1. Intégrale d'une fonction continue

Notations : Les fonctions f, g, F et G sont des fonctions numériques. Sauf indication contraire a et b sont deux nombres réels tels que $a \leqslant b$.

1.1. Définitions

Etant donnée une fonction f définie, continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, soient

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$$

une suite finie croissante et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des nombres réels appartenant respectivement aux intervalles $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.

Définition 1.1.1.

Le nombre

$$S = (x_1 - x_0) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + \cdots \\ \cdots + (x_n - x_{n-1}) f(\xi_n)$$

est appelé « somme de Riemann » de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$.

On désigne par Δ la plus grande différence entre deux termes consécutifs de la suite $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

Théorème 1.1.1.

Il existe un nombre l unique tel que la somme S puisse être rendue aussi proche que l'on veut de l pourvu que la suite $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ soit choisie avec Δ suffisamment petit.

Définition 1.1.2.

l est appelé intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$.

l est noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et se lit « somme de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$ ».

Remarque. — Si b est égal à a, toute somme de Riemann de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ est nulle :

$$S = (a - a) f(a) = 0 .$$

On a donc :

$$l = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 .$$

1.2. Interprétation géométrique

Considérons une fonction f définie, continue sur l'intervalle $[a, b]$ et sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1^er^ *cas.* — f est une fonction positive (Fig. 1.1).

L'aire du domaine hachuré figure 1.2 est égale à une somme de Riemann S de la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$. On démontre que lorsque le nombre de points x_i augmente indéfiniment et que Δ tend vers zéro, cette aire tend vers l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ (Fig. 1.3).

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'aire $\mathcal{A}$.

2^e^ *cas.* — f est une fonction négative.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est égale à l'opposé de l'aire $\mathcal{A}'$ du domaine hachuré figure 1.4.

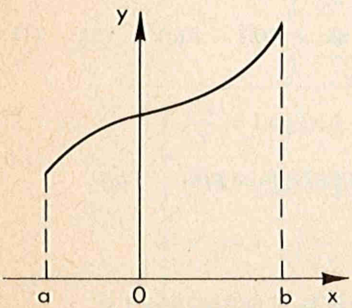

FIG. 1.1

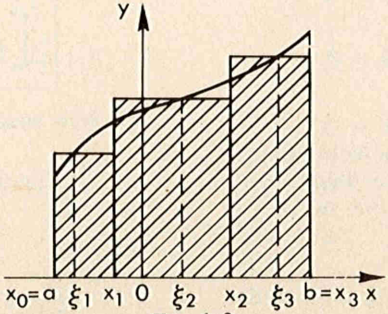

FIG. 1.2.

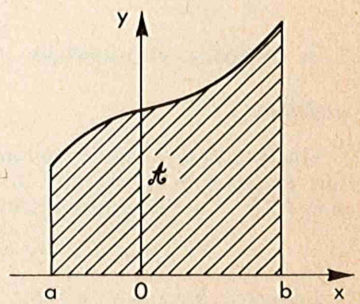

FIG. 1.3.

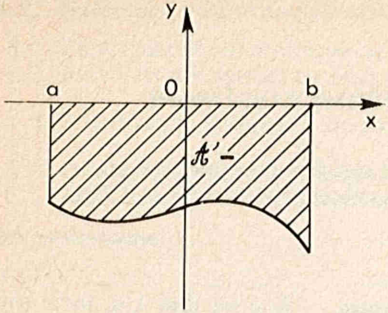

FIG. 1.4.

3^e *cas.* — f prend des valeurs positives et des valeurs négatives dans l'intervalle $[a, b]$ (Fig. 1.5).

Soient P_1 et P_2 les demi-plans définis respectivement par $y \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$, on note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine limité par l'axe Ox, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la partie de la courbe d'équation $y = f(x)$ contenue dans P_1, $\mathcal{A}'$ l'aire du domaine limité par l'axe Ox, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ et la partie de la courbe d'équation $y = f(x)$ contenue dans P_2.

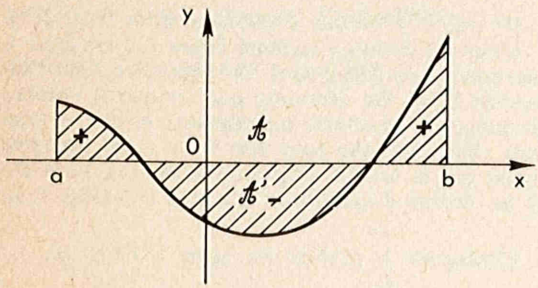

FIG. 1.5.

On a alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{A} - \mathcal{A}' .$$

1.3. Intégrales et primitives

Définition 1.3.1.

Une fonction F définie, continue et dérivable sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite primitive d'une fonction f sur A si elle admet f pour dérivée sur A :

$$\forall x \in A , \qquad F'(x) = f(x) .$$

Exemple : $F : x \mapsto x^3$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto 3\,x^2$.

Théorème 1.3.1.

Si une fonction f admet une primitive F sur une partie A de $\mathbb{R}$,

i) f admet une infinité de primitives sur A, ce sont toutes les fonctions G définies sur A par :

$G : x \mapsto G(x) = F(x) + C$ où C est une constante .

ii) f admet une primitive et une seule sur A qui prenne une valeur donnée y_0 en un point x_0 de A.

Exemple : Soit $f : x \mapsto 3\,x^2$, $F : x \mapsto x^3 + 1$ est la seule primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$.

Théorème 1.3.2.

i) Une fonction f qui est définie et continue sur une partie D de $\mathbb{R}$ admet une infinité de primitives sur D.

ii) Si f est une fonction définie, continue sur l'intervalle $[a, b]$, la fonction G définie sur $[a, b]$ par

$$G : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est la primitive de f sur l'intervalle $[a, b]$ qui s'annule pour $x = a$.

Soient f une fonction définie, continue sur l'intervalle $[a, b]$, F une primitive quelconque de f sur cet intervalle et G la fonction définie dans le théorème ci-dessus, on a d'après les théorèmes 1.3.1 et 1.3.2 :

$$\forall x \in [a, b] , \qquad G(x) = F(x) + C$$

donc

$$G(b) = F(b) + C$$
$$G(a) = F(a) + C = 0 ,$$

d'où

$$C = -F(a)$$

et

$$G(b) = F(b) - F(a) .$$

On obtient ainsi la formule fondamentale :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)} . \qquad (1)$$

On écrit aussi :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) .$$

Exemple :

$$\int_0^1 3\,x^2\,\mathrm{d}x = [x^3]_0^1 = 1 - 0 = 1 .$$

1.4. Propriétés des intégrales

Soient f et g deux fonctions définies, continues sur l'intervalle $[a, b]$ et k une constante réelle.

En appliquant la formule (1) et en utilisant les propriétés des dérivées on obtient les propriétés suivantes :

i) $\displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

ii) $\displaystyle\int_a^b [kf(x)]\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$

Si c est un point de l'intervalle $[a, b]$ l'application de la formule (1) nous donne :

iii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$

Si f est une fonction positive sur l'intervalle $[a, b]$ toute somme de Riemann de f sur $[a, b]$ est positive. On en déduit :

iv) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0\,.$

En utilisant les propriétés i) et iv) on obtient pour $f \leqslant g$:

v) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$

Supposons à présent $b < a$. On pose par définition :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

La formule (1) et les propriétés i), ii) et iii) restent vraies.

Quels que soient les éléments c, d, e de l'intervalle $[a, b]$ on peut écrire :

$$\int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

1.5. Primitives classiques

On note $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ et on lit « somme de $f(x)\,\mathrm{d}x$ » toutes les primitives de f sur D, D étant la partie de $\mathbb{R}$ sur laquelle f est définie et continue.

Si F est une primitive quelconque de f sur D, on écrit symboliquement :

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\,,$$

C étant une constante.

On obtient à partir des dérivées des fonctions connues le tableau des primitives.

D est précisée lorsque ce n'est pas $\mathbb{R}$ tout entier.

On rappelle les propriétés des primitives en écrivant symboliquement :

$$\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int [kf(x)]\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\int \mathrm{d}x = x + C\,.$$

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad \text{si} \quad \alpha \in \mathbb{Q}\,, \quad \alpha \neq -1\,.$$

D dépend de la valeur de α.

En particulier :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \qquad D = \mathbb{R}^*\,.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C \qquad D = \mathbb{R}_+^*\,.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{Log}\,|x| + C \qquad D = \mathbb{R}^*\,.$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C\,.$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\mathrm{Log}\,a} + C \qquad \text{si} \quad a > 0, a \neq 1\,.$$

$$\int \cos(\omega x + \varphi)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + C\,.$$

$$\int \sin(\omega x + \varphi)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + C\,.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C \qquad D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + h\pi,\ h \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int (1 + \operatorname{cotg}^2 x)\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C \qquad D = \mathbb{R} - \{ h\pi,\ h \in \mathbb{Z} \}\,.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \operatorname{Arc\,tg} x + C\,.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{Arc\,sin} x + C \qquad D = \{ x \in \mathbb{R},\ |x| < 1 \}\,.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \operatorname{Log}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + C \quad \text{ou} \quad \operatorname{Arg\,sh} x + C\,.$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{Log}\left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + C \quad \text{ou} \quad \operatorname{Arg\,ch} x + C \quad \text{si} \quad x > 1\,. \qquad D = \{ x \in \mathbb{R},\ |x| > 1 \}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Log}\left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C \quad \text{ou} \quad \operatorname{Arg\,th} x + C \quad \text{si} \quad |x| < 1\,. \qquad D = \mathbb{R} - \{ -1, 1 \}$$

Remarque. — Dans la suite du livre, on ne précisera plus D ni dans les exercices-exemples ni dans les tests. On retiendra désormais que ce n'est pas forcément $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercices-Exemples

E₁ Calculer

$$I_1 = \int (4\,x^2 - 5\,x + 1)\,\mathrm{d}x\,.$$

La fonction $x \mapsto 4\,x^2 - 5\,x + 1$ *étant définie, continue sur* $\mathbb{R}$ *tout entier, elle admet d'après le théorème* 1.3.2 i) *une infinité de primitives sur* $\mathbb{R}$.
En utilisant les propriétés des primitives on peut écrire :

$$I_1 = \int (4\,x^2)\,\mathrm{d}x + \int (-5\,x)\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x = 4\int x^2\,\mathrm{d}x - 5\int x\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x$$

soit d'après le tableau de primitives précédent :

$$I_1 = 4\,\frac{x^3}{3} - 5\,\frac{x^2}{2} + x + C = \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + C\,.$$

E₂ Calculer

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}\,.$$

La fonction à intégrer est définie, continue sur

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + h\pi,\ h \in \mathbb{Z} \right\}.$$

L'intervalle $[0, \pi/4]$ *sur lequel on intègre étant contenu dans* D *on peut calculer* I_2. *On applique la formule*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

et on obtient ainsi d'après le tableau de primitives :

$$I_2 = [\operatorname{tg} x]_0^{\pi/4} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0$$

soit

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = 1\,.$$

E₃ Calculer

$$I_3 = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \mathrm{d}x\,.$$

La fonction à intégrer étant continue sur $D = \mathbb{R}_+^*$ et l'intervalle $[1, 2]$ sur lequel on intègre étant contenu dans D, on peut calculer I_3. On a :

$$I_3 = -\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

soit

$$I_3 = \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 + 2[\sqrt{x}]_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 1\right) + 2(\sqrt{2} - 1)$$

d'où le résultat :

$$\int_1^2 \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = 2\sqrt{2} - \frac{5}{2}.$$

E₄

Calculer

$$I_4 = \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\,.$$

En appliquant la formule

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

on obtient :

$$I_4 = [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - 1\,.$$

E₅

Calculer

$$I_5 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2}\,.$$

En appliquant la même formule que dans E_2 *on trouve :*

$$I_5 = [\operatorname{Arc\,tg} x]_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \operatorname{Arc\,tg}\sqrt{3} - \operatorname{Arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

soit

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \frac{\pi}{12}.$$

E₆

Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

La somme

$$S = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + 1\right]$$

est une somme de Riemann de la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$, elle correspond au choix des points $x_0 = 0$, $x_1 = 1/n$, $x_2 = 2/n$, …, $x_{n-1} = (n-1)/n$, $x_n = 1$ et $\xi_i = x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. On a donc d'après le théorème 1.1.1 et la définition 1.1.2 :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 =$$

$$= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

TESTS

Calculer les primitives suivantes en précisant la partie D de $\mathbb{R}$ sur laquelle la fonction figurant sous le signe $\int$ est définie et continue lorsque ce n'est pas $\mathbb{R}$ tout entier.

T₁ $\int (7x^2 - 2)\,\mathrm{d}x\,.$

T₂ $\int \left(\frac{1}{x^3} - x^{-4}\right)\mathrm{d}x\,.$

T₃ $\int x^{3/2}\,\mathrm{d}x\,.$

T₄ $\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t\,.$

T₅ $\int \left(t + t^{5/2} - \frac{1}{t^4}\right)\mathrm{d}t\,.$

T₆ $\int \left(4\cos\theta - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta\,.$

T₇ $\int \cos 4x\,\mathrm{d}x\,.$

T₈ $\int \sin(2t + 1)\,\mathrm{d}t\,.$

T₉ $\int 3\left(\cos 3x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x\,.$

T₁₀ $\int \left(\frac{2}{t} + \mathrm{e}^t\right)\mathrm{d}t\,.$

T₁₁ $\int \left(3^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x\,.$

T₁₂ $\int \frac{7\,\mathrm{d}x}{1 - x^2}\,.$

T13 $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - \cos 2x}$.

T14 $\displaystyle\int (1 + 2 \sin v)^2 \, dv$.

Calculer les intégrales suivantes en vérifiant que l'intervalle sur lequel on intègre est contenu dans D, D étant définie comme ci-dessus.

T15 $\displaystyle\int_2^3 (3x^2 - 1)\, dx$.

T16 $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin u \, du$.

T17 $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{5}{\cos^2 \theta}\, d\theta$.

T18 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos \frac{\theta}{2}\, d\theta$.

T19 $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin 3t \, dt$.

T20 $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) dt$.

T21 $\displaystyle\int_{-1}^{1} (2 e^u - u^4)\, du$.

T22 $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \cos 2x}$.

T23 $\displaystyle\int_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{dt}{1 + t^2}$.

T24 $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{2\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

T25 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$.

T26 $\displaystyle\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$.

T27 Montrer que

$$S = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$$

est une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur un intervalle à définir.

En déduire la valeur de

$$l = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}.$$

Calculer en utilisant les sommes de Riemann

T28 $\displaystyle L = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{(k-1)\pi}{2n}$.

T29 $\displaystyle L = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2}$.

T30 $\displaystyle L = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}}$.

T31 $\displaystyle L = \lim_{n \to +\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - p^2}}$.

T32 $\displaystyle L = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} 3^{p/n}$.

T33 On pose

$$I_{2p} = \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^{2p} \theta}.$$

1) Calculer I_0 et I_2.
2) Calculer la dérivée de la fonction

$$f : \theta \mapsto \frac{\sin \theta}{\cos^{2p+1} \theta}$$

et en déduire une relation de récurrence entre I_{2p} et I_{2p+2}.

Réponses

T1 $\frac{7}{3} x^3 - 2x + C$.

T2 $-\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{3x^3} + C$, $\quad D = \mathbb{R}^*$.

T3 $\frac{2}{5} x^{5/2} + C$, $\quad D = \mathbb{R}_+$.

T4 $\frac{2}{3} t^{3/2} + C$, $\quad D = \mathbb{R}_+$.

T5 $\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{2}{7} t^{7/2} + \dfrac{1}{3t^3} + C$, $\quad D = \mathbb{R}_+^*$.

T6 $4 \sin \theta + \operatorname{cotg} \theta + C$, $\; D = \mathbb{R} - \{ h\pi, h \in \mathbb{Z} \}$.

T7 $\frac{1}{4} \sin 4x + C$.

T8 $-\frac{1}{2} \cos(2t + 1) + C$.

T9 $\sin 3x - 3 \operatorname{tg} x + C$,

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + h\pi, h \in \mathbb{Z} \right\}.$$

T10 $2 \operatorname{Log}|t| + e^t + C, \qquad D = \mathbb{R}^*.$

T11 $\dfrac{3^x}{\operatorname{Log} 3} + \sqrt{x} + C, \qquad D = \mathbb{R}_+^*.$

T12 $\dfrac{7}{2} \operatorname{Log}\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$ ou $7 \operatorname{Arg\,th} x + C$

$D = \mathbb{R} - \{-1, 1\}.$

T13 $-\frac{1}{2} \operatorname{cotg} x + C.$

$D = \mathbb{R} - \{h\pi, h \in \mathbb{Z}\}.$

T14 $3v - 4\cos v - \sin 2v + C.$

T15 $18.$

T16 $\dfrac{1}{2}.$

T17 $5.$

T18 $\sqrt{2}.$

T19 $\dfrac{1}{3}.$

T20 $0.$

T21 $2\left(e - \dfrac{1}{e}\right) - \dfrac{2}{5}.$

T22 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

T23 $\dfrac{\pi}{12}.$

T24 $\dfrac{\pi}{3}.$

T25 $\operatorname{Log}(1 + \sqrt{2})$ ou $\operatorname{Arg\,sh} 1.$

T26 $5 - 4\sqrt{2} + \operatorname{Log} 2.$

T27 S est une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

$$l = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}.$$

T28 $L = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \dfrac{2}{\pi}.$

T29
$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$
$$= \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

T30
$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$
$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{Log}(1 + \sqrt{2}).$$

T31
$$L = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{p}{2n}\right)^2}}$$
$$= \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{6}.$$

T32 $L = \displaystyle\int_0^1 3^x\, dx = \dfrac{2}{\operatorname{Log} 3}.$

T33 1) $I_0 = \dfrac{\pi}{4}, \qquad I_2 = 1.$

2)

$f' : \theta \mapsto$
$$\frac{\cos^{2p+2}\theta + (2p+1)\cos^{2p}\theta \sin^2\theta}{\cos^{2(2p+1)}\theta}.$$

En utilisant la relation $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ on obtient :

$$f'(\theta) = \frac{2p+1}{\cos^{2p+2}\theta} - \frac{2p}{\cos^{2p}\theta}$$

d'où en intégrant les deux membres de cette égalité sur l'intervalle $[0, \pi/4]$:

$$[f(\theta)]_0^{\pi/4} = (2p+1)\int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^{2p+2}\theta}$$
$$- 2p \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^{2p}\theta}$$

soit

$$(2p+1) I_{2p+2} - 2p I_{2p}$$
$$= \left[\frac{\sin\theta}{\cos^{2p+1}\theta}\right]_0^{\pi/4} = 2^p.$$