4. Systèmes d'équations linéaires

4.1. Généralités

On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** $x_1, x_2, \ldots, x_p$ tout système d'équations de la forme :

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + \ldots + a_{1p}\, x_p = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, x_1 + \ldots + a_{np}\, x_p = b_n \end{cases}$$

ou sous forme condensée :

$$\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j = b_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Les coefficients a_{ij} et b_i sont des éléments donnés de K (**R** ou **C**). Les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont appelés **seconds membres.**
Si $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$, on dit que le **système** est **homogène.**

On appelle **solution du système** toute suite $x_1, \ldots, x_p$ d'éléments de K vérifiant les équations (1). On dit que le **système** est **compatible** s'il admet au moins une solution, **incompatible** ou **impossible** dans le cas contraire.

On appelle **matrice du système linéaire** la matrice $A = \left[a_{ij}\right]$. Le système s'écrit :

$$AX = B \quad \text{avec} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

En désignant par $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_p$ les vecteurs colonnes de A, on peut écrire le système sous forme vectorielle :

$$x_1\, \mathbf{V}_1 + \ldots + x_p\, \mathbf{V}_p = \mathbf{B}$$

Remarque. – Si $f \in \mathcal{L}(K^p, K^n)$ est l'application linéaire associée à A (§ 2.1.2.), le système linéaire $AX = B$ s'écrit aussi $f(\mathbf{X}) = \mathbf{B}$.

La résolution du système $AX = B$ revient donc à trouver l'antécédent (ou les antécédents) de **B** dans l'application f et la résolution du système homogène $AX = 0$ revient à trouver le noyau de f.

4.2. Rang d'un système linéaire

On appelle **rang d'un système linéaire** le rang de la matrice A du système.

Soit C une matrice carrée d'ordre r déduite de $A \in \mathbf{M}_{np}$ en supprimant $(n-r)$ lignes et $(p-r)$ colonnes. On dit que C est une **matrice extraite de** A.

Propriété 1. – **Le rang d'une matrice** A **est égal à l'ordre maximum des matrices carrées régulières extraites de** A.

Soit C une matrice régulière d'ordre maximum r extraite de A. Quand on modifie l'ordre des lignes et des colonnes de A, r ne change pas. On peut donc supposer :

$$\delta = \det(C) = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{r1} \ldots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Soient $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_p$ les vecteurs colonnes de A. Alors, $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \ldots, \mathbf{V}_r$ sont linéairement indépendants. Sinon les colonnes de δ seraient liées et δ serait nul.

a) Si $r = p$, les vecteurs colonnes de A sont indépendants et A est de rang r.

b) Si $r = n$, le système des vecteurs colonnes de A est de rang n (car dans K^n tout système libre a au plus n éléments) et A est de rang r.

c) Si $r < p$ et $r < n$, soient j et q deux indices quelconques tels que $r + 1 \leqslant j \leqslant p$ et $r + 1 \leqslant q \leqslant n$.

Les r vecteurs colonnes $\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_r$ de C (linéairement indépendants) forment une base de K^r et donc le vecteur $\mathbf{W}_j$ de composantes $(a_{1j}, \ldots, a_{rj})$ s'écrit :

$$\mathbf{W}_j = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, \mathbf{W}_k$$

ou : $\qquad a_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, a_{ik} \qquad i = 1, 2, \ldots, r$

Montrons que : $\mathbf{V}_j = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, \mathbf{V}_k$

Posons :

$$\delta_q = \left|\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ \hline a_{q1} & \ldots & a_{qr} & a_{qj} \end{array}\right|$$

δ_q déterminant d'une matrice carrée d'ordre $r + 1$ extraite de A est nul.

En retranchant à la dernière colonne (de δ_q) λ_1 fois la colonne 1,..., λ_r fois la colonne r, on a :

$$\delta_q = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} & 0 \\ a_{r1} \ldots a_{rr} & 0 \\ a_{q1} \ldots a_{qr} & D \end{vmatrix} = D\,\delta = 0$$

avec : $$D = a_{qj} - \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, a_{qk}$$

Donc, quels que soient j et q, on a :

$$a_{qj} = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, a_{qk}$$

c'est-à-dire : $\mathbf{V}_j = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, \mathbf{V}_k \qquad r+1 \leqslant j \leqslant p$

Le système des vecteurs colonnes de A est de rang r et il en est de même pour A.

Remarque. – Le rang d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au nombre d'éléments diagonaux non nuls.

Propriété 2. – **Le rang du système des vecteurs colonnes d'une matrice est égal au rang du système des vecteurs lignes.**

En effet, le rang du système des vecteurs lignes de A est égal au rang de ${}^tA$, donc au rang de A d'après la propriété 1.

Détermination pratique du rang d'une matrice. –

Soit C une matrice carrée régulière d'ordre r extraite de A. Pour savoir si A est de rang supérieur à r, il faut chercher si, parmi toutes les matrices d'ordre $r+1$ extraites de A, il en existe une régulière.

La démonstration de la propriété 1 montre qu'il suffit de considérer les matrices d'ordre $r+1$ obtenues en bordant C par une ligne et une colonne supplémentaires extraites de A.

Si les déterminants de toutes ces matrices sont nuls, la matrice A est de rang r. Sinon, il existe une matrice régulière C' d'ordre $r+1$ et on reprend le même calcul à partir de C'.

Exercice - Exemple

$\boxed{E_1}$ Déterminer le rang de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matrice A est au moins de rang 2 car le déterminant suivant est non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 15$$

Les 4 matrices obtenues en bordant par une ligne et une colonne extraites de A ont des déterminants nuls :

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

La matrice A est donc de rang 2.

TESTS

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$\boxed{T_1}$ $$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{T_2}$ $$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$\boxed{T_3}$ $$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2\lambda+1 & 3 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

Réponses

T_1 rang 2

T_2 rang 3

T_3 rang 3 si $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -2$, rang 2 si $\lambda = -2$, rang 1 si $\lambda = 1$.

4.3. Systèmes de Cramer

On appelle **système de Cramer** un système $AX = B$ de n équations linéaires à n inconnues, de rang n ($n = p = r$). Le déterminant de A est appelé **déterminant du système.**

Un système de Cramer est un **système de n équations à n inconnues dont le déterminant est non nul** puisque la matrice A est de rang n.

4.3.1. Résolution du systeme

Propriété. – **Un système de Cramer a une solution unique $X = A^{-1} B$.**

La matrice A est inversible et $AX = B$ équivaut à $X = A^{-1} B$. On a alors :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} B = \frac{1}{\det(A)} \; {}^t\left[A_{ij}\right] \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_j = \frac{\sum_{k=1}^{n} A_{kj} b_k}{\det(A)}$$

Or le développement du déterminant de A par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne est :

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{kj} \, a_{kj}$$

En remplaçant a_{kj} par b_k, on obtient le numérateur de x_j.

La solution du système de Cramer $AX = B$ est :

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}}$$

où Δ est le déterminant du système et Δ_j le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ la $j^{\text{ème}}$ colonne par la colonne des seconds membres.

Ces formules sont appelées **formules de Cramer.**

Remarque. – Dans tous les exemples, on calculera le déterminant Δ pour vérifier si le système est de Cramer. Mais la résolution par élimination ou substitution d'inconnues est plus rapide que l'utilisation des formules ci-dessus.

4.3.2. Application a l'inversion des matrices

Soit A une matrice carrée d'ordre n régulière. La relation $X = A^{-1} B$ donne :

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} b_1 + \ldots + \alpha_{1n} b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1} b_1 + \ldots + \alpha_{nn} b_n \end{cases}$$

et on a : $A^{-1} = \left[\alpha_{ij}\right]$.

En exprimant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en fonction de $b_1, \ldots, b_n$, on calcule donc la matrice inverse de A.

Exercices - Exemples

$\boxed{E_2}$ Résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ 2x - 2y + 3z = 3 \end{cases}$$

Le déterminant du système vaut : $\Delta = \lambda - 1$.

Si $\lambda \neq 1$, on a un système de Cramer. Pour le résoudre, on procède par élimination. Retranchons la $1^{\text{ère}}$ équation de la $2^{\text{ème}}$ et deux fois la $1^{\text{ère}}$ équation de la $3^{\text{ème}}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ (\lambda-1)\, y = 1 \\ -4y + z = 1 \end{cases}$$

D'où l'on tire :

$$y = \frac{1}{\lambda - 1} \qquad z = \frac{\lambda + 3}{\lambda - 1} \qquad x = \frac{-5}{\lambda - 1}$$

Si $\lambda = 1$, le système est impossible car les deux premières équations donnent deux valeurs différentes pour $x + y + z$.

$\boxed{E_3}$ Calculer l'inverse de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots & n \\ 0 & 1 & 2 \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & n-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice A est régulière puisque son déterminant vaut 1. Considérons le système d'équations $AX = Y$. Retranchons à chaque équation la suivante, de la $1^{\text{ère}}$ à la $(n-1)^{\text{ème}}$. On obtient le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = y_1 - y_2 \\ \qquad x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = y_2 - y_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + x_n = y_{n-1} - y_n \\ \qquad\qquad\qquad x_n = y_n \end{cases}$$

D'où l'on tire les x_i :

$$\begin{cases} x_1 = (y_1 - y_2) - (y_2 - y_3) = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-2} = y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \\ x_{n-1} = y_{n-1} - 2y_n \\ x_n = y_n \end{cases}$$

On a donc finalement :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & \mathbf{O} & & & 1 & -2 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

TESTS

Résoudre les systèmes d'équations :

T₄

$$\begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + 4z = -9 \\ -x - 2y + 6z = 2 \end{cases}$$

T₅

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + (1+a)\,x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + (1+a)\,x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + a\,x_2 + 2\,x_3 + (1+a)\,x_4 = 4 \end{cases}$$

Inverser les matrices suivantes :

T₆

$$\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$$

avec $a \neq b$ et $a \neq -3b$

(pour la résolution du système linéaire faire la somme de toutes les équations).

T₇

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ a & 0 & -1 & & & \mathbf{O} \\ a^2 & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ a^{n-2} & & & & 0 & -1 \\ a^{n-1} & & \mathbf{O} & & & 0 \end{bmatrix}$$

avec $a \neq 0$.

T₈

$$\begin{bmatrix} & & & -\lambda & 1 \\ & \mathbf{O} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ -\lambda & 1 & & & \\ 1 & & & \mathbf{O} & \end{bmatrix}$$

matrice (n, n).

T₉

Montrer que l'inverse d'une matrice tri-angulaire inférieure est une matrice tri - angulaire inférieure.

Réponses

T₄ $x = -2$; $y = 3$; $z = 1$

T₅ Si $a \neq 0 : x_1 = \dfrac{a^2 - 5a + 1}{a^2}$; $x_2 = \dfrac{1}{a}$;

$$x_3 = \frac{2}{a} \; ; \; x_4 = \frac{2a - 1}{a^2}$$

Si $a = 0$, le système est impossible.

T₆

$$\frac{1}{(a+3b)(a-b)} \begin{bmatrix} a+2b & -b & -b & -b \\ -b & a+2b & -b & -b \\ -b & -b & a+2b & -b \\ -b & -b & -b & a+2b \end{bmatrix}$$

T₇

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & 1/a^{n-1} \\ -1 & 0 & & & \mathbf{O} & 1/a^{n-1} \\ & -1 & 0 & & & 1/a^{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{O} & & -1 & 0 & 1/a^2 \\ & & & & -1 & 1/a \end{bmatrix}$$

T₈

$$\begin{bmatrix} & & & & 1 \\ & \mathbf{O} & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \lambda \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \lambda^2 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \vdots \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{n-1} \end{bmatrix}$$

T₉ $Y = AX$ donne $y_i = \sum\limits_{j=1}^{i} a_{ij}\, x_j \; (i = 1, \ldots, n)$

On en déduit :

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\, y_1 \; ; \; x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j \right]$$

$(i = 2, 3, \ldots, n)$

ce qui de proche en proche donne :

$$x_i = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij}\, y_j$$

c'est-à-dire A^{-1} triangulaire inférieure.