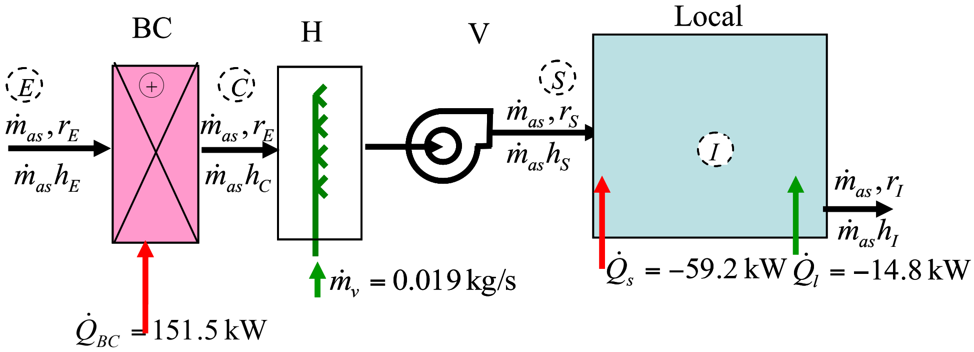
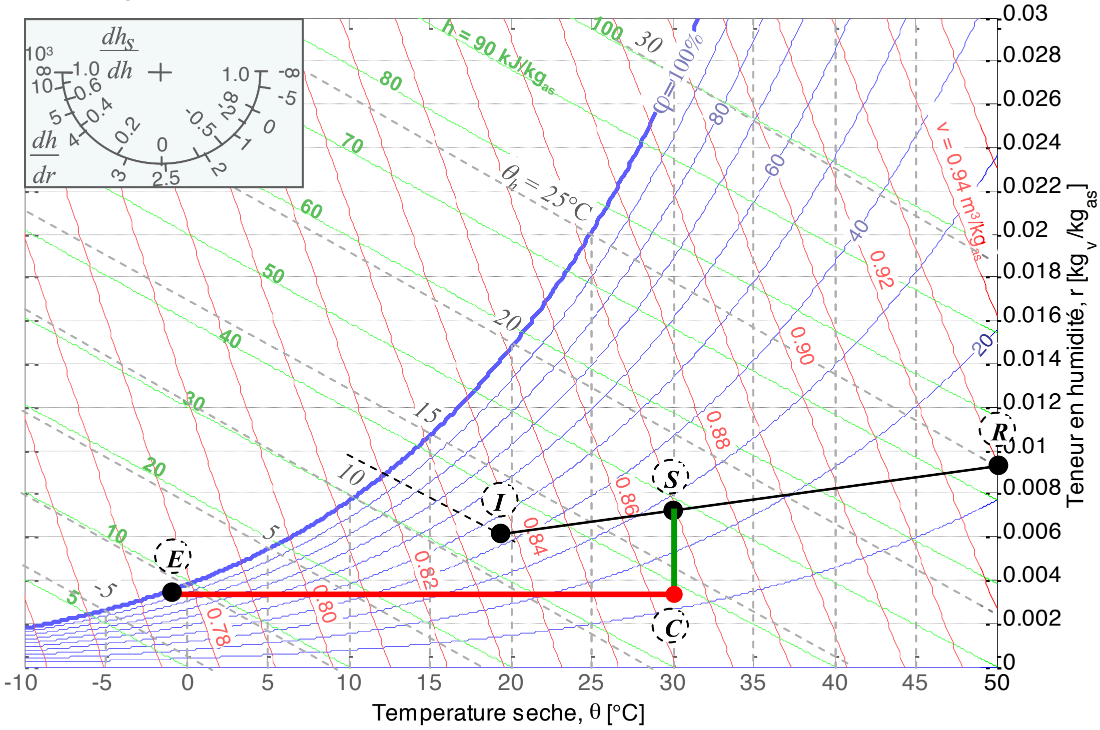
4CGU — Ex. 7.4 Climatisation d'hiver (air neuf et mélange)

1 Tout air neuf, humidification par injection de vapeurs





Caractéristique de l'air intérieur

$\theta_I = 18\,°\mathrm{C}$, $\theta_{hI} = 12\,°\mathrm{C}$

$\Rightarrow$

$\varphi_I = 49\,\%$

$r_I = 6.22 \cdot 10^{-3}$ kg/kg$_{as}$

$h_I = 33.86$ kJ/kg$_{as}$

Droite de soufflage

Point de référence

$\theta_R = 50\,°\mathrm{C}$

$$r_R = r_I + \frac{\dot{Q}_l}{\dot{Q}_s} \cdot \frac{c_{as}}{l_v}(\theta_R - \theta_I)$$

$$= 6.22 \cdot 10^{-3} + \frac{-14.8}{-59.2} \cdot \frac{1}{2500}(50 - 18)$$

$$= 9.42 \cdot 10^{-3} \text{ kg/kg}_{as}$$

Point de soufflage (point S)

$\theta_S = 30\,°\mathrm{C}$

$$r_S = r_I + \frac{\dot{Q}_l}{\dot{Q}_s} \cdot \frac{\mathrm{c}_{as}}{\mathrm{l}_v}(\theta_S - \theta_I)$$

$$= 6.22 \cdot 10^{-3} + \frac{14.8}{-59.2} \cdot \frac{1}{2500}(30 - 18)$$

$$= 7.42 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/kg}_{as}$$

$h_S = 49.14\ \mathrm{kJ/kg}_{as}$

Air extérieur (point E)

$\theta_E = -1\,°\mathrm{C};\ \varphi_E = 100\,\%$

$\Rightarrow$

$r_E = 3.5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/kg}_{as}$

$h_E = 7.8\ \mathrm{kJ/kg}_{as}$

Point à la sortie de la batterie de chauffage (point C)

$\theta_C = \theta_S = 30\,°\mathrm{C}$

$r_C = r_E = 3.5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/kg}_{as}$

$\Rightarrow$

$h_C = 39.1\ \mathrm{kJ/kg}_{as}$

Débit massique d'air sec

Bilan d'énergie du local :

$\dot{Q}_s + \dot{Q}_l + \dot{m}_{as}(h_S - h_I) = 0$

$\Rightarrow$

$$\dot{m}_{as} = -\frac{\dot{Q}_s + \dot{Q}_l}{h_S - h_I}$$

$$= -\frac{-59.2 - 14.8}{49.14 - 33.86}$$

$$= 4.84\ \mathrm{kg}_{as}/\mathrm{s}$$

Puissance de la batterie chaude

$\dot{Q}_{BC} = \dot{m}_{as}(h_C - h_E)$

$= 4.84 \times (39.1 - 7.8)$

$= 151.5\ \mathrm{kW}$

Débit massique des vapeurs

$\dot{m}_v = \dot{m}_{as}(r_S - r_C)$

$= 4.84 \times (7.42 - 3.5) \cdot 10^{-3}$

$= 0.019\ \mathrm{kg/s}$

Puissance du bouilleur

$P_H = \dot{m}_v h_v = \dot{m}_v(\mathrm{l}_v + \mathrm{c}_v\theta) \cong \dot{m}_v \mathrm{h}_v$

$P_H = \dot{m}_v(\mathrm{l}_v + \mathrm{c}_v\theta)$

$= 0.019 \times (2495 + 1.96 \times 100)$

$= 51.13\ \mathrm{kW}$

$P_H \cong \dot{m}_v \mathrm{h}_v$

$= 0.019 \times 2500$

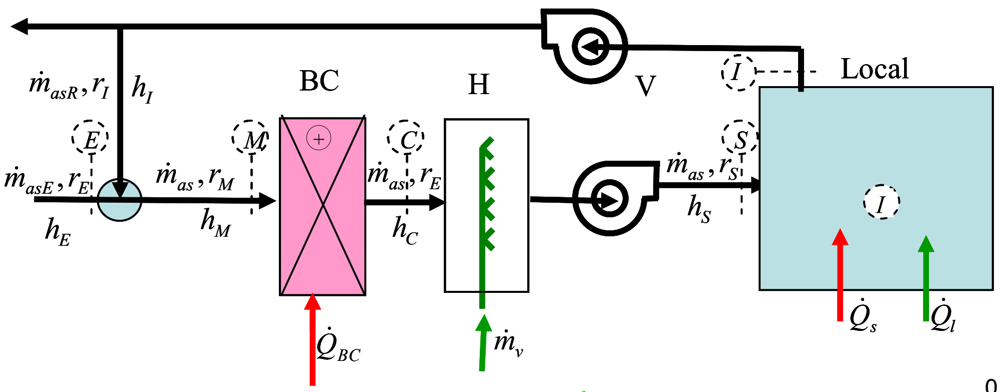
$= 47.5\ \mathrm{kW}$

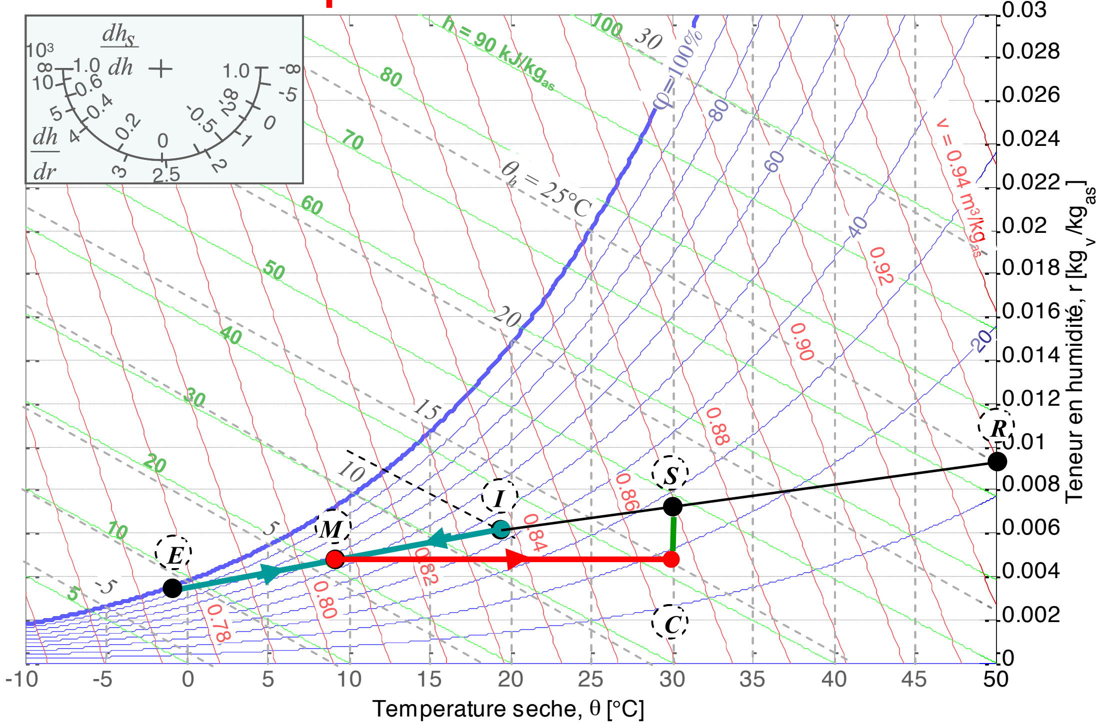
Puissance totale :

$\dot{Q}_{BC} + P_H = 151.5 + 47.5$

$= 199\ \mathrm{kW}$

2) Mélange avec l'air recyclé, humidification par injection de vapeurs





Droite et point de soufflage identiques avec le cas "tout air neuf".

Point de mélange

Le débit d'air sec est le même que dans le cas 1 et les débits d'air extérieur et d'air recyclé sont égaux. Il en résulte que :

$$\dot{m}_{asE} = \dot{m}_{asR} = 0.5\dot{m}_{as}$$

Le point de mélange a les paramètres :

$$h_M = \frac{\dfrac{\dot{m}_{asE}}{\dot{m}_{asR}} h_E + h_I}{\dfrac{\dot{m}_{asE}}{\dot{m}_{asI}} + 1} = \frac{h_E + h_I}{2}$$

$$= \frac{7.8 + 33.8}{2}$$

$$= 20.8 \text{ kJ/kg}_{as}$$

$$\theta_M = \frac{\frac{\dot m_{asE}}{\dot m_{asR}}\theta_E + \theta_I}{\frac{\dot m_{asE}}{\dot m_{asI}} + 1} = \frac{\theta_E + \theta_I}{2}$$

$$= \frac{-1+18}{2}$$

$$= 8.5\,°\mathrm{C}$$

$$r_M = \frac{\frac{\dot m_{asE}}{\dot m_{asR}} r_E + r_I}{\frac{\dot m_{asE}}{\dot m_{asI}} + 1} = \frac{r_E + r_I}{2}$$

$$= \frac{0.0035 + 0.00622}{2}$$

$$= 4.86 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/kg}_{as}$$

L'enthalpie du point C :

$$h_C\Big|_{r=r_M=0.00486,\theta=\theta_s=30} = 42.6 kJ/kg_{as}$$

Puissance de la batterie de chauffage

$$\dot Q_{BC} = \dot m_{as}(h_C - h_M)$$

$$= 4.84 \times (42.6 - 20.8)$$

$$= 105.5\ \mathrm{kW}$$

Débit massique des vapeurs

$$\dot m_v = \dot m_{as}(r_S - r_C)$$

$$= 4.84 \times (7.42 - 4.86) \cdot 10^{-3}$$

$$= 0.0124\ \mathrm{kg/s}$$

Puissance du bouilleur

$$P_H = \dot m_v h_v = \dot m_v(\mathrm{l}_v + \mathrm{c}_v\theta) \cong \dot m_v \mathrm{h}_v$$

$$P_H = \dot m_v(\mathrm{l}_v + \mathrm{c}_v\theta)$$

$$= 0.0124 \times (2495 + 1.96 \times 100)$$

$$= 33.4\ \mathrm{kW}$$

Puissance totale :

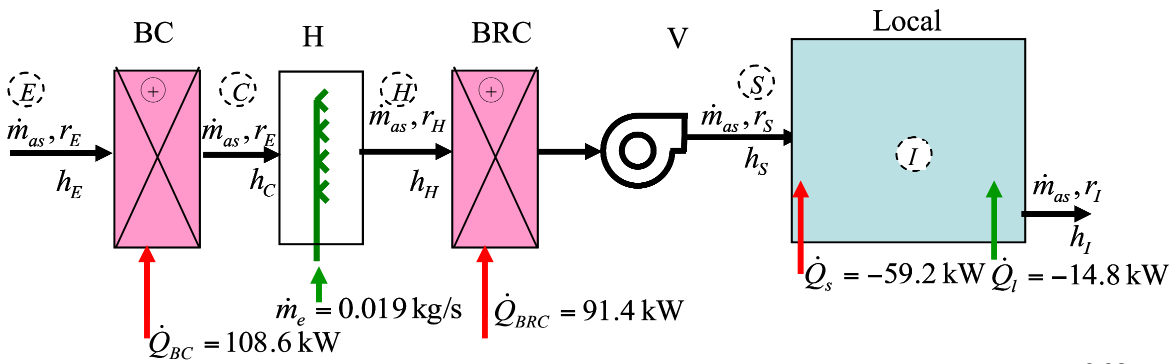
$$\dot Q_{BC} + P_H = 105.5 + 33.5$$

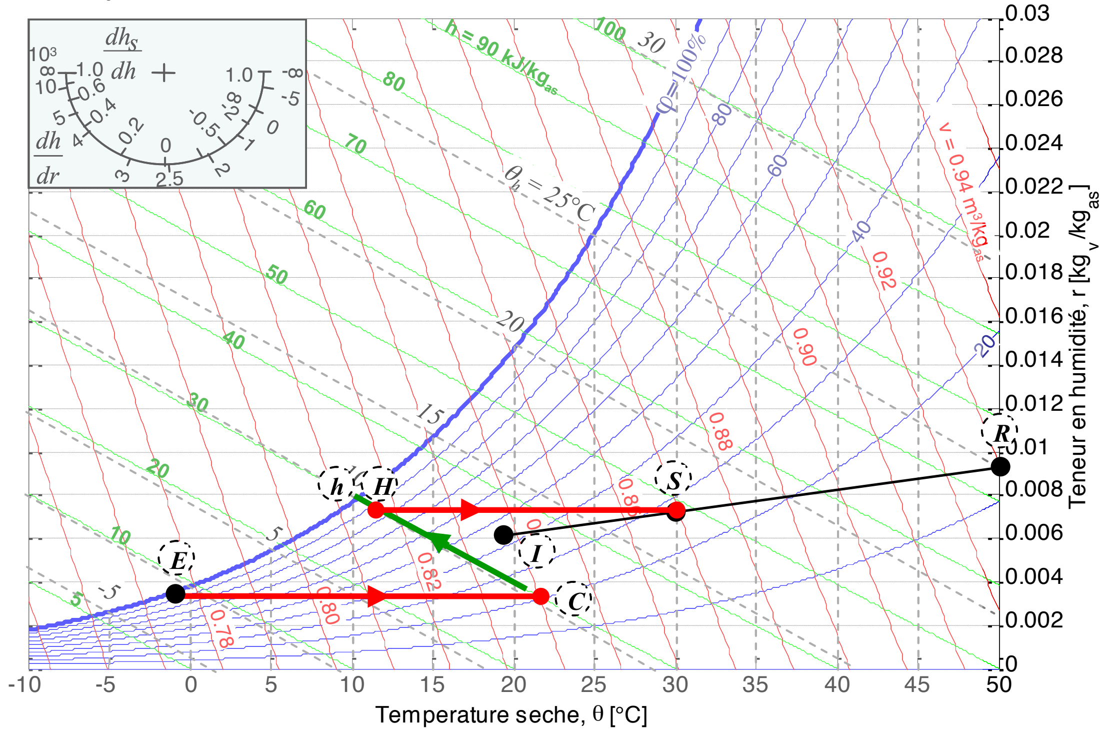
$$= 139\ \mathrm{kW}$$

A comparer avec la puissance de 199 kW du cas "tout air neuf

---

3. Tout air neuf avec humidification par pulvérisation d'eau





Efficacité de l'humidificateur est :

$$\varepsilon = \frac{r_H - r_C}{r_h - r_C} = \frac{\theta_H - \theta_C}{\theta_h - \theta_C} = 0.9$$

Point de soufflage (S) : comme ci-dessus

$\theta_S = 30\ °\text{C}$

$r_S = 7.42 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/kg}_{as}$

$h_S = 49.14\ \text{kJ/kg}_{as}$

Point C

$r_C = r_E = 3.5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/kg}_{as}$

$r_H = r_S = 7.42 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/kg}_{as}$

La teneur en humidité de la fraction de l'air saturé est :

$$r_h = r_C + \frac{r_H - r_C}{\varepsilon}$$

$$= \left(3.5 + \frac{7.42 - 3.5}{0.9}\right) \cdot 10^{-3}$$

$$= 7.85 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/kg}_{as}$$

L'enthalpie correspondant à l'humidification adiabatique est :

$$h_H\Big|_{r_h = 0.00785, \varphi = 100\%} = 30.25\ \text{kJ/kg}_{as}$$

Le point C :

$$\theta_C\Big|_{h=30.25, r=0.0035} = 21.23\ °\text{C}$$
$$h_C = h_H = 30.25\ \text{kJ/kg}_{as}$$

Température du point H :

$$\theta_H\Big|_{h=30.25, r=0.0074} = 11.47\ °\text{C}$$

Puissance des batteries de chauffage

Batterie de préchauffage

$$\dot{Q}_{BC} = \dot{m}_{as}(h_C - h_E)$$
$$= 4.84 \times (30.25 - 7.8)$$
$$= 108.66\ \text{kW}$$

Batterie de réchauffage :

$$\dot{Q}_{BRC} = \dot{m}_{as}(h_S - h_H)$$
$$= 4.84 \times (49.14 - 30.35)$$
$$= 91.43\ \text{kW}$$

Puissance totale de chauffage :

$$\dot{Q}_{BC} + \dot{Q}_{BRC} = 108.66 + 91.43$$
$$= 200\ \text{kW}$$

égale au cas antérieur.

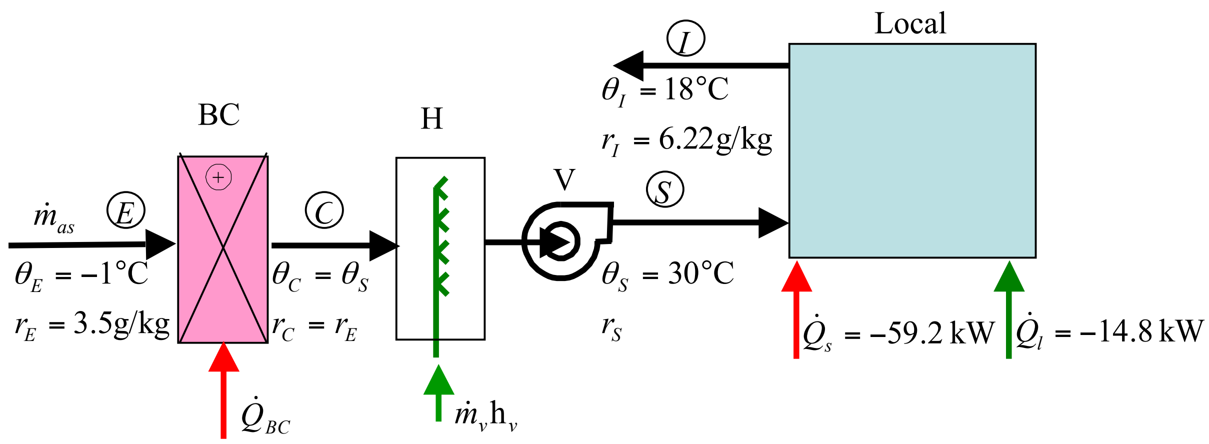
Débit d'eau injecté

$$\dot{m}_e = \dot{m}_{as}(r_H - r_C)$$
$$= 4.84 \times (7.42 - 3.5) \cdot 10^{-3}$$
$$= 0.019\ \text{kg/s}$$

égal au débit de vapeurs injecté.

Approche en utilisant l'algèbre linéaire

1 Tout air neuf, humidification par injection de vapeurs



Les équations de bilan pour le local, la batterie de chauffage et l'humidificateur :

$$\dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_S \\ r_S \end{bmatrix} - \dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_I \\ r_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{Q}_s \\ \dot{Q}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_E \\ r_E \end{bmatrix} - \dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_S \\ r_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{Q}_{BC} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_S \\ r_E \end{bmatrix} - \dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_S \\ r_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{m}_v h_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Connues : $c_{as} = 1$ kJ/kg , $l_v = 2496$ kJ/kg

$\theta_S = 30°C$, $\theta_I = 18°C$, $r_I\big|_{\theta_I = 18°C;\, \theta_{hI} = 12°C} = 6.22 \cdot 10^{-3}$ kg/kg$_{as}$

$\theta_E = -1°C$, $r_E\big|_{\theta_E = -1°C;\, \varphi_E = 100\%} = 3.5 \cdot 10^{-3}$ kg/kg$_{as}$

$\dot{Q}_s = -59.2$ kW , $\dot{Q}_l = -14.8$ kW

4 inconnues : r_S , $\dot{Q}_{BC}$, $\dot{m}_v$, $\dot{m}_{as}$

4 équations (les équations 4 et 5 n'apportent rien) non-linéaires à cause du produit $\dot{m}_{as} r_S$

Considérons les inconnues : $\dot{m}_{as} r_S$, $\dot{Q}_{BC}$, $\dot{m}_v$, $\dot{m}_{as}$, le système d'équations devient :

$$\begin{cases} & & & c_{as}(\theta_S - \theta_I)\dot{m}_{as} & = -\dot{Q}_s \\ l_v \dot{m}_{as} r_S & & & - l_v r_I \dot{m}_{as} & = -\dot{Q}_l \\ & \dot{Q}_{BC} & & + c_{as}(\theta_E - \theta_S)\dot{m}_{as} & = 0 \\ - l_v \dot{m}_{as} r_S & & + h_v \dot{m}_v & + l_v r_E \dot{m}_{as} & = 0 \end{cases}$$

ou, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c_{as}(\theta_S - \theta_I) \\ l_v & 0 & 0 & -l_v r_I \\ 0 & 1 & 0 & c_{as}(\theta_E - \theta_S) \\ -l_v & 0 & h_v & l_v r_E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{m}_{as} r_S \\ \dot{Q}_{BC} \\ \dot{m}_v \\ \dot{m}_{as} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{Q}_s \\ -\dot{Q}_l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En résolvant ce système on obtient :

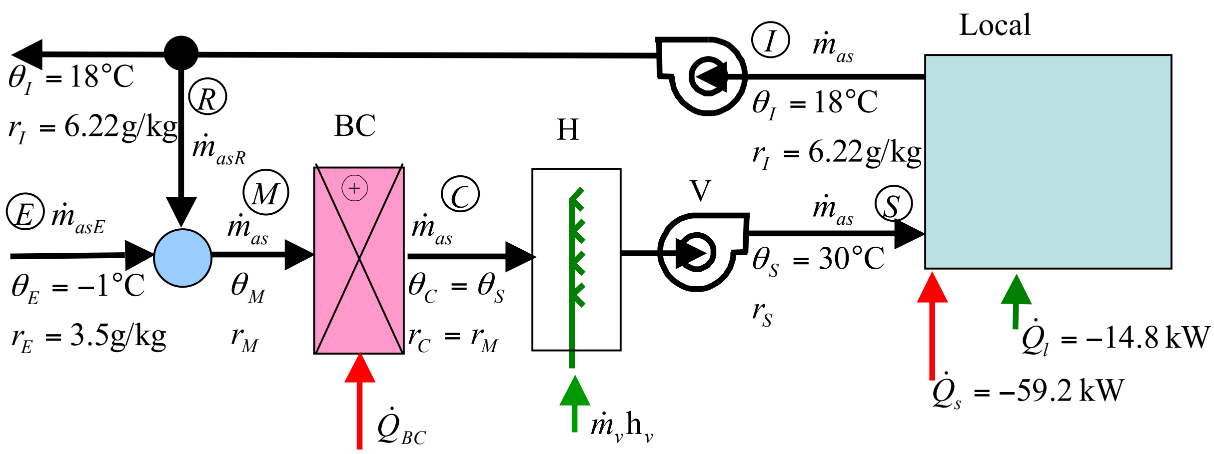
$$\begin{bmatrix} \dot{m}_{as} r_S \\ \dot{Q}_{BC} \\ \dot{m}_v \\ \dot{m}_{as} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.036617 \\ 152.93 \\ 0.019312 \\ 4.9333 \end{bmatrix} ; \begin{matrix} \dot{Q}_{BC} = 152.93 \text{ kW} \\ \dot{m}_v = 0.019312 \text{ kg/s} \\ \dot{m}_{as} = 4.9333 \text{ kg/s} \end{matrix}$$

et $r_S = 0.36617 / 4.9333 = 7.42 \cdot 10^{-3}$ kg/kg$_{as}$

Les réponses :

1. le point de soufflage : $\theta_S = 30°\text{C}$, $r_S = 7.42$ g/kg
2. le point à la sortie de la batterie chaude : $\theta_C = \theta_S = 30°\text{C}$, $r_C = r_E = 3.5$ g/kg
3. la puissance le la batterie de chauffage : $\dot{Q}_{BC} = 152.93$ kW
4. le débit de vapeur d'eau injecté par l'humidificateur : $\dot{m}_v = 0.019351$ kg/s
5. la puissance totale consommée pour chauffer l'air et obtenir les vapeurs :
   $P = \dot{Q}_{BC} + \dot{m}_v h_v = 152.93 \text{ kW} + 0.019312 \times 2500 \text{ kW} = 201.21 \text{ kW}$

2) Mélange avec l'air recyclé, humidification par injection de vapeurs



Les équations de bilan pour le local, la boîte de mélange, la batterie de chauffage et l'humidificateur :

$$\dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_S \\ r_S \end{bmatrix} - \dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_I \\ r_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{Q}_s \\ \dot{Q}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{local}$$

$$\dot{m}_{asE}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_E \\ r_E \end{bmatrix} + \dot{m}_{asR}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_I \\ r_I \end{bmatrix} - \dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_M \\ r_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{mélange}$$

$$\dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_M \\ r_M \end{bmatrix} - \dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_S \\ r_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{Q}_{BC} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{chauffage}$$

$$\dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_S \\ r_M \end{bmatrix} - \dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_S \\ r_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{m}_v h_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{humidif. vap.}$$

Connues : $c_{as} = 1$ kJ/kg , $l_v = 2495$ kJ/kg

$\theta_S = 30°C$, $\theta_I = 18°C$, $r_I\big|_{\theta_I = 18°C;\, \theta_{hI} = 12°C} = 6.22 \cdot 10^{-3}$ kg/kg$_{as}$

$\theta_E = -1°C$, $r_E\big|_{\theta_E = -1°C;\, \varphi_E = 100\%} = 3.5 \cdot 10^{-3}$ kg/kg$_{as}$

$\dot{Q}_s = -59.2$ kW , $\dot{Q}_l = -14.8$ kW

$\dot{m}_{asE} = \dot{m}_{asR} = 0.5\dot{m}_{as}$

6 inconnues : r_S, θ_M, r_M, $\dot{Q}_{BC}$, $\dot{m}_v$, $\dot{m}_{as}$

6 équations (les équations 6 et 7 n'apportent rien) non-linéaires à cause des produits : $\dot{m}_{as} r_S$, $\dot{m}_{as}\theta_M$, $\dot{m}_{as} r_M$.

Considérons les inconnues : : $\dot{m}_{as} r_S$, $\dot{m}_{as}\theta_M$, $\dot{m}_{as} r_M$, $\dot{Q}_{BC}$, $\dot{m}_v$, $\dot{m}_{as}$, le système d'équations devient :

$$\begin{cases} & & & & & c_{as}(\theta_S-\theta_I)\cdot\dot m_{as} & = -\dot Q_s \\ l_v\cdot\dot m_{as}r_S & & & & & -l_v r_I\cdot\dot m_{as} & = -\dot Q_l \\ & -\dot m_{as}\theta_M & & & & +0.5(\theta_E+\theta_I)\cdot\dot m_{as} & = 0 \\ & & -\dot m_{as}r_M & & & +0.5(r_E+r_I)\cdot\dot m_{as} & = 0 \\ & c_{as}\cdot\dot m_{as}\theta_M & & +\dot Q_{BC} & & -c_{as}\theta_S\cdot\dot m_{as} & = 0 \\ -l_v\cdot\dot m_{as}r_S & & l_v\cdot\dot m_{as}r_M & & +\dot m_v h_v & & = 0 \end{cases}$$

ou, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{as}(\theta_S-\theta_I) \\ l_v & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_v r_I \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0.5(\theta_E+\theta_I) \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0.5(r_E+r_I) \\ 0 & c_{as} & 0 & 1 & 0 & -c_{as}\theta_S \\ -l_v & 0 & l_v & 0 & h_v & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot m_{as}r_S \\ \dot m_{as}\theta_M \\ \dot m_{as}r_M \\ \dot Q_{BC} \\ \dot m_v \\ \dot m_{as} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot Q_s \\ -\dot Q_l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En résolvant ce système, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot m_{as}r_S \\ \dot m_{as}\theta_M \\ \dot m_{as}r_M \\ \dot Q_{BC} \\ \dot m_v \\ \dot m_{as} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.036617 \\ 41.933 \\ 0.023976 \\ 106.07 \\ 0.012616 \\ 4.9333 \end{bmatrix} \text{; c. à d. } \begin{array}{ll} \dot Q_{BC} = 106.07\ \text{kW} & r_S = 0.036617/4.9333 = 7.4224\ \text{g/kg} \\ \dot m_v = 0.0126\ \text{kg/s}\ \text{ et } & \theta_M = 41.933/4.9333 = 8.5\ \text{°C} \\ \dot m_{as} = 4.9333\ \text{kg/s} & r_M = 4.9333/4.9333 = 4.86\ \text{g/kg} \end{array}$$

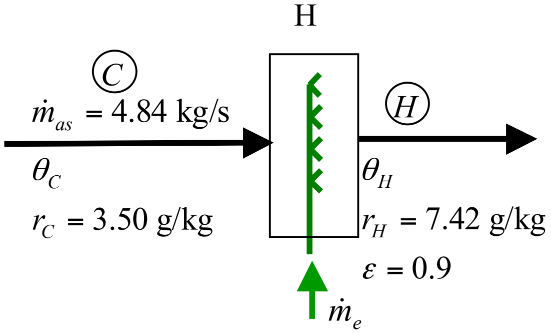
Réponses :

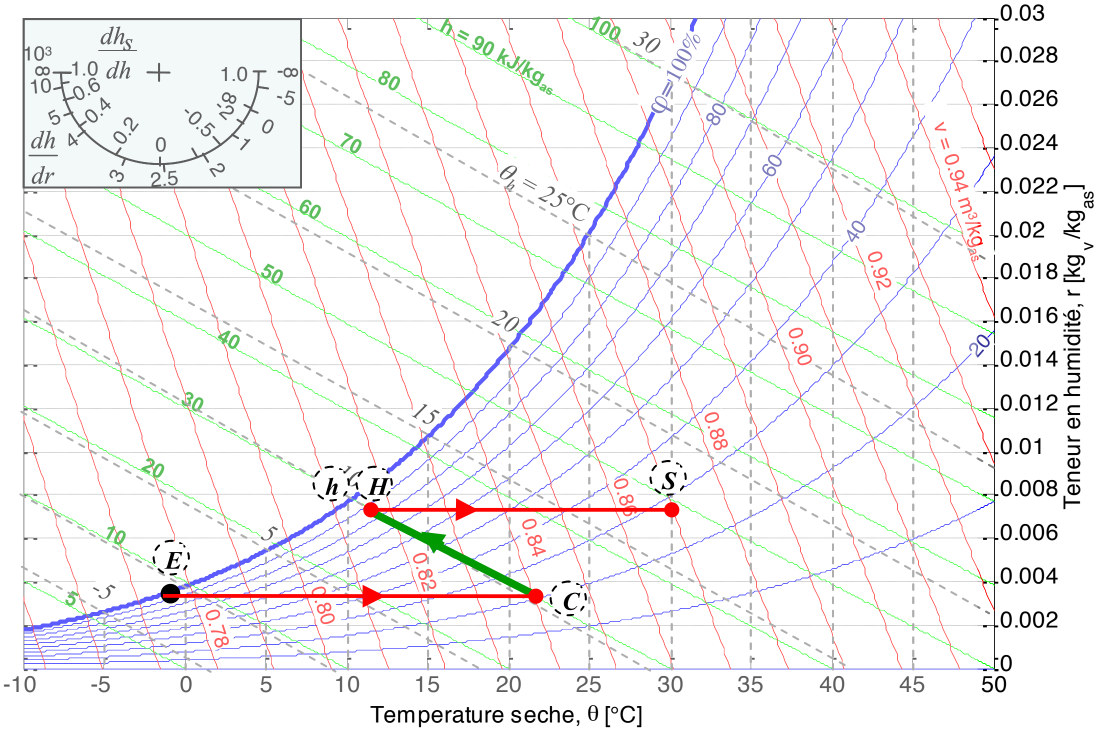
1. la température de mélange $\theta_M = 8.5$ °C, $r_M = 4.86$ g/kg
2. la puissance de la batterie de chauffage $\dot Q_{BC} = 106.07$ kW
3. le débit de vapeur $\dot m_v = 0.0126$ kg/s
4. la puissance totale consommée pour chauffer l'air et obtenir les vapeurs :

$$P = \dot Q_{BC} + \dot m_v h_v = 106.07\ \text{kW} + 0.0126\times 2500\ \text{kW} = 137.57\ \text{kW}$$

3. Tout air neuf avec humidification par pulvérisation d'eau

Equations de l'humidificateur adiabatique





Considérons que l'humidificateur est adiabatique. La transformation de l'air dans cet humidificateur se fait entre $r_E = r_C = 3.50 \cdot 10^{-3}$ kg$_v$/kg et $r_H = r_S = 7.42 \cdot 10^{-3}$ kg$_v$/kg. Pour la pression partielle de vapeur saturante, on peut utiliser la formule

$p_{vs} = \exp(C_1/T + C_2 + C_3 T + C_4 T^2 + C_5 T^3 + C_6 \ln T)$ [Pa] où T [K] est la température ou:

$p_{vs} = 610.78 \exp\left(\dfrac{17.2694\,\theta_h}{\theta_h + 238.3}\right)$ [Pa], où θ_h [°C] est la température.

La teneur en humidité à la saturation est $r_h = f(\theta_h)$, où

$$f(\theta_h) = \frac{M_v}{M_{as}} \frac{p_{vs}}{p - p_{vs}}$$, avec $M_v = 18$ kg/kmol, $M_{as} = 28.9645$ kg/kmol, $p = 101.325 \cdot 10^3$ Pa

La transformation de l'air dans l'humidificateur est caractérisée par les équations :
$r_h = f(\theta_h)$ c. à d. le point $[\theta_h \quad r_h]^T$ est sur la courbe de saturation ($\varphi = 100\%$) ;
$\begin{bmatrix}\theta_H \\ r_H\end{bmatrix} = \varepsilon\begin{bmatrix}\theta_h \\ r_h\end{bmatrix} + (1-\varepsilon)\begin{bmatrix}\theta_C \\ r_C\end{bmatrix}$ c. à d. le point $H = [\theta_H \quad r_H]^T$ est sur la droite [*h C*].
Comme $0 \le \varepsilon \le 1$, le point *H* est entre le point *h* et le point *C* ; si $\varepsilon = 1$, le point *H* est dans le point *h* ; si $\varepsilon = 0$ le point *H* est dans le point *C*.

Le fait que les points *h* et *C* ont la même enthalpie s'écrit :
$c_{as}\theta_h + l_v r_h = c_{as}\theta_C + l_v r_C$
et le fait que les point *h* et *H* ont la même enthalpie s'écrit :
$c_{as}\theta_h + l_v r_h = c_{as}\theta_H + l_v r_H$.

Par la linéarisation de la courbe de saturation autour d'un point $[\theta_{h0} \quad r_{h0}]^T$,
$r_h = r_{h0} + f'(\theta_{h0})(\theta_h - \theta_{h0})$,
où

$$f'(\theta_h) \equiv \frac{df(\theta_h)}{d\theta_h} = \frac{d}{d\theta_h}\left(\frac{\mathrm{M}_v}{\mathrm{M}_{as}}\frac{p_{vs}}{\mathrm{p} - p_{vs}}\right) = \frac{\mathrm{M}_v}{\mathrm{M}_{as}}\mathrm{p}\frac{2.51354\cdot 10^6 e^{\frac{17.2694\theta}{\theta+238.3}}}{(\theta+238.3)^2\left(\mathrm{p} - 610.78e^{\frac{17.2694\theta}{\theta+238.3}}\right)^2}$$

on obtient le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} r_h = r_{h0} + f'(\theta_{h0})(\theta_h - \theta_{h0}) \\ c_{as}\theta_h + l_v r_h = c_{as}\theta_H + l_v r_H \\ c_{as}\theta_h + l_v r_h = c_{as}\theta_C + l_v r_C \\ \theta_H = \varepsilon\theta_h + (1-\varepsilon)\theta_C \\ r_H = \varepsilon r_h + (1-\varepsilon) r_C \end{cases}$$

Les équations 2, 3, 4 et 5 de ce système ne sont pas indépendantes. Le fait que les points *h*, *H* et *C* sont sur une droite est exprimé deux fois, par les équations 2 et 3 et aussi par les équations 4 et 5 (la matrice des coefficients correspondant aux équations 2 … 5 est singulière ou non-inversable). Le système d'équations :

$$\begin{cases} r_h = r_{h0} + f'(\theta_{h0})(\theta_h - \theta_{h0}) \\ c_{as}\theta_h + l_v r_h = c_{as}\theta_C + l_v r_C \\ \theta_H = \varepsilon\theta_h + (1-\varepsilon)\theta_C \\ r_H = \varepsilon r_h + (1-\varepsilon) r_C \end{cases}$$

avec les inconnues : $[\theta_h \quad r_h \quad \theta_H \quad \theta_C]^T$, s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} -f'(\theta_{h0}) & 1 & 0 & 0 \\ c_{as} & l_v & 0 & -c_{as} \\ -\varepsilon & 0 & 1 & -(1-\varepsilon) \\ 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_h \\ r_h \\ \theta_H \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{h0} - f'(\theta_{h0})\theta_{h0} \\ l_v r_C \\ 0 \\ -r_H + (1-\varepsilon) r_C \end{bmatrix}$$

La solution s'obtient de manière itérative :
Considérons une valeur initiale $\theta_{h0} = 9.57$ °C qui correspond à la température de rosée du point de soufflage ($\theta_S = 30$ °C, $r_S = 7.42 \cdot 10^{-3}$ kg/kg) ; c'est la température du point *H* si l'efficacité de l'humidificateur était $\varepsilon = 1$.
Il en résulte : $r_{h0} = f(\theta_{h0}) = 7.30 \cdot 10^{-3}$ kg/kg et $f'(\theta_{h0}) = 0.489 \cdot 10^{-3}$ [°C^{-1}]
On obtient :

$$\begin{bmatrix} \theta_h \\ r_h \\ \theta_H \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.70 \\ 7.855 \cdot 10^{-3} \\ 11.78 \\ 21.56 \end{bmatrix}, \text{ c. à d. } \begin{aligned} \theta_h &= 10.70 \text{ °C} \\ r_r &= 7.855 \cdot 10^{-3} \text{ kg/kg} \\ \theta_H &= 11.78 \text{ °C} \\ \theta_C &= 21.56 \text{ °C} \end{aligned}$$

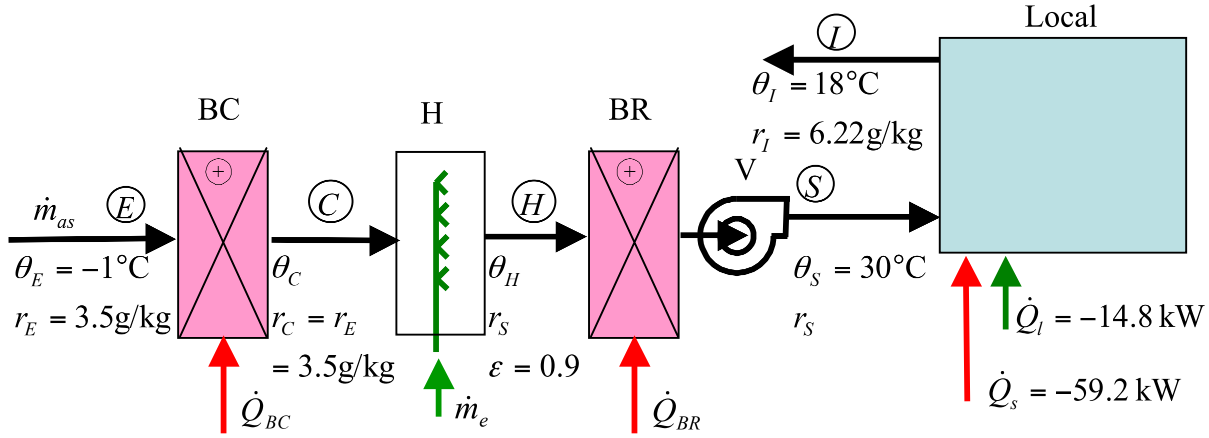
En faisant encore un fois le calcul avec $\theta_{h0} = 10.70$ °C on obtient :

$$\begin{bmatrix} \theta_h \\ r_h \\ \theta_H \\ \theta_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.66 \\ 7.855 \cdot 10^{-3} \\ 11.75 \\ 21.53 \end{bmatrix}, \text{ c. à d. } \begin{aligned} \theta_h &= 10.66 \text{ °C} \\ r_r &= 7.855 \cdot 10^{-3} \text{ kg/kg} \\ \theta_H &= 11.75 \text{ °C} \\ \theta_C &= 21.53 \text{ °C} \end{aligned}$$

presque les même valeurs, donc la solution.

```
Z = 0;              %[m] altitude
p = 101325*(1 - 2.25577e-5 * Z)^5.2559;     %[Pa] pression

Mv = 18.01528;  % masse molaire vapeur [kmole]ou [kg]
Mas= 28.9645;   % masse molaire air sec [kmole] ou [kg]
R = 8320;       % constante des gaz parfaits [J/(kmole*K)]

ca = 1; lv = 2495; hv = 2500;
thS = 30; thI = 18; rI = 6.22e-3;
thE = -1; rE = 3.5e-3;
Qs = -59.2; Ql = -14.8;
eps = 0.9;

rH = 7.42e-3;   rC = 3.5e-3;

thh0 = 9.57;
del_thh = 2
while del_thh > 0.1
       expth = exp(17.2694*thh0/(thh0 + 238.3));
       rh0 = Mv/Mas*610.78*expth/(p - 610.78*expth);
       fp = Mv/Mas*p*2.51354e6*expth/((thh0 + 238.3)^2*(p — 610.78*expth)^2);

       A = [-fp  1      0   0;...
            ca   lv     0   -ca;...
          -eps   0      1   -(1 - eps);...
             0  -eps    0   0];

       b = [rh0-fp*thh0 lv*rC   0   -rH+(1-eps)*rC]';
       x = inv(A)*b
      del_thh = abs(thh0 - x(1));
      thh0 = x(1);
end
['      thh          rh          thH         thC']
(inv(A)*b)'
```

Solution pour le système local - CTA



Les équations du système local – CTA sont :

$$\dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_S \\ r_S \end{bmatrix} - \dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_I \\ r_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{Q}_s \\ \dot{Q}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{local}$$

$$\dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_E \\ r_E \end{bmatrix} - \dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_C \\ r_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{Q}_{BC} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{chauffage}$$

$$\dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_H \\ r_S \end{bmatrix} - \dot{m}_{as}\begin{bmatrix} c_{as} & 0 \\ 0 & l_v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \theta_S \\ r_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{Q}_{BR} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rechauffage}$$

$$\begin{cases} r_h = r_{h0} + f'(\theta_{h0})(\theta_h - \theta_{h0}) \\ c_{as}\theta_C + l_v r_E = c_{as}\theta_H + l_v r_S \\ \begin{bmatrix} \theta_H \\ r_S \end{bmatrix} = \varepsilon\begin{bmatrix} \theta_h \\ r_h \end{bmatrix} + (1-\varepsilon)\begin{bmatrix} \theta_C \\ r_E \end{bmatrix} \end{cases} \qquad \text{humidif. adiab}$$

8 inconnues : $\dot{m}_{as}\theta_C$, $\dot{m}_{as}\theta_H$, $\dot{m}_{as}r_S$, $\dot{m}_{as}\theta_h$, $\dot{m}_{as}r_h$, $\dot{Q}_{BC}$, $\dot{Q}_{BR}$, $\dot{m}_{as}$,
8 équations (les équations 4 et 6 n'apportent rien)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{as}(\theta_S - \theta_I) \\ 0 & 0 & l_v & 0 & 0 & 0 & 0 & -l_v r_I \\ -c_{as} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & c_{as}\theta_E \\ 0 & c_{as} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -c_{as}\theta_S \\ 0 & 0 & 0 & -f'(\theta_{h0}) & 1 & 0 & 0 & -r_{h0} + f'(\theta_{h0})\theta_{h0} \\ c_{as} & -c_{as} & -l_v & 0 & 0 & 0 & 0 & l_v r_E \\ -(1-\varepsilon) & 1 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & -(1-\varepsilon)r_E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{m}_{as}\theta_C \\ \dot{m}_{as}\theta_H \\ \dot{m}_{as}r_S \\ \dot{m}_{as}\theta_h \\ \dot{m}_{as}r_h \\ \dot{Q}_{BC} \\ \dot{Q}_{BR} \\ \dot{m}_{as} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{Q}_s \\ -\dot{Q}_l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1. On donne une valeur initiale $\theta_{h0} = 9.57$ °C
2. On calcule $r_{h0} = f(\theta_{h0}) = 7.30 \cdot 10^{-3}$ kg/kg et $f'(\theta_{h0}) = 0.489 \cdot 10^{-3}$ [°C^{-1}]
3. On résolve le système d'équations linéaires pour
   $\dot{m}_{as}\theta_C$, $\dot{m}_{as}\theta_H$, $\dot{m}_{as}r_S$, $\dot{m}_{as}\theta_h$, $\dot{Q}_{BC}$, $\dot{Q}_{BR}$, $\dot{m}_{as}$
4. On compare θ_h avec θ_h initial ; si la différence est importante, on passe au pas 1.

Considérons une valeur initiale $\theta_{h0} = 9.57$ °C qui correspond à la température de rosée du point de soufflage ($\theta_S = 30$ °C, $r_S = 7.42 \cdot 10^{-3}$ kg/kg) ; c'est la température du point H si l'efficacité de l'humidificateur était $\varepsilon = 1$.

On obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{m}_{as}\theta_C \\ \dot{m}_{as}\theta_H \\ \dot{m}_{as}r_S \\ \dot{m}_{as}\theta_h \\ \dot{m}_{as}r_h \\ \dot{Q}_{BC} \\ \dot{Q}_{BR} \\ \dot{m}_{as} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.45 \\ 58.173 \\ 0.036617 \\ 52.808 \\ 0.038767 \\ 111.39 \\ 89.827 \\ 4.9333 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} \theta_C \\ \theta_H \\ r_S \\ \theta_h \\ r_h \\ \dot{Q}_{BC} \\ \dot{Q}_{BR} \\ \dot{m}_{as} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21.58 \\ 11.7 \\ 7.42 \cdot 10^{-3} \\ 10.70 \\ 7.85 \cdot 10^{-3} \\ 111.39 \\ 89.827 \\ 4.9333 \end{bmatrix}, \text{ c. à d. } \begin{aligned} \theta_C &= 21.58 \text{ °C} \\ \theta_H &= 11.7 \text{ °C} \\ r_S &= 7.42 \cdot 10^{-3} \text{ kg/kg} \\ \theta_h &= 10.70 \text{ °C} \\ r_h &= 7.85 \cdot 10^{-3} \text{ kg/kg} \\ \dot{Q}_{BC} &= 111.39 \text{ kW} \\ \dot{Q}_{BR} &= 89.83 \text{ kW} \\ \dot{m}_{as} &= 4.93 \text{ kg/s} \end{aligned}$$

```
thh0 = 9.57;
del_thh = 2
while del_thh > 0.1
       expth = exp(17.2694*thh0/(thh0 + 238.3));
       rh0 = Mv/Mas*610.78*expth/(p - 610.78*expth)
       fp = Mv/Mas*p*2.51354e6*expth/((thh0 + 238.3)^2*(p - expth)^2);

       A = [   0    0    0    0    0    0    0    ca*(thS - thI);...
            0    0    lv   0    0    0    0    -lv*rI;...
            -ca  0    0    0    0    1    0    ca*thE;...
            0    ca   0    0    0    0    1    -ca*thS;...
            0    0    0    -fp  1    0    0    -rh0+fp*thh0;...
            ca   -ca  -lv  0    0    0    0    lv*rE;...
       -(1-eps)  1    0    -eps 0    0    0    0;...
            0    0    1    0    -eps 0    0    -(1-eps)*rE];

       b = [-Qs    -Ql 0    0    0    0    0    0]';
       x = inv(A)*b
       del_thh = abs(thh0 - x(4)/x(8));
       thh0 = x(4)/x(8);
end
% ['ma*thC    ma*thH  ma*rS    ma*thh   ma*rh    QBC QBR ma']
x = (inv(A)*b)';
['      thC         thH         rS              thh         rh          QBC         QBR
ma']
[x(1:5)/x(8) x(6:8)]
```

Matrice d'assemblage

```
%Fichier : AsHV04.m
%Ex4 heating, vapor humidification, thermal zone
%
%solves the direct problem by Assembly & Connectivity vector
% & simple branch index (contain [s, l])
clc, clear all

%DATA
%phyical constants
p = 101325;      %[Pa] pression
Mv = 18.01528;  % masse molaire vapeur [kmole]
Mas= 28.9645;   % masse molaire air sec [kmole]
R = 8320;        % constante des gaz parfaits [J/(kmole*K)]
c = 1; l = 2495; h = 2500;

%elements
m = 4.93;  %mass flow rate
%1 HC
QsBC = 152.9;
k1 = m*[1 0 -1 0; 0 1 0 -1];
f1 = [QsBC 0]';
%2 VH
mv = 0.019;
k2 = k1;
f2 = [0 l*mv]';
%3 TZ
Qsa = -59.2; Qla = -14.8;
k3 = k1;
f3 = [Qsa Qla]';

Kd = blkdiag(k1,k2,k3);
F = [f1; f2; f3];
%Connectivity index:
cindex =[[1 2 3 4] [3 4 5 6] [5 6 7 8]];

n = 4;   % # of degree of freedom / element
E = 3;   % # of elements
N = 8;   % # of total degree of freedom


bcic = [1];       %index branches with known values (1st branch of [th,w])
th0 = -1; w0 = 3.5e-3; P0 = [th0 w0];
bcv = [P0];      %values corresponding to global indexes bci; vector of Points [th w]

%COMPUTATION

% C = [1 2 3 4; ...    %HC element 1
%         3 4 5 6; ...    %VH element 2
%         5 6 7 8]';      %TZ element 3
%boundaty conditions:
%bcic = [1];
bci = zeros(1,2*length(bcic));
bci(1:2:end) = 2*(bcic -1) +1;
bci(2:2:end) = 2*bcic;
%bci = [1 2]; %index of global variables [sensible, latent, s,l, s,l, ...]

% th0 = -1; w0 = 3.5e-3; P0 = [th0 w0];
% bcv = [P0]; %values of BC correspond to global indexes bci; vector of Points [th w]
%bcv = [th0 w0];

A = zeros(n*E,N);    %A matrix
index = sub2ind(size(A), [1:n*E], cindex);
A(index) = 1;

% Assembly
%Kd = blkdiag(k1,k2,k3);
K = Kd*A;
%F = [f1; f2; f3];

%Boundary conditions: explicit method
for i=1:2:length(bci)
    F = F + K(:,i)*c*bcv(i) + K(:,i+1)*l*bcv(i+1); %put known BC to the right
    %F = F + sum(K(:,bci).*[c*th0*ones(size(K,1),1) l*w0*ones(size(K,1),1)], 2);
end
K(:,bci) =[]; %eliminate the corresponding columns from K

%Solve
```

```
Q = -inv(K)*F;
th = Q(1:2:end)/c;
w = Q(2:2:end)/l;
[th w]
```