6. Espaces euclidiens. Espaces hermitiens

6.1. Espaces euclidiens

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension n. Une base $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ de E étant choisie, on appelle **produit scalaire** de deux vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ de composantes respectives $(v_1, \dots, v_n)$ et $(v'_1, \dots, v'_n)$ le scalaire :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}' = v_1 v'_1 + \dots + v_n v'_n$$

On a alors : $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}' = \mathbf{V}' \cdot \mathbf{V}$

E muni du produit scalaire ainsi défini est appelé **espace euclidien.**

On définit la **norme** (ou **longueur**) **d'un vecteur** $\mathbf{V}$ en posant :

$$\| \mathbf{V} \| = \sqrt{\mathbf{V}.\mathbf{V}} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$$

On dit que deux vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ sont **orthogonaux** si $\mathbf{V}.\mathbf{V}' = 0$.

Une **base** $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ de E est dite **orthonormée** si les vecteurs de la base sont deux à deux orthogonaux et de longueur 1 :

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

Remarque. – V et V' étant les matrices colonnes associées aux vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$, on a :

$$^t(\mathrm{V})\, \mathrm{V}' = {}^t(\mathrm{V}')\, \mathrm{V} = \left[v_1 v'_1 + \dots + v_n v'_n \right]$$

L'orthogonalité des vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ s'écrit donc sous forme matricielle :

$$^t\mathrm{V}\, \mathrm{V}' = \mathbf{O} \quad \text{ou} \quad {}^t\mathrm{V}'\, \mathrm{V} = \mathbf{O}$$

6.2. Matrices orthogonales

On appelle **matrice orthogonale** toute matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ telle que :

$$\boxed{A^{-1} = {}^tA}$$

Cette condition est équivalente (§ 2.5.4.) à ${}^tAA = I$ ou $A\,{}^tA = I$.

Propriété 1. – **Soit E un espace euclidien rapporté à une base orthonormée. Si A est une matrice orthogonale, l'endomorphisme f de E associé à A fait correspondre à tout vecteur un vecteur de même norme :**

$$\| f(\mathbf{x}) \| = \| \mathbf{x} \| \qquad \forall \mathbf{x} \in E$$

On dit que f est un **opérateur orthogonal.**

L'égalité des normes résulte des relations :

$$^t(AX)\ (AX) = {}^tX\ {}^tAAX = {}^tXX \quad \forall X$$

Propriété 2. – **Pour que la matrice A soit orthogonale, il faut et il suffit que ses vecteurs colonnes (resp. lignes) forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$.**

En effet, si $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ sont les vecteurs colonnes de A, l'élément c_{ij} de ${}^tAA$ a pour valeur $c_{ij} = \mathbf{V}_i \cdot \mathbf{V}_j$.

En particulier : **la matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$ à une autre base orthonormée est une matrice orthogonale.**

Propriété 3. – **Le produit de 2 matrices orthogonales est une matrice orthogonale :**

$$^t(AB)\,(AB) = {}^tB\,({}^tAA)\,B = {}^tBB = I$$

Propriété 4. – **Le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1** car :

$$\det({}^tA)\,\det(A) = \det({}^tAA) = 1$$

ce qui donne : $[\det(A)]^2 = 1$

Une matrice orthogonale de déterminant + 1 est appelée **matrice de rotation.**

Exercice - Exemple

$\boxed{E_1}$ On considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } a, b, c \text{ réels}$$

Montrer que pour tout α réel non nul, la matrice $B = (\alpha I - A)(\alpha I + A)^{-1}$ est orthogonale.

La matrice $\alpha I + A$ est régulière car :

$$\det(\alpha I + A) = \alpha(\alpha^2 + a^2 + b^2 + c^2)$$

avec $\alpha \neq 0$.

Calculons ${}^tBB$:

$$\begin{aligned} {}^tBB &= {}^t[(\alpha I - A)(\alpha I + A)^{-1}] \; (\alpha I - A)(\alpha I + A)^{-1} \\ &= {}^t[(\alpha I + A)^{-1}] \; {}^t(\alpha I - A)(\alpha I - A)(\alpha I + A)^{-1} \\ &= [{}^t(\alpha I + A)]^{-1} \; {}^t(\alpha I - A)(\alpha I - A)(\alpha I + A)^{-1} \end{aligned}$$

La matrice A considérée vérifiant ${}^tA = -A$, *on a* :

$${}^tBB = (\alpha I - A)^{-1} \; (\alpha I + A)(\alpha I - A)(\alpha I + A)^{-1}$$

Mais (§ 5.5.1.) :

$$(\alpha I + A)\,(\alpha I - A) = (\alpha I - A)\,(\alpha I + A)$$

ce qui donne :

$${}^tBB = (\alpha I - A)^{-1} \; (\alpha I - A)(\alpha I + A)(\alpha I + A)^{-1} = I$$

B est donc une matrice orthogonale.

TESTS

$\boxed{T_1}$ Déterminer toutes les matrices orthogonales d'ordre 2.

$\boxed{T_2}$ Vérifier que pour $\lambda \in \mathbf{R}$ la matrice suivante est orthogonale :

$$\frac{1}{\lambda^2+\lambda+1}\begin{bmatrix} \lambda & \lambda(\lambda+1) & \lambda+1 \\ \lambda+1 & \lambda & -\lambda(\lambda+1) \\ \lambda(\lambda+1) & -(\lambda+1) & \lambda \end{bmatrix}$$

$\boxed{T_3}$ Soient p et q deux entiers distincts compris entre 1 et n. On considère la matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$\begin{aligned} a_{ii} &= 1 \text{ si } i \neq p \text{ et } i \neq q \\ a_{pp} &= a_{qq} = \cos\theta \\ a_{pq} &= -\sin\theta,\; a_{qp} = \sin\theta \\ a_{ij} &= 0 \text{ dans les autres cas} \end{aligned}$$

Montrer que la matrice A est orthogonale.

Réponses

T_1 $A = \begin{bmatrix} a & \epsilon b \\ b & -\epsilon a \end{bmatrix}$ avec $\epsilon = \pm 1$ et $a^2 + b^2 = 1$

ou :

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \epsilon\sin\theta \\ \sin\theta & -\epsilon\cos\theta \end{bmatrix}$$

Pour $\epsilon = -1$, A représente la rotation de centre 0 et d'angle θ.
Pour $\epsilon = +1$, A représente la symétrie par rapport au support du vecteur $\mathbf{V}\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right)$ ou encore la symétrie par rapport à $0x$ suivie d'une rotation d'angle θ.

T_2 On vérifie que les vecteurs colonnes (ou lignes) forment un système orthonormé.

T_3 Même méthode que dans l'exercice précédent.

6.3. Matrices symétriques réelles

6.3.1. Propriétés des matrices symétriques réelles

Rappelons qu'une matrice symétrique vérifie ${}^tA = A$.

Propriété 1. – **Soit E un espace euclidien rapporté à une base orthonormée. Si A est une matrice symétrique, l'endomorphisme f de E associé à A vérifie :**

$$\mathbf{x} \,.\, f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}).\mathbf{y} \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$$

On dit que f est un **opérateur symétrique.**

Propriété 1 bis. – **Si A est une matrice symétrique :**

$${}^tXAY = {}^tYAX \qquad \forall X, Y$$

Cette relation traduit l'égalité vectorielle :

$$\mathbf{x} \,.\, f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \,.\, \mathbf{y}$$

${}^tXAY$ est une matrice à une ligne et une colonne, donc égale à sa transposée :

$${}^tXAY = {}^t({}^tXAY) = {}^tY\,{}^tAX = {}^tYAX$$

La démonstration prouve que cette formule est encore valable pour des matrices colonnes X et Y à éléments complexes.

Propriété 2. – **Si A est symétrique et P orthogonale, alors $A' = P^{-1}AP$ est symétrique, car :**

$${}^tA' = {}^t({}^tPAP) = {}^tP\,{}^tAP = P^{-1}AP = A'$$

6.3.2. Valeurs propres et vecteurs propres des matrices symétriques réelles

Propriété 1. – **Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle A sont toutes réelles.**

Soit $\mathbf{V}$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ. Pour $X = V$ et $Y = \overline{V}$ ($\overline{V}$ matrice colonne dont les éléments sont les conjugués des éléments de V), la relation ${}^tXAY = {}^tYAX$ devient :

$${}^tVA\overline{V} = {}^t\overline{V}AV$$

De $AV = \lambda V$, on déduit $A\overline{V} = \overline{\lambda}\overline{V}$ soit en reportant :

$$\overline{\lambda}\ {}^tV\overline{V} = \lambda\ {}^t\overline{V}V$$

$$\overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} v_i \overline{v}_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i v_i$$

V étant non nul, on a donc $\overline{\lambda} = \lambda$ c'est-à-dire λ réel et le vecteur propre **V** est à composantes réelles.

Propriété 2. – **Deux vecteurs propres d'une matrice symétrique réelle associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.**

Si **V** et **V′** sont deux vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres λ et λ' la relation :

$$\mathbf{V}' \,.\, f(\mathbf{V}) = f(\mathbf{V}') \,.\, \mathbf{V}$$

s'écrit : $\lambda\, \mathbf{V}' \,.\, \mathbf{V} = \lambda'\, \mathbf{V}' \,.\, \mathbf{V}$

et en supposant $\lambda \neq \lambda'$ on obtient $\mathbf{V}' \,.\, \mathbf{V} = 0$.

Exercice - Exemple

E$_2$ Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de la matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 17 & -1 & 4 \\ -1 & 17 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique s'écrit :

$$-\lambda^3 + 36\,\lambda^2 - 324\,\lambda$$

et a pour zéros : $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 18.$

Le vecteur propre associé à λ_1 *est défini par :*

$$\begin{cases} 17\,x - y + 4\,z = 0 \\ -x + 17\,y + 4\,z = 0 \end{cases}$$

ce qui donne : $x = y,\ z = -4x$.

En prenant un vecteur de longueur 1, on obtient :

$$\mathbf{V}_1 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{-4}{3\sqrt{2}}\right)$$

Les vecteurs propres associés à λ_2 *sont définis par la seule condition :* $-x - y + 4\,z = 0$.

On peut choisir : $\mathbf{V}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *vecteur de longueur 1.*

Pour obtenir une base orthonormée, il faut prendre $\mathbf{V}_3$ *orthogonal à* $\mathbf{V}_2$ *et de longueur 1, c'est-à-dire vérifiant les trois conditions :*

$$\begin{aligned} -x - y + 4\,z &= 0 \\ x - y &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned}$$

Soit : $\mathbf{V}_3 = \pm\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\mathbf{V}_3$ *est donc fixé au signe près lorsque* $\mathbf{V}_2$ *est choisi (on a :* $\mathbf{V}_3 = \pm\, \mathbf{V}_1 \wedge \mathbf{V}_2$*).*

TESTS

Déterminer pour chacune des matrices suivantes une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres :

T$_4$ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

T$_5$ $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

T$_6$ α désignant un nombre réel non nul, on considère la matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ définie par :

$$a_{ii} = 1 - 2\alpha$$

$$a_{i,i-1} = a_{i,i+1} = \alpha$$

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \{i-1, i, i+1\}$$

1) Vérifier pour $1 \leqslant i \leqslant n$ l'identité :

$$\sin(i-1)\phi + \sin(i+1)\phi = 2\left(1 - 2\sin^2\frac{\phi}{2}\right)\sin i\phi$$

2) Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on considère le vecteur $\mathbf{V}_k$ de composantes ($\sin k\theta$, $\sin 2k\theta$, ..., $\sin nk\theta$) avec $\theta = \frac{\pi}{n+1}$.

Vérifier que $\mathbf{V}_k$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre

$$\lambda_k = 1 - 4\alpha\sin^2\frac{k\theta}{2}$$

3) En déduire sans calcul la valeur de :

$$\sum_{j=1}^{n} \sin\frac{jk\pi}{n+1}\sin\frac{jk'\pi}{n+1} \quad \text{pour} \quad k \neq k'$$

Réponses

T$_4$ $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 3$

$$\mathbf{V}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\mathbf{V}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\mathbf{V}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$\boxed{T_5}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = 7$

$$V_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

Les vecteurs propres associés à $\lambda = -2$ vérifient $x + 2y - 2z = 0$. On peut prendre :

$$V_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$V_2 = \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{-1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

$\boxed{T_6}$ 1) $\sin(i-1)\,\phi + \sin(i+1)\,\phi = 2\sin i\phi \cos\phi$

2) Le $i^{\text{ème}}$ élément de la matrice colonne AV_k est, pour $2 \leqslant i \leqslant n-1$:

$$\alpha \sin(i-1)\,k\theta + (1-2\alpha)\sin ik\theta + \alpha\sin(i+1)\,k\theta = \lambda_k \sin ik\theta$$

formule encore valable pour $i = 1$ et $i = n$ car :

$$\sin 0\, k\theta = \sin(n+1)\,k\theta = 0$$

3) Les valeurs propres sont toutes distinctes et les vecteurs propres sont deux à deux orthogonaux :

$$V_k . V_{k'} = \sum_{j=1}^{n} \sin\frac{jk\pi}{n+1} \sin\frac{jk'\pi}{n+1} = 0$$

si $k \neq k'$.

6.3.3. Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Propriété. — **Toute matrice symétrique réelle A est diagonalisable par une matrice orthogonale** (il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale).

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ représenté par la matrice A dans la base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, λ_1 une valeur propre de f et V_1 un vecteur propre de longueur 1 associé à λ_1.
On complète V_1 en une base $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ de $\mathbf{R}^n$ (§ 1.4.). Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt (cf. chapitre 9, test T_{84}), on en déduit une base orthonormée $(V_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ et on a :

$$f(V_1) = \lambda_1 V_1$$

La matrice de f par rapport à la nouvelle base est symétrique (§ 6.3.1.) et s'écrit :

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & 0 \ldots\ldots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right]$$

avec B symétrique.

On peut raisonner sur B comme on l'a fait sur A et en procédant ainsi $(n-1)$ fois, on obtient finalement une base orthonormée par rapport à laquelle la matrice de f est diagonale, ce qui démontre la propriété.

Exercice - Exemple

$\boxed{E_3}$ Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de la matrice:

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -7 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

et caractériser géométriquement l'endomorphisme associé.

Le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

Les vecteurs propres associés à $\lambda_1 = 1$ sont définis par :

$$\begin{cases} -16x + 4y + 4z = 0 \\ 4x - 10y + 8z = 0 \end{cases}$$

ce qui donne : $y = z = 2x$

et en prenant un vecteur de longueur 1 :

$$V_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Les vecteurs propres associés à $\lambda_2 = -1$ sont définis par la seule condition :

$$2x + 4y + 4z = 0$$

Prenons : $V_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

et V_3 orthogonal à V_2 :

$$V_3 = \left(\frac{-4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

Dans la base orthonormée (V_1, V_2, V_3), la matrice semblable à A s'écrit :

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Elle représente la symétrie par rapport au support du vecteur $\mathbf{V}_1$.

TESTS

Déterminer pour chacune des matrices suivantes une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres et caractériser géométriquement l'endomorphisme associé :

$\boxed{\mathbf{T}_7}$ $$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{T}_8}$ $$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Réponses

T₇ $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$

$$\mathbf{V}_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\mathbf{V}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\mathbf{V}_3 = \left(\frac{-1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$$

Projection orthogonale sur le plan défini par $\mathbf{V}_2$ et $\mathbf{V}_3$ (plan d'équation $z = 2y - 2x$).

T₈ $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$$\mathbf{V}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\mathbf{V}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\mathbf{V}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

Projection orthogonale sur le plan défini par $\mathbf{V}_2$ et $\mathbf{V}_3$ $(x + y + z = 0)$ suivie d'une homothétie de centre O et de rapport 2.

6.4. Formes quadratiques

6.4.1. Formes linéaires

Une **forme linéaire** sur E (espace vectoriel de dimension p sur K) est (§ 1.6.) une application linéaire de E dans K. Son expression analytique est (§ 1.6.) :

$$f(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p$$

On dit que n formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ sur E sont indépendantes si :

$$\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Condition d'indépendance. – **Pour que n formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ sur E soient indépendantes, il faut et il suffit que le rang de la matrice des coefficients soit égal au nombre n de formes.**

Posons : $f_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$

Le $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne de la matrice $A = [a_{ij}]$ a pour composantes les coefficients de la forme f_i.

La condition $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = 0$ équivaut à :

$$\sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \lambda_i\right) = 0 \qquad \forall x_1, \ldots, x_p$$

ou : $$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \lambda_i = 0 \qquad j = 1, \ldots, p$$

On a par rapport aux inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ un système homogène de p équations à n inconnues. Pour que ce système n'admette que la solution nulle, il faut et il suffit (§ 4.5.1.) que le rang de la matrice ${}^tA$ (égal au rang de A) soit égal au nombre n d'inconnues.

En particulier : pour que n formes linéaires sur E (de dimension n) soient indépendantes, il faut et il suffit que la matrice des coefficients soit régulière.

Corollaire. – **Pour que n formes linéaires $f_1, \ldots, f_n$ sur E soient indépendantes, il faut et il suffit que pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, il existe au moins un $\mathbf{x} \in E$ vérifiant :**

$$f_i(\mathbf{x}) = \alpha_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

Si la condition est vérifiée, on a un système linéaire de n équations à p inconnues compatible quels que soient les α_i. Le théorème de Rouché-Fontené (§ 4.4.2.) montre que $r = n$ car pour $r < n$, on peut trouver des α_i tels que les déterminants caractéristiques soient non nuls.

Réciproquement, si les formes sont indépendantes, alors $r = n$ et le système est compatible.

Exercice - Exemple

$\boxed{E_4}$ Etudier l'indépendance des formes linéaires suivantes :

$$f_1 = x_1 - x_2 + x_3 \;; f_2 = 3x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$f_3 = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \;; f_4 = x_1 + x_2 - x_3$$

La matrice des coefficients est de rang 3 car le déterminant formé à partir des 3 premières lignes est égal à 2.

f_1, f_2, f_3 sont donc indépendantes. Pour obtenir la relation liant f_4 à f_1, f_2, f_3, il faut résoudre par rapport à λ_1, λ_2, λ_3 le système d'équations :

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = f_4$$

ou : $$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = -1 \end{cases}$$

ce qui donne : $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 1$.

On a donc : $f_4 = 2f_1 - f_2 + f_3$

TESTS

Etudier l'indépendance des formes linéaires suivantes :

$\boxed{T_9}$ $$\begin{aligned} f_1 &= x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \\ f_2 &= 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \\ f_3 &= 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \end{aligned}$$

$\boxed{T_{10}}$ $$\begin{aligned} f_1 &= ax_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ f_2 &= x_1 + 2x_2 - x_3 \\ f_3 &= 2x_1 + x_2 + ax_3 \end{aligned}$$

Réponses

T_9 Formes indépendantes.

T_{10} Si $a \neq 1$: formes indépendantes.

Si $a = 1$: $f_3 = -f_1 + 3f_2$, f_1 et f_2 indépendantes.

6.4.2. Définition des formes quadratiques

Soit E un espace euclidien de dimension n. Une forme quadratique sur E est une application $\mathbf{x} \to q(\mathbf{x})$ de E dans $\mathbf{R}$ telle que :

$$\boxed{q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot f(\mathbf{x})}$$

où f est un opérateur symétrique.

Par rapport à une base orthonormée, f est représenté par une matrice symétrique réelle A et on peut écrire :

$$\boxed{q(\mathbf{x}) = {}^tXAX}$$

(en écrivant cette formule on identifie la matrice ${}^tXAX$ d'ordre 1 avec son unique élément).

On appelle **rang de la forme quadratique** q le rang de f, c'est-à-dire le rang de la matrice A.

En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= \sum_{i=1}^{n} x_i \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i>j} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

et en tenant compte de la relation $a_{ij} = a_{ji}$:

$$\boxed{q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij} x_i x_j}$$

$q(\mathbf{x})$ s'exprime donc comme un polynôme homogène du second degré par rapport à $x_1, x_2, \dots, x_n$.

6.4.3. Réduction des formes quadratiques

Propriété. – **Toute forme quadratique q peut s'écrire :**

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, [y_i(x_1, \dots, x_n)]^2$$

les α_i étant des nombres réels non nuls, les y_i des formes linéaires des x_i indépendantes et r le rang de q.

L'expression $\sum_1^r \alpha_i y_i^2$ est appelée décomposition en carrés de q.

Prenons une nouvelle base orthonormée $(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)$ de E formée de vecteurs propres de A (§ 6.3.3.). La matrice de passage P est orthogonale et on a :

$$X = PX'$$
$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= {}^t(PX')\,A\,(PX') = {}^tX'\;{}^tP\,APX' \\ &= {}^tX'\,(P^{-1}AP)\,X' = {}^tX'\,A'X' \end{aligned}$$

avec A' diagonale, c'est-à-dire :

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, x_i'^2$$

En posant ${}^tP = \big[\beta_{ij}\big]$, la relation $X' = P^{-1}X = {}^tPX$ donne :

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \; x_j$$

Les x'_i sont des formes linéaires indépendantes car la matrice ${}^tP$ est régulière. Le rang de q est égal au nombre r de valeurs propres de A non nulles. On a donc en supposant $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1,..., r$:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \; x_j \right)^2$$

Exercice - Exemple

$\boxed{E_5}$ Décomposer en somme de carrés la forme quadratique :

$$q(\mathbf{x}) = 2\,x_1^{\,2} + 2\,x_2^{\,2} + 3\,x_3^{\,2} + 2\,x_1 x_2$$

On peut écrire : $q(\mathbf{x}) = {}^tXAX$ *avec :*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Pour $\lambda_1 = 1$, *un vecteur propre de longueur 1 est :*

$$\mathbf{V}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \; 0\right)$$

Pour $\lambda = 3$, *les vecteurs propres sont définis par la seule condition* $x_1 - x_2 = 0$.

Prenons : $\mathbf{V}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ *et choisissons* $\mathbf{V}_3$ *de longueur 1, orthogonal à* $\mathbf{V}_2$: $\mathbf{V}_3 = (0, 0, 1)$.

$(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3)$ *est une base orthonormée de* $\mathbf{R}^3$ *et on a :*

$$q(\mathbf{x}) = {}^tXAX = {}^tX' \, ({}^tPAP) \, X'$$
$$= \lambda_1 \, x_1'^{\,2} + \lambda_2 \, x_2'^{\,2} + \lambda_3 \, x_3'^{\,2}$$

avec :

$$X' = {}^tPX = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \\ x_3 \end{bmatrix}$$

soit finalement :

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,(x_1 - x_2)^2 + \frac{3}{2}\,(x_1 + x_2)^2 + 3\,x_3^{\,2}$$

On peut faire un choix différent des vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 3$. *Par exemple :*

$$\mathbf{V}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\mathbf{V}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$$

ce qui conduit à une autre décomposition de q :

$$q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\,(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2 + \frac{1}{2}\,(x_1 + x_2 - 2\,x_3)^2$$

Remarque. – Lorsque les valeurs propres de la matrice A sont deux à deux distinctes, les vecteurs propres de longueur 1 sont déterminés au signe près et on obtient alors pour q une seule forme de la décomposition.

TESTS

Décomposer en somme de carrés les formes quadratiques suivantes :

$\boxed{T_{11}}$ $x_1^{\,2} + 2\,x_1 x_2 + 2\,x_1 x_3 + 4\,x_2 x_3$

$\boxed{T_{12}}$ $8\,x_1^{\,2} + 5\,x_2^{\,2} + 5\,x_3^{\,2} - 4\,x_1 x_2 - 4 x_1 x_3 - 8 x_2 x_3$

Réponses

T_{11} $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = 3$

$$\mathbf{V}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\mathbf{V}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\mathbf{V}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$q(\mathbf{x}) = -(x_2 - x_3)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2$$

T_{12} $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$

$$\mathbf{V}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Pour $\lambda = 9$, on peut prendre :

$$\mathbf{V}_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\mathbf{V}_3 = \left(\frac{-4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$$

$$q(\mathbf{x}) = \frac{9}{2}(x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2}(-4x_1 + x_2 + x_3)^2$$

6.4.4. Méthode de Gauss

La méthode de réduction du paragraphe précédent impose la recherche des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A associée à la forme quadratique q. On peut éviter cette recherche en utilisant la méthode de Gauss, procédé par récurrence qui conduit à une décomposition en somme de carrés de formes linéaires indépendantes :

a) S'il existe un terme en x_i^2 (par exemple x_1^2), on ordonne par rapport aux puissances de x_i :

$$q(\mathbf{x}) = ax_1^2 + x_1 \sum_{i=2}^{n} b_i x_i + q_1(x_2, \ldots, x_n)$$

$$= a\left(x_1 + \frac{1}{2a} \sum_{i=2}^{n} b_i x_i\right)^2 + q_1(x_2, \ldots, x_n) - \frac{1}{4a}\left(\sum_{i=2}^{n} b_i x_i\right)^2$$

On obtient ainsi un carré et une forme quadratique ne dépendant plus que de $(n-1)$ variables.

b) S'il n'existe pas de terme carré, on ordonne par rapport à deux variables (par exemple x_1 et x_2) :

$$q(x) = a\, x_1 x_2 + x_1 \sum_{i=3}^{n} b_i x_i + x_2 \sum_{i=3}^{n} c_i x_i + q_1(x_3, \ldots, x_n)$$

$$= a\left(x_1 + \frac{1}{a}\sum_{i=3}^{n} c_i x_i\right)\left(x_2 + \frac{1}{a}\sum_{i=3}^{n} b_i x_i\right) + q_1(x_3, \ldots, x_n) - \frac{1}{a}\left(\sum_{i=3}^{n} b_i x_i\right)\left(\sum_{i=3}^{n} c_i x_i\right)$$

En utilisant l'identité :

$$uv = \frac{1}{4}\left[(u+v)^2 - (u-v)^2\right]$$

on obtient deux carrés et une forme quadratique ne dépendant plus que de $(n-2)$ variables.

c) Le résultat s'obtient en appliquant autant de fois que nécessaire *a)* ou *b)* à la forme quadratique restante. L'indépendance des formes linéaires se vérifie par récurrence : dans le cas *a)*, seul le premier carré dépend de x_1 ; dans le cas *b)*, seuls les deux premiers carrés dépendent de x_1 et x_2.

Exercices - Exemples

E6 Décomposer en somme de carrés la forme quadratique :

$$q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$$

Ordonnons par rapport aux puissances de x_1 :

$$q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + (2x_2^2 + 3x_3^2)$$

$$= 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$$

$$q(\mathbf{x}) = 2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + 3x_3^2$$

E7 Décomposer en somme de carrés la forme quadratique :

$$q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_2x_4$$

Ordonnons par rapport aux deux variables x_1 et x_2:

$$q(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2(x_3 + 2x_4)$$

$$= 2(x_1 + x_3 + 2x_4)(x_2 - 2x_3) + 4x_3(x_3 + 2x_4)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + 2x_4 + x_2 - 2x_3)^2 - \frac{1}{2}(x_1 + x_3 + 2x_4 - x_2 + 2x_3)^2 + 4x_3^2 + 8x_3x_4$$

$$= \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4)^2 - \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 + (2x_3 + 2x_4)^2 - 4x_4^2$$

TESTS

Décomposer en somme de carrés les formes quadratiques suivantes :

T13 $9x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3$

T14 $4x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3$

T15 $4x_1^2 + 2x_2^2 + 10x_3^2 + 4x_4^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3 + 4x_2x_4 - 8x_3x_4$

Réponses

T13 $(3x_1 - x_2 - x_3)^2 + (2x_2 - x_3)^2 + 5x_3^2$

$\boxed{T_{14}}$ $\frac{1}{2}(x_1+2x_2+x_3)^2-\frac{1}{2}(x_1-2x_2)^2-\frac{1}{2}x_3^2$

$\boxed{T_{15}}$ $(2x_1+x_2-x_3)^2+(x_2-3x_3+2x_4)^2$
$+(x_3+x_4)^2-(x_3-x_4)^2$

6.4.5. Loi d'inertie de Sylvester

Les méthodes des paragraphes précédents donnent deux moyens de décomposer une forme quadratique q en une somme de carrés. Les résultats obtenus ne sont pas nécessairement identiques mais certains paramètres sont les mêmes pour toutes les décompositions.

Loi d'inertie. – **Le nombre de carrés positifs et le nombre de carrés négatifs sont indépendants de la décomposition de q considérée.**

Soit : $q(\mathbf{x}) = {}^tXAX$

Dans la base $(\mathbf{V}_1,\dots,\mathbf{V}_n)$ de vecteurs propres de A considérée au § 6.4.3., on a :

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2$$

Supposons : $\lambda_i > 0$ pour $i = 1,\dots,p$
$\lambda_i \leqslant 0$ pour $i \geqslant p+1$

Soit : $q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i^2$

une autre décomposition correspondant à une base $(\mathbf{W}_1,\dots,\mathbf{W}_n)$ avec :

$\mu_i > 0$ pour $i = 1,\dots,p'$
$\mu_i \leqslant 0$ pour $i \geqslant p'+1$

Si $p > p'$, alors $p + (n-p') > n$ et les vecteurs $\mathbf{V}_1,\dots,\mathbf{V}_p,\mathbf{W}_{p'+1},\dots,\mathbf{W}_n$ sont liés ce qui peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^{p} \gamma_i \mathbf{V}_i = \sum_{i=p'+1}^{n} \delta_i \mathbf{W}_i = \mathbf{x}$$

$(\mathbf{V}_1,\dots,\mathbf{V}_p)$ étant linéairement indépendants, le vecteur $\mathbf{x}$ est non nul. Ce vecteur vérifie $q(\mathbf{x}) > 0$ et $q(\mathbf{x}) \leqslant 0$ ce qui est impossible.
On a donc $p \leqslant p'$ et de même $p' \leqslant p$ ce qui donne $p = p'$. Même démonstration pour le nombre de carrés négatifs.

6.4.6. Formes quadratiques positives

Une **forme quadratique** q est dite **positive** si :

$$q(\mathbf{x}) \geqslant 0 \qquad \forall \mathbf{x}$$

Si A est la matrice associée à la forme quadratique par rapport à une base orthonormée, q est positive si et seulement si les valeurs propres de A vérifient $\lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i$.
En effet, en se plaçant dans une base orthonormée formée de vecteurs propres de A, on a :

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2$$

où $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ sont les valeurs propres de A.

D'après le § 6.4.3., une forme quadratique positive est décomposable en une somme d'au plus n carrés positifs.

Une **forme quadratique** q est dite **définie positive** si :

$$q(\mathbf{x}) > 0 \qquad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

q est définie positive si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes strictement positives. q est alors décomposable en une somme de n carrés positifs.

TESTS

$\boxed{T_{16}}$ α désignant un paramètre réel, on considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2\alpha & -2-2\alpha \\ 2\alpha & 2-\alpha & -2 \\ -2-2\alpha & -2 & 3+\alpha \end{bmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres de A.

2) En déduire que pour $-2 \leqslant \alpha \leqslant 1$:
$4x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_3-4x_2x_3$
$\geqslant \alpha(x_2^2-x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3)$
$\forall x_1, x_2, x_3$

$\boxed{T_{17}}$ Soit B la matrice carrée d'ordre n définie par :

$b_{ii} = 2$
$b_{i,i-1} = b_{i,i+1} = 1$
$b_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \{i-1, i, i+1\}$

1) Montrer que pour $1 \leqslant k \leqslant n$ le vecteur $\mathbf{V}_k$ de composantes $(\sin k\theta, \sin 2k\theta, \dots, \sin nk\theta)$ avec $\theta = \frac{\pi}{n+1}$ est vecteur propre de B associé à la valeur propre $\lambda_k = 2 + 2\cos k\theta$.

2) En déduire que :

$$x_n^{\,2} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\,(x_i + x_{i+1}) > 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$$

Réponses

T_{16} 1) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 3 - 3\alpha$; $\lambda_3 = 6 + 3\alpha$

2) La forme quadratique ${}^tXAX$ est positive pour $-2 \leqslant \alpha \leqslant 1$. D'où l'inégalité.

T_{17} 1) $\sin(i-1)\,k\theta + 2\sin ik\theta + \sin(i+1)\,k\theta = (2 + 2\cos k\theta)\sin ik\theta$

2) La forme quadratique ${}^tXBX$ est définie positive car les valeurs propres de B vérifient $\lambda_k > 0 \quad \forall k$. D'où l'inégalité.

*6.5. Espaces Hermitiens

On peut adapter au cas des espaces vectoriels complexes les paragraphes 6.1. à 6.3.

6.5.1. Espaces hermitiens

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ et $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ une base de E. On appelle **produit scalaire hermitien** de deux vecteurs $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ le scalaire :

$$(\mathbf{V} \mid \mathbf{V}') = v_1\ \overline{v_1'} + \ldots + v_n\ \overline{v_n'}$$

ou sous forme matricielle ${}^tV\overline{V'}$.

Ce produit n'est pas commutatif : quand on échange les deux vecteurs, le produit est remplacé par son conjugué.

La **norme hermitienne d'un vecteur V** est par définition :

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{(\mathbf{V} \mid \mathbf{V})} = \sqrt{|v_1|^2 + \ldots + |v_n|^2}$$

E muni du produit scalaire hermitien est appelé **espace hermitien.**

On dit que deux **vecteurs** sont **orthogonaux** (au sens du produit scalaire hermitien) si $(\mathbf{V} \mid \mathbf{V}') = 0$.

Une base orthonormée de E est définie par :

$$(\mathbf{V}_i \mid \mathbf{V}_j) = \delta_{ij}$$

6.5.2. Matrices unitaires

On appelle **matrice unitaire** toute matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ telle que :

$$\boxed{A^{-1} = {}^t\overline{A}}$$

La matrice ${}^t\overline{A}$ est notée A^* et appelée **matrice adjointe** de la matrice A.

Des démonstrations analogues à celles du § 6.2. donnent les propriétés suivantes :

1) Soit E un espace hermitien rapporté à une base orthonormée. Si A est une matrice unitaire, l'endomorphisme f de E associé à A fait correspondre à tout vecteur un vecteur de même norme hermitienne :

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\| \qquad \forall \mathbf{x} \in E$$

On dit que f est un **opérateur unitaire.**

2) Pour que A soit unitaire, il faut et il suffit que ses vecteurs colonnes (resp. lignes) forment une base orthonormée de $\mathbf{C}^n$ (pour le produit scalaire hermitien).

3) La matrice de passage d'une base orthonormée de $\mathbf{C}^n$ à une autre est une matrice unitaire.

4) Le produit de deux matrices unitaires est une matrice unitaire.

5) Le déterminant d'une matrice unitaire est de module 1.

6) **Les valeurs propres d'une matrice unitaire sont de module 1** car pour un vecteur propre $\mathbf{V}$:

$$\|f(\mathbf{V})\| = |\lambda| \,.\, \|\mathbf{V}\| = \|\mathbf{V}\|$$

Remarque. – Une matrice réelle orthogonale est un cas particulier de matrice unitaire. Donc, les valeurs propres d'une matrice orthogonale sont de module 1.

6.5.3. Matrices hermitiennes

On appelle **matrice hermitienne** (ou **auto-adjointe**) toute matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant

$$\boxed{A = A^*}$$

ce qui entraîne en particulier que les éléments diagonaux sont réels.

On démontre comme au § 6.3. les propriétés suivantes :

1) Soit E un espace hermitien rapporté à une base orthonormée. Si A est une matrice hermitienne, l'endomorphisme f de E associé à A vérifie :

$$(\mathbf{x} \mid f(\mathbf{y})) = (f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{y}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$$

On dit alors que f est un **opérateur hermitien** (ou **auto-adjoint**).

2) Si A est une matrice hermitienne :

$$ {}^t\overline{Y}AX = \overline{({}^t\overline{X}AY)} \qquad \forall X,\ Y $$

3) Si A est hermitienne et P unitaire, alors $A' = P^{-1}AP$ est hermitienne.

4) **Les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont toutes réelles** : on applique 2) en prenant pour X et Y un vecteur propre **V**.

5) **Deux vecteurs propres d'une matrice hermitienne associés à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux** (au sens du produit scalaire hermitien).

6) Toute matrice hermitienne A est diagonalisable par une matrice unitaire : il existe une matrice unitaire P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Remarque. – Une matrice symétrique réelle est un cas particulier de matrice hermitienne.

TESTS

$\boxed{T_{18}}$ Vérifier que si A est une matrice réelle d'ordre n antisymétrique, $i\,A$ est une matrice hermitienne. En déduire que toutes les valeurs propres non nulles de A sont imaginaires pures.

$\boxed{T_{19}}$ Déterminer toutes les matrices unitaires d'ordre 2.

$\boxed{T_{20}}$ Déterminer une base orthonormée de $\mathbf{C}^3$ formée de vecteurs propres de la matrice:

$$\begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 1 & i \\ 0 & -i & 2 \end{bmatrix}$$

Réponses

T_{18} $(i\,A)^* = -\,i\ {}^tA = i\,A$

Les valeurs propres de $i\,A$ sont toutes réelles.

T_{19} $A = \begin{bmatrix} a & \lambda\overline{b} \\ b & -\lambda\overline{a} \end{bmatrix}$

avec : $|\lambda| = 1$ et $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

T_{20} $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$

$\mathbf{V}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2i}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$

$\mathbf{V}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\mathbf{V}_3 = \left(\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-i}{\sqrt{3}}\right)$