous la forme :

$$f_1(x) = \frac{\frac{1}{2}(x^3 - x^2 + 1)}{x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}.$$

2) Déterminer le polynôme E.

Si on a degré $P <$ degré Q, E est identiquement nul.

Si le degré de P n'est pas strictement plus petit que celui de Q, E est le quotient de P par Q dans la division euclidienne. On a donc :

$$f(x) = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

avec degré $R <$ degré Q.

Le polynôme E est appelé partie entière de la fraction rationnelle f.

Exemple : La division euclidienne de $\frac{1}{2}(x^3 - x^2 + 1)$ par $\left(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)$ nous donne :

$$\begin{array}{l|l} \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} & x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{3}{4}x^2 + \cdots & \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \end{array}$$

On a donc :

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{R_1(x)}{x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}$$

avec degré $R_1 < 2$. Il n'est pas nécessaire d'expliciter R_1.

3) Décomposer le polynôme Q en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$. On a alors :

$$Q(x) = (x - a_1)^{n_1} \dots (x - a_k)^{n_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \dots$$
$$\dots (x^2 + p_r x + q_r)^{m_r}$$

avec les mêmes notations qu'au paragraphe 4.1.2.

Exemple :

$$x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = (x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

4) Poser à priori la forme de la décomposition de $f = P/Q$ ou de R/Q :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{i=1}^{k} S_i(x) + \sum_{j=1}^{r} T_j(x) \quad (1)$$

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k} S_i(x) + \sum_{j=1}^{r} T_j(x). \quad (2)$$

$S_i(x)$ et $T_j(x)$ ayant été définis au paragraphe 4.1.2 et étant respectivement de la forme :

$$S(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

$$T(x) = \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + px + q} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{C_m x + D_m}{(x^2 + px + q)^m}$$

où $A_1, A_2, \dots, A_n, C_1, C_2, \dots, C_m, D_1, D_2, \dots, D_m$ sont des nombres réels.

Exemple :

$$f_1(x) = \frac{\frac{1}{2}(x^3 - x^2 + 1)}{(x+1)(x - \frac{1}{2})} = \frac{1}{2}(x - \tfrac{3}{2}) + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x - \frac{1}{2}}.$$

5) Déterminer les éléments simples, c'est-à-dire calculer les coefficients A_i, C_i, D_i. Les méthodes diffèrent suivant les types d'éléments simples considérés, elles sont exposées aux paragraphes 4.2 et 4.3. Pour simplifier les calculs on peut utiliser les remarques suivantes :

a) Si f est une fonction paire (i.e. $f(-x) = f(x)$) ou impaire (i.e. $f(-x) = -f(x)$), l'unicité de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples permet d'obtenir des relations entre certains coefficients ou leur nullité.

b) Lorsqu'il reste peu de coefficients à déterminer on peut donner à x des valeurs simples. En particulier on peut prendre $x = 0$ ou multiplier les deux membres de la relation (2) par x ou x^2 suivant les cas et faire tendre x vers l'infini.

TESTS

Déterminer la partie entière des fractions rationnelles suivantes :

T1 $\dfrac{x^4 + 1}{(x - 1)^2 (x + 2)}$.

T2 $\dfrac{2x^3 + x^2 - 5x + 1}{x^2 + x + 1}$.

Réponses

T1 x.

T2 $2x - 1$.

4.2. Eléments simples associés à un pôle réel

4.2.1. Pôle simple

Si a est un pôle réel simple de f, il lui correspond dans la décomposition en éléments simples de f l'unique terme $A/(x - a)$ (n est égal à 1). On obtient A en multipliant les deux membres de la relation (1) ou de la relation (2) par $(x - a)$ et en donnant à x la valeur a.

Exemple : Si l'on considère à nouveau la fraction rationnelle f_1, on a :

$$\frac{\frac{1}{2}(x^3 - x^2 + 1)}{(x + 1)(x - \frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - \frac{1}{2}}.$$

En multipliant les deux membres de cette relation par $(x + 1)$ il vient :

$$\frac{\frac{1}{2}(x^3 - x^2 + 1)}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 1) + A + \frac{B(x + 1)}{x - \frac{1}{2}}$$

d'où en donnant à x la valeur (-1) :

$$A = \frac{\frac{1}{2}(-1 - 1 + 1)}{-1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

De même, en multipliant les deux membres de la relation par $(x - \frac{1}{2})$ puis en donnant à x la valeur $\frac{1}{2}$, on trouve :

$$B = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 1)}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{24}.$$

La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle f_1 est donc :

$$f_1(x) = \frac{x^3 - x^2 + 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$
$$+ \frac{1}{3(x + 1)} + \frac{7}{24(x - \frac{1}{2})}.$$

4.2.2. Pôle multiple

Soit a un pôle réel d'ordre n strictement plus grand que 1. On peut déterminer le coefficient A_n en multipliant les deux membres de la relation (1) ou de la relation (2) par $(x-a)^n$ et en donnant à x la valeur a, puis calculer les coefficients $A_1, \ldots, A_{n-1}$ en donnant à x des valeurs simples (remarque b). Cependant il est aussi possible de déterminer tous les coefficients A_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ en même temps. On peut en effet écrire :

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{R(x)}{(x-a)^n\,Q'(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots$$
$$+\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{R'(x)}{Q'(x)}$$

Q' et R' étant deux polynômes.

On en déduit :

$$R(x)=[A_1(x-a)^{n-1}+A_2(x-a)^{n-2}+\cdots+A_n]\times$$
$$\times\,Q'(x)+R'(x)\,(x-a)^n$$

soit en posant $y=x-a$:

$$R(a+y)=[A_n+\cdots+A_2\,y^{n-2}+A_1\,y^{n-1}]\times$$
$$\times\,Q'(a+y)+R'(a+y)\,y^n\,.$$

Le polynôme $(A_n+\cdots+A_2\,y^{n-2}+A_1\,y^{n-1})$ est donc le quotient dans la division suivant les puissances croissantes à l'ordre $(n-1)$ de $R(a+y)$ par $Q'(a+y)$. En effectuant cette division on obtient les coefficients A_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Exercice-Exemple

E$_1$ Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{x+3}{x(x-1)^3}$.

La partie entière de cette fraction rationnelle est nulle et la décomposition est de la forme :

$$\frac{x+3}{x(x-1)^3}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}$$
$$+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{B}{x}\,. \quad (3)$$

En multipliant les deux membres de cette relation par x et en donnant à x la valeur 0 on obtient :

$$B=\frac{3}{-1}=-3\,.$$

Pour calculer A_1, A_2, A_3 on a deux méthodes.

1$^{\text{re}}$ méthode : *En multipliant les deux membres de la relation* (3) *par* $(x-1)^3$ *et en donnant à x la valeur* 1 *il vient :*

$$A_3=4\,.$$

Si on multiplie les deux membres de la relation (3) *par x et qu'on fait tendre x vers l'infini on obtient :*

$$0=A_1+0+0+B$$

d'où $A_1=-B=3$.

On a donc :

$$\frac{x+3}{x(x-1)^3}=\frac{3}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x-1)^3}-\frac{3}{x}\,.$$

Pour déterminer A_2 on peut par exemple donner à x la valeur (-1), *on a ainsi :*

$$\frac{2}{8}=\frac{3}{-2}+\frac{A_2}{4}+\frac{4}{-8}+3$$

et

$$A_2=4(\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}-3)=-3$$

d'où la décomposition :

$$\frac{x+3}{x(x-1)^3}=\frac{3}{x-1}-\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{4}{(x-1)^3}-\frac{3}{x}\,.$$

2$^{\text{e}}$ méthode : *En posant* $y=x-1$ *on a :*

$$x=y+1 \qquad \textit{et} \qquad x+3=y+4\,.$$

La division suivant les puissances croissantes à l'ordre 2 *de* $(y+4)$ *par* $(y+1)$ *nous donne :*

$$\begin{array}{r|l} 4+y & 1+y \\ \cline{2-2} -3\,y & 4-3\,y+3\,y^2 \\ 3\,y^2 & \end{array}$$

On en déduit $A_3=4$, $A_2=-3$, $A_1=3$.

TESTS

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

T$_3$ $\dfrac{x^2-x}{x+1}$.

T$_4$ $\dfrac{2\,x-3}{x^2-x-2}$.

T$_5$ $\dfrac{x}{(x-2)^2}$.

T$_6$ $\dfrac{1}{x(x-1)\,(x-2)}$.

T$_7$ $\dfrac{3\,x+1}{x(x-1)^3}$.

T$_8$ $\dfrac{2\,x+1}{(x-2)\,(x+1)^2}$.

T3 $x - 2 + \dfrac{2}{x+1}$.

T4 $\dfrac{5}{3(x+1)} + \dfrac{1}{3(x-2)}$.

T5 $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{(x-2)^2}$.

T6 $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2(x-2)}$.

T7 $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{4}{(x-1)^3}$.

T8 $\dfrac{5}{9(x-2)} - \dfrac{5}{9(x+1)} + \dfrac{1}{3(x+1)^2}$.

4.3. Eléments simples associés à un facteur du type $(x^2 + px + q)^m$

4.3.1. Cas $m = 1$

Le terme correspondant au facteur (x^2+px+q) dans la décomposition en éléments simples de f est de la forme $\dfrac{Cx+D}{x^2+px+q}$.

Si p est nul, on obtient assez facilement les coefficients C et D en multipliant les deux membres de la relation (1) ou de la relation (2) par (x^2+q) et en donnant à x la valeur $\sqrt{q}\,i$ qui est une racine de ce polynôme.

Si p n'est pas nul, on donne à x des valeurs simples (remarque b).

Exercice-Exemple

E2 Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+x+2)}.$$

La décomposition est de la forme :

$$\frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+x+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+2}.$$

En multipliant les deux membres de cette relation par (x^2+1) et en donnant à x la valeur i on obtient :

$$\frac{2i+1}{1+i} = Ai + B$$

c'est-à-dire

$$Ai + B = \frac{(2i+1)(1-i)}{2} = \frac{2i+1-2i^2-i}{2} = \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}$$

donc

$$A = \tfrac{1}{2} \quad et \quad B = \tfrac{3}{2}.$$

On a ainsi :

$$\frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+x+2)} = \frac{1}{2}\,\frac{x+3}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+2}.$$

En multipliant les deux membres de cette relation par x et en faisant tendre x vers l'infini on trouve :

$$0 = \tfrac{1}{2} + C$$

d'où

$$C = -\tfrac{1}{2}.$$

En donnant à x la valeur 0 il vient :

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{D}{2}$$

donc

$$D = 1 - 3 = -2$$

et

$$\frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+x+2)} = \frac{1}{2}\,\frac{x+3}{x^2+1} - \frac{\frac{1}{2}x+2}{x^2+x+2}.$$

8.3.2. Cas $m > 1$

La somme d'éléments simples associée au facteur $(x^2+px+q)^m$ est

$$T(x) = \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

Pour déterminer les coefficients C_i et D_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ on peut employer les méthodes suivantes :

a) Si p est nul, en multipliant les deux membres de la relation (1) (ou de la relation (2)) par $(x^2+q)^m$ et en donnant à x la valeur $\sqrt{q}\,i$ on obtient C_m et D_m. En retranchant $\dfrac{C_mx+D_m}{(x^2+q)^m}$ aux deux membres de (1) ou de (2) et en mettant (x^2+q) en facteur au numérateur du premier membre on est ramené à un problème similaire avec $(m-1)$ au lieu de m. On peut alors continuer de la même façon mais cette méthode est assez lourde.

b) Lorsque p n'est pas nul, ou même dans le cas $p = 0$ si les calculs sont plus simples, on cherche, en donnant à x des valeurs particulières, à établir suffisamment d'équations pour pouvoir déterminer tous les coefficients.

c) Dans le cas particulier où l'on a

$$Q(x) = (x^2 + px + q)^m ,$$

il est plus rapide d'effectuer la division euclidienne de R par $(x^2 + px + q)$.

Exercices-Exemples

E3 Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{(x^2 + x + 1)^2 (x - 2)} .$$

La décomposition est de la forme :

$$\frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{C_1 x + D_1}{x^2+x+1} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2+x+1)^2} .$$

On multiplie les deux membres de cette relation par $(x - 2)$ *et on donne à* x *la valeur* 2 *pour obtenir :*

$$A = \frac{4 + 4 - 1}{(4 + 2 + 1)^2} = \frac{7}{7^2} = \frac{1}{7} .$$

Si on multiplie les deux membres par x *et qu'on fait tendre* x *vers l'infini, il vient :*

$$0 = \tfrac{1}{7} + C_1$$

d'où

$$C_1 = -\tfrac{1}{7} .$$

En donnant à x *la valeur* 0 *on obtient :*

$$\frac{-1}{-2} = \frac{1}{7(-2)} + D_1 + D_2$$

donc

$$D_1 + D_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{14} = \tfrac{8}{14} = \tfrac{4}{7} .$$

Pour $x = 1$ *on trouve :*

$$\frac{2}{3^2(-1)} = -\frac{1}{7} + \frac{-\frac{1}{7} + D_1}{3} + \frac{C_2 + D_2}{3^2}$$

soit

$$3D_1 + C_2 + D_2 = -2 + \tfrac{9}{7} + \tfrac{3}{7} = -\tfrac{2}{7}$$

et pour $x = -1$:

$$\frac{-2}{-3} = \frac{1}{7(-3)} + \frac{1}{7} + D_1 - C_2 + D_2$$

donc

$$D_1 - C_2 + D_2 = \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{21} - \tfrac{1}{7} = \tfrac{12}{21} = \tfrac{4}{7} .$$

On a ainsi un système de trois équations :

$$\begin{cases} D_1 + D_2 = \frac{4}{7} & (1') \\ 3D_1 + C_2 + D_2 = -\frac{2}{7} & (2') \\ D_1 - C_2 + D_2 = \frac{4}{7} . & (3') \end{cases}$$

On déduit de (1′) *et* (3′) : $C_2 = 0$, *puis de* (1′) *et* (2′) :

$$-2D_1 = \tfrac{6}{7} \qquad d'où \qquad D_1 = -\tfrac{3}{7}$$

et

$$D_2 = 1 .$$

On obtient ainsi la décomposition :

$$\frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2(x-2)} = \frac{1}{7(x-2)} - \frac{x+3}{7(x^2+x+1)} + \frac{1}{(x^2+x+1)^2} .$$

E4 Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle.

$$\frac{x^3 + 4x - 1}{(x^2 + 1)^3} .$$

La division euclidienne de $(x^3 + 4x - 1)$ *par* $(x^2 + 1)$ *nous donne :*

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x - 1 & x^2 + 1 \\ \hline 3x - 1 & x \end{array}$$

c'est-à-dire :

$$x^3 + 4x - 1 = x(x^2 + 1) + 3x - 1 .$$

On en déduit :

$$\frac{x^3 + 4x - 1}{(x^2 + 1)^3} = \frac{x}{(x^2 + 1)^2} + \frac{3x - 1}{(x^2 + 1)^3}$$

qui est la décomposition en éléments simples cherchée.

TESTS

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

T9 $\dfrac{x}{x^4 - 1}$.

T10 $\dfrac{2x - 1}{(x - 1)(x^2 + 1)}$.

T11 $\dfrac{1}{(x - 1)^2 (x^2 + 4)}$.

$\boxed{T_{12}}$ $\dfrac{1}{x^3+1}$.

$\boxed{T_{13}}$ $\dfrac{x}{x^3+1}$.

$\boxed{T_{14}}$ $\dfrac{2x^3}{(x^2+1)^2}$.

Réponses

T_9 $\dfrac{1}{4(x-1)} + \dfrac{1}{4(x+1)} - \dfrac{x}{2(x^2+1)}$.

T_{10} $\dfrac{1}{2(x-1)} + \dfrac{-x+3}{2(x^2+1)}$.

T_{11} $\dfrac{-2}{25(x-1)} + \dfrac{1}{5(x-1)^2} + \dfrac{2x-3}{25(x^2+4)}$.

T_{12} $\dfrac{1}{3(x+1)} + \dfrac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$.

T_{13} $-\dfrac{1}{3(x+1)} + \dfrac{x+1}{3(x^2-x+1)}$.

T_{14} $\dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.

4.4. Calcul des primitives

Les primitives d'une fraction rationnelle f s'obtiennent en faisant la somme des primitives de chacun des termes de sa décomposition en éléments simples.

Examinons successivement les différents types de termes que l'on rencontre.

1) Partie entière

C'est un polynôme, les primitives se calculent donc aisément.

Exemple : La partie entière de la fraction rationnelle f_1 nous donne :

$$\int \frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{2}x\right) + C = \frac{1}{4}(x^2-3x)+C.$$

2) $\dfrac{A}{x-a}$

Le changement de variable $t=x-a$ montre que l'on a :

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \operatorname{Log} |x-a| + C.$$

Exemple : La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle f_1 est d'après le paragraphe 4.1 :

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{3(x+1)} + \frac{7}{24(x-\frac{1}{2})}.$$

On a :

$$\int \frac{1}{3(x+1)} dx = \frac{1}{3} \operatorname{Log} |x+1| + C$$

$$\int \frac{7}{24(x-\frac{1}{2})} dx = \frac{7}{24} \operatorname{Log} \left|x-\frac{1}{2}\right| + C$$

donc en tenant compte de 1) :

$$\int f_1(x)\, dx = \frac{1}{4}(x^2-3x) + \frac{1}{3}\operatorname{Log}|x+1| + \frac{7}{24}\operatorname{Log}\left|x-\frac{1}{2}\right| + C.$$

3) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $n>1$

Le même changement de variable que précédemment nous donne :

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Exercice-Exemple

$\boxed{E_5}$ Calculer les primitives de la fraction rationnelle $\dfrac{x+3}{x(x-1)^3}$.

On a obtenu dans l'exercice-exemple E_1 *la décomposition* :

$$\frac{x+3}{x(x-1)^3} = \frac{3}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3} - \frac{3}{x}.$$

On en déduit :

$$\int \frac{x+3}{x(x-1)^3} dx = 3 \operatorname{Log}|x-1| + \frac{3}{x-1} - \frac{4}{2(x-1)^2} - 3\operatorname{Log}|x| + C$$

ou encore :

$$\int \frac{x+3}{x(x-1)^3} dx = \frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + 3\operatorname{Log}\left|\frac{x-1}{x}\right| + C.$$

4) $\dfrac{Cx + D}{x^2 + px + q}$

On emploie la même méthode que pour calculer les primitives de la forme

$$\int \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{px^2 + qx + r}}\,\mathrm{d}x \quad (\S\, 2.3.3)\,.$$

En écrivant

$$Cx + D = \frac{C}{2}(2\,x + p) + D - \frac{Cp}{2}$$

on obtient :

$$\int \frac{Cx + D}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = \frac{C}{2}\int \frac{2\,x + p}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x + \left(D - \frac{Cp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + px + q}\,.$$

Le changement de variable $t = x^2 + px + q$ nous donne :

$$\int \frac{2\,px + q}{x^2 + px + q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \operatorname{Log} t + C' \quad \text{où}$$

C' désigne une constante réelle quelconque. On remarquera qu'il n'est pas nécessaire d'écrire $\operatorname{Log} |t|$ car, le discriminant du trinôme $(x^2 + px + q)$ étant négatif, $t = x^2 + px + q$ est toujours positif.

Pour calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + px + q}$ on écrit le trinôme sous forme canonique et on se ramène par un changement de variable à des primitives de la forme

$$K \int \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2} = K \operatorname{Arc\,tg} u + C'\,,$$

K étant un nombre réel.

Exercice-Exemple

E$_6$ Calculer les primitives de la fraction rationnelle $\dfrac{2\,x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 2)}$.

On a d'après l'exercice-exemple E_2 *la décomposition :*

$$\frac{2\,x+1}{(x^2+1)(x^2+x+2)} = \frac{1}{2}\,\frac{x+3}{x^2+1} - \frac{\frac{1}{2}\,x+2}{x^2+x+2}$$

d'où

$$\int \frac{2\,x+1}{(x^2+1)(x^2+x+2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{x+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\frac{1}{2}\,x+2}{x^2+x+2}\,\mathrm{d}x\,.$$

On peut écrire :

$$\int \frac{x+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2\,x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\,.$$

Le changement de variable $t = x^2 + 1$ *nous donne :*

$$\mathrm{d}t = 2\,x\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int \frac{2\,x}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \operatorname{Log} t + C = \operatorname{Log}(x^2 + 1) + C$$

d'où

$$\int \frac{x + 3}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{Log}(x^2 + 1) + 3 \operatorname{Arc\,tg} x + C\,.$$

En écrivant

$$\tfrac{1}{2}\,x+2 = \tfrac{1}{4}(2\,x+1)+2-\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4}(2\,x+1)+\tfrac{7}{4}$$

on obtient :

$$\int \frac{\frac{1}{2}\,x+2}{x^2+x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{2\,x+1}{x^2+x+2}\,\mathrm{d}x + \frac{7}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+2}\,.$$

On pose

$$t = x^2 + x + 2$$

d'où

$$\mathrm{d}t = (2\,x + 1)\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int \frac{2\,x + 1}{x^2 + x + 2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \operatorname{Log} t + C = \operatorname{Log}(x^2 + x + 2) + C\,.$$

En mettant le trinôme $(x^2 + x + 2)$ *sous forme canonique on a :*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x + \frac{1}{2})^2 + 2 - \frac{1}{4}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}$$

donc

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + x + 2} = \frac{4}{7}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\dfrac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}\right)^2 + 1} = \frac{4}{7}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\dfrac{2\,x + 1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1}\,.$$

On pose

$$u = \frac{2\,x + 1}{\sqrt{7}}$$

d'où

$$\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{d}x \qquad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{d}u$$

et

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{7}} \text{ Arc tg } u$$

$$+ C = \frac{2}{\sqrt{7}} \text{ Arc tg } \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C\,.$$

On obtient donc finalement :

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+x+2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\text{ Log }(x^2+1)$$

$$+\frac{3}{2}\text{ Arc tg } x - \frac{1}{4}\text{ Log }(x^2+x+2)$$

$$-\frac{\sqrt{7}}{2}\text{ Arc tg } \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C$$

ou encore :

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+1)(x^2+x+2)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\text{ Log } \frac{x^2+1}{x^2+x+2}$$

$$+\frac{1}{2}\left(3\text{ Arc tg } x - \sqrt{7}\text{ Arc tg } \frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

5) $\dfrac{Cx+D}{(x^2+px+q)^m}$, $m > 1$

La démarche à suivre est la même que dans le cas 4). On a

$$\int \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^m}\,\mathrm{d}x = \frac{C}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\,\mathrm{d}x$$

$$+\left(D - \frac{Cp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m}\,.$$

Le changement de variable $t = x^2 + px + q$ nous donne :

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^m}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^m} = \frac{1}{(1-m)\,t^{m-1}} + C'.$$

En écrivant le trinôme $(x^2 + px + q)$ sous forme canonique et en faisant un changement de variable, le calcul de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^m}$ se ramène à celui de $K' \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^m}$ où K' est un nombre réel.

Pour calculer $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^m}$ on peut écrire :

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^m} = \int \frac{1+u^2}{(1+u^2)^m}\,\mathrm{d}u - \int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^m}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{m-1}} - \int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^m}\,.$$

Le dernier terme s'intègre par parties en posant

$$\mathrm{d}v = \frac{u\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^m}\,.$$

On a ainsi :

$$v = \frac{1}{2(1-m)(1+u^2)^{m-1}}$$

et

$$\int \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^m} = \frac{u}{2(1-m)(1+u^2)^{m-1}}$$

$$-\frac{1}{2(1-m)}\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{m-1}}\,.$$

On réapplique la méthode jusqu'à ce qu'on obtienne $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ c'est-à-dire Arc tg $u + C'$.

Exercices-Exemples

$\boxed{\mathrm{E}_7}$ Calculer les primitives de la fraction rationnelle $\dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2(x-2)}$.

On a d'après l'exercice-exemple E_3 *la décomposition :*

$$\frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2(x-2)} = \frac{1}{7(x-2)}$$

$$-\frac{x+3}{7(x^2+x+1)} + \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,.$$

Le premier terme nous donne

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} = \text{Log }|x-2| + C\,.$$

Pour calculer

$$\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

on écrit :

$$x+3 = \tfrac{1}{2}(2x+1) + 3 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(2x+1) + \tfrac{5}{2}$$

d'où

$$\int \frac{x+3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$+\frac{5}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}\,.$$

En posant $t = x^2 + x + 1$ *on obtient :*

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \text{Log}\, t + C$$
$$= \text{Log}\,(x^2+x+1) + C\,.$$

Le trinôme (x^2+x+1) *s'écrit sous forme canonique :*

$$x^2+x+1+(x+\tfrac{1}{2})^2+1-\tfrac{1}{4}=(x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\,.$$

On en déduit :

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}=\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

puis en posant $u = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$:

$$du = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dx \qquad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,du$$

et

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{Arc tg}\, u$$
$$+C = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{Arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C\,.$$

De même on a :

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{16}{9}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^2}$$
$$= \frac{8}{3\sqrt{3}}\int \frac{du}{(1+u^2)^2}\,.$$

On écrit :

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \int \frac{1+u^2}{(1+u^2)^2}\,du$$
$$-\int \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,du$$
$$= \int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,du$$

soit

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \text{Arc tg}\, u - \int \frac{u^2\,du}{(1+u^2)^2}\,.$$

Le dernier terme s'intègre par parties en posant

$$dv = \frac{u\,du}{(1+u^2)^2} \quad \textit{d'où} \quad v = -\frac{1}{2(1+u^2)}$$

et

$$\int \frac{u^2}{(1+u^2)^2}\,du = -\frac{u}{2(1+u^2)} + \int \frac{du}{2(1+u^2)}$$
$$= -\frac{u}{2(1+u^2)} + \frac{1}{2}\,\text{Arc tg}\, u + C\,.$$

On obtient ainsi :

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \text{Arc tg}\, u + \frac{u}{2(1+u^2)}$$
$$-\frac{1}{2}\,\text{Arc tg}\, u + C$$

soit

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{2}\,\text{Arc tg}\, u + \frac{u}{2(1+u^2)} + C$$

et

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\left[\frac{1}{2}\,\text{Arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{3}}{8}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right] + C$$

ou encore :

$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\,\text{Arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$
$$+\frac{1}{3}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} + C\,.$$

En regroupant les résultats on trouve :

$$\int \frac{x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2\,(x-2)}\,dx$$
$$= \frac{1}{7}\,\text{Log}\,\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2+x+1}}$$
$$+\frac{13}{21\sqrt{3}}\,\text{Arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\,\frac{2x+1}{x^2+x+1} + C.$$

E_8

Calculer les primitives de la fraction rationnelle $\dfrac{x^3+4x-1}{(x^2+1)^3}$.

La décomposition en éléments simples obtenue dans l'exercice-exemple E_4 *est :*

$$\frac{x^3+4x-1}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3x-1}{(x^2+1)^3}\,.$$

On a donc :

$$\int \frac{x^3+4x-1}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$$
$$+3\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^3}\,.$$

Le changement de variable $t = x^2 + 1$ *nous donne :*

$$dt = 2\,x\,dx$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2\,t} + C$$

$$= -\frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

et

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{4\,t^2} + C$$

$$= -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + C\,.$$

Pour calculer $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ *on écrit :*

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^3}\,dx - \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^3}$$

$$= \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} - \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^3}\,.$$

En posant

$$u = x \qquad dv = \frac{x\,dx}{(x^2+1)^3}$$

on a

$$du = dx \qquad v = -\frac{1}{4(x^2+1)^2}$$

et en intégrant par parties :

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^3} = -\frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

d'où

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\,.$$

Le calcul de $\int \frac{du}{(1+u^2)^2}$ *a été fait dans l'exercice-exemple* E_7*, on en déduit :*

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\left(\text{Arc tg}\,x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C\,.$$

En regroupant les résultats on obtient :

$$\int \frac{x^3+4\,x-1}{(x^2+1)^3}\,dx = -\frac{1}{4}\left(\frac{3\,x+4}{2(x^2+1)} + \frac{x+3}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{2}\,\text{Arc tg}\,x\right) + C\,.$$

TESTS

En utilisant les résultats des décompositions en éléments simples des tests T_3 à T_{14}, calculer les primitives suivantes.

$\boxed{T_{15}}$ $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{x+1}\,dx\,.$

$\boxed{T_{16}}$ $\displaystyle\int \frac{2\,x-3}{x^2-x-2}\,dx\,.$

$\boxed{T_{17}}$ $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2}\,.$

$\boxed{T_{18}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}\,.$

$\boxed{T_{19}}$ $\displaystyle\int \frac{3\,x+1}{x(x-1)^3}\,dx\,.$

$\boxed{T_{20}}$ $\displaystyle\int \frac{(2\,x+1)\,dx}{(x-2)(x+1)^2}\,.$

$\boxed{T_{21}}$ $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4-1}\,.$

$\boxed{T_{22}}$ $\displaystyle\int \frac{2\,x-1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx\,.$

$\boxed{T_{23}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x^2+4)}\,.$

$\boxed{T_{24}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}\,.$

$\boxed{T_{25}}$ $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3+1}\,.$

$\boxed{T_{26}}$ $\displaystyle\int \frac{2\,x^3}{(x^2+1)^2}\,dx\,.$

Réponses

T_{15} $\displaystyle\frac{x^2}{2} - 2\,x + 2\,\text{Log}\,|x+1| + C\,.$

T_{16} $\displaystyle\frac{1}{3}\,\text{Log}\,|x-2|\,|x+1|^5 + C\,.$

T_{17} $\displaystyle-\frac{2}{x-2} + \text{Log}\,|x-2| + C\,.$

T_{18} $\displaystyle\frac{1}{2}\,\text{Log}\,\frac{|x(x-2)|}{(x-1)^2} + C\,.$

T_{19} $\displaystyle\text{Log}\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + C\,.$

T_{20} $\displaystyle\frac{5}{9}\,\text{Log}\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - \frac{1}{3(x+1)} + C\,.$

T_{21} $\displaystyle\frac{1}{4}\,\text{Log}\,\frac{|x^2-1|}{(x^2+1)} + C\,.$

T_{22} $\displaystyle\frac{1}{2}\,\text{Log}\,\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{3}{2}\,\text{Arc tg}\,x + C\,.$

T23 $-\dfrac{1}{5(x-1)}+\dfrac{1}{25}\operatorname{Log}\dfrac{x^2+4}{(x-1)^2}$

$$-\frac{3}{50}\operatorname{Arc\,tg}\frac{x}{2}+C\,.$$

T24 $\dfrac{1}{6}\operatorname{Log}\dfrac{(x+1)^2}{(x^2-x+1)}$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

T25 $-\frac{1}{3}\operatorname{Log}|x+1|+\frac{1}{6}\operatorname{Log}(x^2-x+1)$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\,.$$

T26 $\operatorname{Log}(x^2+1)+\dfrac{1}{x^2+1}+C\,.$

4.5. Intégrale d'une fraction rationnelle

Soit $f=P/Q$ une fraction rationnelle irréductible, on peut calculer l'intégrale de f sur tout intervalle fermé $[a,b]$ qui ne contient aucune racine du polynôme Q. On emploie les mêmes méthodes que pour la recherche des primitives.

Exercices-Exemples

E9 Calculer

$$I_9=\int_0^1\frac{x+3}{x^2-x-2}\,dx\,.$$

Les racines du dénominateur 2 et (-1) n'appartenant pas à l'intervalle $[0,1]$, on peut calculer cette intégrale. La décomposition de la fraction rationnelle est de la forme

$$\frac{x+3}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}\,.$$

En multipliant les 2 membres de cette relation par $(x-2)$ et en donnant à x la valeur 2, on obtient $A=\frac{5}{3}$. En les multipliant par $(x+1)$ et en donnant à x la valeur (-1), on trouve $B=-\frac{2}{3}$.
On a donc

$$\frac{x+3}{(x-2)(x+1)}=\frac{5}{3(x-2)}-\frac{2}{3(x+1)}$$

et

$$I_{10}=\tfrac{5}{3}[\operatorname{Log}|x-2|]_0^1-\tfrac{2}{3}[\operatorname{Log}|x+1|]_0^1$$

d'où le résultat

$$\int_0^1\frac{x+3}{x^2-x-2}\,dx=-\frac{7}{3}\operatorname{Log}2\,.$$

E10 Calculer $I_{10}=\displaystyle\int_{-2}^1\frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Le trinôme du second degré n'ayant pas de racine, on peut calculer cette intégrale. Dans ce cas, il faut effectuer la décomposition canonique du trinôme :

$$x^2+4x+13=(x+2)^2+9$$

$$I_{10}=\int_{-2}^1\frac{dx}{(x+2)^2+9}\,.$$

Soit en mettant 1/9 en facteur,

$$I_{10}=\frac{1}{9}\int_{-2}^1\frac{dx}{1+\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}\,.$$

Le changement de variable $t=\dfrac{x+2}{3}$, nous donne $dt=\dfrac{dx}{3}$ et

$$\int_{-2}^1\frac{dx}{x^2+4x+13}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{12}\,.$$

TESTS

Calculer les intégrales suivantes.

T27 $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(x+1)^2(x-2)}\,.$

T28 $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(x^2+1)(x+1)}\,.$

T29 $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x(x^2+1)^2}\,.$

T30 $\displaystyle\int_{-1/2}^1\frac{dx}{2x^2+2x+5}\,.$

T31 $\displaystyle\int_{-1/3}^{1/3}\frac{x+1}{9x^2+6x+5}\,dx\,.$

T32 $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2}\frac{2x+3}{4x^2+4x+5}\,dx\,.$

T33 $\displaystyle\int_0^1\frac{x\,dx}{(2x+1)^2}\,.$

T₃₄ $\int_0^1 \operatorname{Log}(x^2 - 2x + 4)\,dx$.

T₃₅ $\int_0^{2/3} \operatorname{Log}(9x^2 + 6x + 4)\,dx$.

T₃₆ $\int_1^4 \operatorname{Log}(2x^2 + 5x - 3)\,dx$.

T₃₇ $\int_{-2/3}^{-1/3} \operatorname{Log}(9x^2 + 12x + 5)\,dx$.

Réponses

T₂₇ $-\frac{1}{6} - \frac{2}{9}\operatorname{Log} 2$.

T₂₈ $\frac{1}{4}\operatorname{Log} 2 + \frac{\pi}{8}$.

T₂₉ $\frac{3}{2}\operatorname{Log} 2 - \frac{3}{20} - \frac{1}{2}\operatorname{Log} 5$.

T₃₀ $\frac{\pi}{12}$.

T₃₁ $\frac{1}{2}\operatorname{Log} 2 - \frac{\pi}{4}$.

T₃₂ $\frac{1}{4}\operatorname{Log} 2 + \frac{\pi}{8}$.

T₃₃ $-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\operatorname{Log} 3$.

T₃₄ On commence par intégrer par parties $2\operatorname{Log} 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - 2$.

T₃₅ $\frac{4}{3}\operatorname{Log} 2 + \operatorname{Log} 3 - \frac{4}{3} + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

T₃₆ $\frac{21}{2}\operatorname{Log} 7 - 8\operatorname{Log} 2 - 6$.

T₃₇ $\frac{1}{3}\operatorname{Log} 2 + \frac{\pi}{6} - \frac{2}{3}$.