# 8. Formule de Taylor et applications

## 8.1. Formule de Taylor

### 8.1.1. Énoncé et démonstration

*Théorème.* – **Si $f$ est une fonction numérique de classe $C^n$ sur un intervalle $[a, b]$ et admet une dérivée d'ordre $n + 1$ sur $]a, b[$, il existe $c \in ]a, b[$ tel que :**

$$\boxed{f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)}$$

Cette formule est appelée **formule de Taylor d'ordre $n$ ou formule de Taylor - Lagrange.** Le dernier terme est appelé **reste** ou reste de Lagrange.

Soit $g$ la fonction :

$$x \longmapsto f(x) - \left[ f(a) + (x-a) f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right] - K \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où la constante $K$ est choisie telle que $g(b) = 0$.

On a alors : $g(a) = g'(a) = \ldots = g^{(n)}(a) = 0$. La fonction $g$ s'annule pour $x = a$ et $x = b$ et vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc $c_1 \in ]a, b[$ tel que $g'(c_1) = 0$.

La fonction $g'$ s'annule pour $x = a$ et $x = c_1$. D'après le théorème de Rolle, il existe alors $c_2 \in ]a, c_1[ \subset ]a, b[$ tel que $g''(c_2) = 0$.
De même, la fonction $g^{(n)}$ s'annule pour $x = a$ et $x = c_n \in ]a, b[$. Il existe donc $c \in ]a, b[$ tel que $g^{(n+1)}(c) = 0$, c'est-à-dire : $f^{(n+1)}(c) = K$ ce qui démontre le théorème.

*Remarque 1.* – On a supposé $a < b$ mais la démonstration est valable pour $a > b$, la seule modification étant le remplacement de l'intervalle $(a, b)$ par l'intervalle $(b, a)$.

*Remarque 2.* – On obtient un autre énoncé de la formule de Taylor en posant $b = a + h$ et en notant que tout nombre $c$ compris entre $a$ et $a + h$ s'écrit : $c = a + \theta h$ avec $\theta \in ]0, 1[$. La formule devient :

$$\boxed{\begin{aligned} f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) \\ + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h) \\ \text{avec } 0 < \theta < 1 \end{aligned}}$$

*Corollaire.* – **Si $f$ est de classe $C^n$ sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \beta]$ et admet une dérivée d'ordre $n + 1$ sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \beta[$, on a pour tout** $x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \beta]$ :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_1^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x_0 + \theta(x-x_0)]$$

**où $\theta$ est un nombre dépendant de $x$ et vérifiant** $0 < \theta < 1$.

Ceci traduit la formule de Taylor pour l'intervalle $]x_0, x[$.
Pour $x_0 = 0$, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(0) + x f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \\ + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \\ \text{avec } 0 < \theta < 1 \end{aligned}}$$

Cette formule est appelée **formule de Mac Laurin.**

*Remarque.* – Pour un polynôme $P$ de degré $n$, la dérivée d'ordre $n + 1$ est identiquement nulle et on obtient :

$$P(x) = P(0) + x P'(0) + \ldots + x^n \frac{P^{(n)}(0)}{n!} \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

### 8.1.2. Formule de Taylor – Young

En supposant que $f^{(n+1)}$ existe seulement au point $a$, on obtient la formule de Taylor Young ou formule de Taylor avec reste de Young.

*Théorème.* — **Si $f$ est une fonction numérique de classe $C^n$ sur $[a, a+h]$ et admet une dérivée d'ordre $n+1$ en $a$ :**

$$\boxed{\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + h f'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) \\ &\quad + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[ f^{(n+1)}(a) + \epsilon(h) \right] \\ &\quad \text{avec } \lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0 \end{aligned}}$$

Reprenons la démonstration de la formule de Taylor — Lagrange. On a obtenu :

$$g^{(n)}(c_n) = 0 \qquad \text{avec} \qquad c_n \in ]a, a+h[$$

Or : $\quad g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) - K(x-a)$

ce qui donne :

$$K = \frac{f^{(n)}(c_n) - f^{(n)}(a)}{c_n - a}$$

Lorsque $h$ tend vers 0, $c_n$ tend vers $a$. Comme $f$ est $(n+1)$ fois dérivable en $a$, $K$ tend vers $f^{(n+1)}(a)$ lorsque $h$ tend vers 0. On a donc :

$$K = f^{(n+1)}(a) + \epsilon(h)$$

ce qui démontre le théorème.

*Remarque.* — La formule de Taylor — Young est d'utilisation locale (c'est-à-dire pour $h$ petit) alors que la formule de Taylor — Lagrange est utilisable sur l'intervalle $[a, a+h]$ même si $h$ n'est pas petit.

**Exercices - Exemples**

**E$_1$** Trouver à l'aide de la formule de Mac Laurin pour la fonction exponentielle la limite de la suite de terme général :

$$u_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

*Ecrivons la formule de Mac Laurin d'ordre $n$ pour la fonction exponentielle :*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

*avec* $\quad 0 < \theta < 1.$

*Pour $x = -1$, on en déduit :*

$$\frac{1}{e} = u_n + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\theta}$$

*D'où :* $\qquad \left| u_n - \frac{1}{e} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}$

*c'est-à-dire :* $\quad \lim_{n \to \infty} u_n = \frac{1}{e}$

**E$_2$** Montrer que si $f$ est de classe $C^2$ sur $[a, b]$, il existe une constante $M$ telle que :

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| \leqslant M\,|h|$$

$$\forall x_0 \in ]a, b[ \qquad \forall (x_0+h) \in ]a, b[$$

Montrer que si $f$ est de classe $C^3$ sur $[a, b]$

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \right| \leqslant M' h^2$$

$$\forall x_0 \in ]a, b[ \qquad \forall (x_0 \pm h) \in ]a, b[$$

*Si $f$ est de classe $C^2$, on peut appliquer la formule de Taylor d'ordre 1 :*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0+\theta h)$$

*$f''$ étant continue sur $[a, b]$ est bornée (§ 1.7) et on a donc :*

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{h}{2} f''(x_0+\theta h) \right| \leqslant M\,|h|$$

*avec :* $\qquad M = \frac{1}{2} \max_{t \in [a,b]} |f''(t)|$

*De même, si $f$ est de classe $C^3$, on exprime $f(x_0+h)$ et $f(x_0-h)$ par la formule de Taylor d'ordre 2 et on obtient par différence :*

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2h f'(x_0) + \frac{h^3}{6}\left[ f'''(x_0+\theta h) + f'''(x_0-\theta' h) \right]$$

*avec* $\quad 0 < \theta < 1 \quad$ *et* $\quad 0 < \theta' < 1$

*On en déduit :*

$$\left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \right| \leqslant \frac{h^2}{6} \max_{t \in [a,b]} |f'''(t)|$$

**TESTS**

Ecrire la formule de Taylor – Young d'ordre 4 au point $x_0$ pour les fonctions suivantes :

**T₁** $f : x \longmapsto tg\, x \qquad x_0 = \frac{\pi}{4}$

**T₂** $g : x \longmapsto e^{\sin x} \qquad x_0 = 0$

**T₃** Montrer que la suite $(s_n)$ de terme général : $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et a pour limite $Log\ 2$.

**T₄** En supposant $f$ de classe $C^4$ sur $[a, b]$, montrer que :

$$\left| \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2} - f''(x_0) \right| \leqslant M h^2$$

$$\forall x_0 \in ]a, b[ \qquad \forall (x_0 \pm h) \in ]a, b[$$

**T₅** $f$ étant de classe $C^2$ sur $[a, b]$, on écrit pour $0 \leqslant h \leqslant b-a$ la formule des accroissements finis : $f(a+h) - f(a) = h f'(a+\theta h)$.
Si $f''(a) \neq 0$, déterminer la limite de $\theta$ quand $h$ tend vers 0.

**Réponses**

**T₁** $f(\frac{\pi}{4} + h) = 1 + 2h + 2h^2 + \frac{8}{3}h^3 + \frac{10}{3}h^4 + h^4 \epsilon(h)$

**T₂** $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4 \epsilon(x)$

**T₃** *La formule de Mac Laurin appliquée à la fonction* $x \longmapsto Log(1+x)$ *donne pour* $x = 1$ :

$$Log\ 2 = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}$$

*c'est-à-dire :* $\quad |s_n - Log\ 2| \leqslant \frac{1}{n+1}$

*D'où :* $\quad \lim_{n \to \infty} s_n = Log\ 2$

**T₄** $f(x_0+h) + f(x_0-h) = 2f(x_0)$

$$+ h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{24}[f^{(4)}(x_0+\theta h) + f^{(4)}(x_0-\theta' h)]$$

*D'où :* $\quad M = \frac{1}{12} \max_{t \in [a,b]} |f^{(4)}(t)|$

**T₅** $f(a+h) - f(a) = h f'(a+\theta h)$

$$= h[f'(a) + \theta h f''(a+\theta_1 \theta h)]$$

*Or :* $f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{h^2}{2}[f''(a) + \epsilon(h)]$

*D'où :* $\quad \theta = \frac{f''(a) + \epsilon(h)}{2 f''(a + \theta_1 \theta h)}$

*Donc si* $f''(a) \neq 0$ : $\quad \lim_{h \to 0} \theta = \frac{1}{2}$

## 8.2. Applications de la formule de Taylor

### 8.2.1. Calcul approché des valeurs d'une fonction

Si $f$ vérifie sur $[x_0, x_0+h]$ les conditions d'application de la formule de Taylor, on a :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta h)$$

En supposant $f^{(n+1)}$ bornée sur $[x_0, x_0+h]$, on peut prendre pour valeur approchée de $f(x_0+h)$ le nombre :

$$y = f(x_0) + h f'(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

l'erreur commise étant majorée par :

$$\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t \in [x_0, x_0+h]} |f^{(n+1)}(t)|$$

Dans le cas où $f^{(n+1)}$ garde un signe constant sur $[x_0, x_0+h]$, on peut en outre préciser si $y$ est une valeur approchée de $f(x_0+h)$ par défaut ou par excès.

### 8.2.2. Démonstration d'inégalités

En majorant ou en minorant le reste dans la formule de Taylor – Lagrange, on démontre des inégalités.
Par exemple, pour la fonction $x \longmapsto \cos x$, on a :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \cos \theta x \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1$$

Mais pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ : $\quad 0 < \cos \theta x \leqslant 1$

D'où l'on déduit pour $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ :

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

### 8.2.3. Ordre de multiplicité des racines d'une équation

Si la fonction $f$ s'annule pour $x = x_0$ et s'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $f(x) = (x-x_0)^p\, g(x)$ avec $g(x_0) \neq 0$, on dit que $x_0$ est **racine d'ordre $p$ de l'équation $f(x) = 0$** ou **zéro d'ordre $p$ de la fonction $f$.**
On dit aussi racine simple si $p = 1$, racine double si $p = 2$ . . .

Il n'est pas toujours possible de définir l'ordre d'une racine. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ s'annule pour $x = 0$ mais pour tout entier $p \geqslant 1$ : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^p}$ tend vers l'infini quand $x$ tend vers $0^+$.

*Propriété.* – **Si $f$ est de classe $C^{p-1}$ dans un voisinage de $x_0$ et admet une dérivée d'ordre $p$ en $x_0$, $x_0$ est un zéro d'ordre $p$ de $f$ si et seulement si :**

$$f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(p-1)}(x_0) = 0$$
$$f^{(p)}(x_0) \neq 0$$

En effet, d'après la formule de Taylor – Young, on a :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{1}^{p-1} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^p}{p!} [\, f^{(p)}(x_0) + \epsilon(x-x_0)\, ]$$

avec : $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \epsilon(x-x_0) = 0$

L'ordre du zéro apparaît donc dans ce cas comme l'ordre de la première dérivée non nulle pour $x = x_0$.

**Exercices - Exemples**

$\boxed{E_3}$ Calculer une valeur approchée à $10^{-5}$ près de *sin* 47°.

*La formule de Taylor d'ordre n pour la fonction $f : x \longmapsto \sin x$ s'écrit :*

$$\sin(\frac{\pi}{4} + h) = f(\frac{\pi}{4}) + h f'(\frac{\pi}{4}) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\frac{\pi}{4}) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\frac{\pi}{4} + \theta h)$$

*En prenant $h = \dfrac{\pi}{90}$, l'erreur commise en négligeant le dernier terme vaut :*

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \,|\, f^{(n+1)}(\frac{\pi}{4} + \theta h) \,|\, \leqslant \frac{1}{(n+1)!} (\frac{\pi}{90})^{n+1} = \epsilon_n$$

*car on a :* $\quad f^{(n+1)}(x) = \sin[\, x + (n+1) \dfrac{\pi}{2}\,]$

*On obtient :* $\quad \epsilon_1 \cong 6.10^{-4} \quad$ *et* $\quad \epsilon_2 \cong 7.10^{-6}$

*On prend $n = 2$ et on obtient une valeur approchée de sin 47° par excès car $f'''(x) = -\cos x \leqslant 0$ sur $[\,0, \frac{\pi}{2}\,]$ :*

$$y = \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90}\cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{90})^2 \sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{90\sqrt{2}} - \frac{\pi^2}{16200\sqrt{2}}$$

*Si on calcule chacun des trois termes de y avec une erreur inférieure à $\epsilon'$, on obtiendra une valeur approchée de sin 47° avec une erreur inférieure à $\epsilon_2 + 3\,\epsilon' = 3\,\epsilon' + 7.10^{-6}$. Pour obtenir sin 47° à $10^{-5}$ près, il faut prendre $\epsilon' < 10^{-6}$. Si de plus, on calcule les deux premiers termes de y à $10^{-6}$ près par excès et le dernier terme à $10^{-6}$ près par défaut, on obtiendra une valeur approchée de sin 47° par excès.*
*On obtient : sin 47° = 0,731360 à $10^{-5}$ près par excès.*

$\boxed{E_4}$ Montrer que :

$$e^x > \frac{x^n}{n!} \qquad \forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \forall x \in \mathbf{R}_+$$

En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

*La formule de Mac Laurin d'ordre n pour la fonction exponentielle s'écrit :*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}$$

*avec :* $\quad 0 < \theta < 1$

*D'où, pour $x \geqslant 0$ :* $\quad e^x > \dfrac{x^n}{n!}$

*Pour $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, soit p entier tel que $p > \alpha$. On a alors pour $x > 0$ :*

$$\frac{e^x}{x^\alpha} > \frac{1}{p!}\frac{x^p}{x^\alpha} = \frac{1}{p!}x^{p-\alpha}$$

$p > \alpha$ entraîne $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p-\alpha} = +\infty$

*et donc :* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

*On retrouve ainsi la propriété démontrée au § 5.4.2.*

**TESTS**

Démontrer les inégalités suivantes :

**T6** $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ $\quad \forall x \in [\,0, \pi\,]$

**T7** $\operatorname{tg} x \geqslant x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$ $\quad \forall x \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,[$

**T8** $\frac{x}{x^2+1} \leqslant \operatorname{Arc\,tg} x \leqslant x$ $\quad \forall x \in \mathbf{R}_+$

**T9** Calculer *Log* 1,02 à $10^{-7}$ près.

**T10** Déterminer à l'aide de la formule de Mac Laurin une approximation de *cos x* sur l'intervalle $[\,-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\,]$ avec une erreur inférieure à $10^{-3}$.

**T11** Pour quelles valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbf{R}$ l'équation : $x^3 - 6x^2 + 9x + \lambda = 0$ a-t-elle une racine double ? Résoudre l'équation dans ce cas.

**T12** 1) Ecrire la formule de Mac Laurin à l'ordre $q$ pour la fonction exponentielle.
2) Montrer que $e$ est irrationnel : en supposant $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$, on montrera en multipliant par $q!$ que la formule précédente conduit à une impossibilité.

**Réponses**

**T6** $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\sin(\theta x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}$ $\quad \forall x \in [\,0, \pi\,]$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720}\sin(\theta' x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \quad \forall x \in [\,0, \pi\,]$$

**T7** *Pour $x \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,[$, les dérivées de la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{tg} x$ ont des valeurs positives ou nulles. D'où :*

$$f(x) - [\,f(0) + x f'(0) + \ldots + \frac{x^5}{5!} f^{(5)}(0)\,]$$
$$= \frac{x^6}{6!} f^{(6)}(\theta x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,[$$

*ce qui donne :*

$$\operatorname{tg} x \geqslant x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \qquad \forall x \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,[$$

**T8** $\operatorname{Arc\,tg} x = x + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{(-2\theta x)}{(1+\theta^2x^2)^2} \leqslant x$ $\quad \forall x \in \mathbf{R}_+$

$$(1+x^2)\operatorname{Arc\,tg} x = x + $$
$$+ \frac{x^2}{2}[\,2\operatorname{Arc\,tg}(\theta x) + \frac{2\theta x}{1+\theta^2x^2}\,] \geqslant x \quad \forall x \in \mathbf{R}_+$$

**T9** $\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$$+ \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

*Pour $x = 0{,}02$ le reste est inférieur à* $\epsilon_n = \frac{(0{,}02)^{n+1}}{n+1}$

*On a :* $\epsilon_2 = \frac{8}{3}10^{-6}$ *et* $\epsilon_3 = 4.\,10^{-8}$

*On prend pour valeur approchée :*

$$0{,}02 - \frac{(0{,}02)^2}{2} + \frac{(0{,}02)^3}{3}$$

*valeur approchée par excès car la dérivée quatrième a des valeurs négatives. On calcule les deux premiers termes exactement et le troisième à $10^{-8}$ près par excès ce qui donne :*

*Log 1,02 = 0,01980267 à $10^{-7}$ près par excès*

**T10** $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$$+ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(\theta x)$$

*Si $x \in [\,-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\,]$, le reste est majoré par :*

$$\epsilon_n = \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}$$

On a : $\epsilon_3 = 4{,}7\ 10^{-3}$ et $\epsilon_4 = 1{,}6\ 10^{-4}$

Donc : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$

à $0{,}16\ 10^{-3}$ près sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

On peut aussi écrire la formule de Mac Laurin à l'ordre $2n+1$ au lieu de $2n$. Seul le reste est modifié et on a :

$$\epsilon'_n = \frac{1}{(2n+2)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2}$$

ce qui donne $\epsilon'_3 = 0{,}92\ 10^{-3}$. On obtient ainsi une meilleure majoration du reste ce qui conduit à prendre un terme de moins dans le polynôme d'approximation :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

à $0{,}92\ 10^{-3}$ près sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

**$T_{11}$** Une racine double a de l'équation $f(x) = 0$ vérifie $f(a) = f'(a) = 0$ et $f''(a) \neq 0$. On a donc : $a^3 - 6a^2 + 9a + \lambda = 0$ et $3a^2 - 12a + 9 = 0$.

$a = 1$ donne $\lambda = -4$. L'équation a alors pour racines 1, 1, 4.

$a = 3$ donne $\lambda = 0$. L'équation a alors pour racines 3, 3, 0.

**$T_{12}$** 1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^q}{q!}$

$$+ \frac{x^{q+1}}{(q+1)!} e^{\theta x} \qquad 0 < \theta < 1$$

2) Si $e = \frac{p}{q}$, on obtient pour $x = 1$ :

$$\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!} + \frac{e^\theta}{(q+1)!}$$

En multipliant par $q!$, on en déduit que $\frac{e^\theta}{q+1}$ est un entier. Mais e n'étant pas entier, on a $q \geqslant 2$ et donc :

$$0 < \frac{e^\theta}{q+1} < \frac{e}{3} < 1$$

ce qui est impossible si $\frac{e^\theta}{q+1}$ est un entier.