3. Déterminants

3.1. Permutations

On appelle **permutation** P de l'ensemble fini $A = \{1, 2,..., n\}$ toute bijection de A sur lui-même. Si $P(i) = \alpha_i$, on écrit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

L'ensemble des permutations de A est noté G_n et appelé $n^{\text{ème}}$ groupe symétrique.

On appelle **transposition** toute permutation qui échange deux éléments de A et laisse invariants les $(n-2)$ autres. La transposition τ_{ij} qui échange i et j s'écrit :

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

On appelle **nombre d'inversions d'une permutation** le nombre I de couples (i, j) tels que $i < j$ et $\alpha_i > \alpha_j$ (on dit alors que α_i et α_j présentent une inversion).

On appelle **signature d'une permutation** P le nombre $\sigma_P = (-1)^I$.

Propriétés des permutations. –

On démontre les propriétés suivantes :

a) toute permutation est un produit de transpositions ;

b) pour une transposition : $\sigma = -1$;

c) pour deux permutations : $\sigma_{(P \circ P')} = \sigma_P \ \sigma_{P'}$

En particulier, P et P^{-1} ont même signature.

3.2. Formes n - linéaires alternées

3.2.1. Définition

E désignant un espace vectoriel de dimension n sur K, on appelle **forme n - linéaire alternée sur E** une application $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2,..., \mathbf{V}_n) \to f(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2,..., \mathbf{V}_n)$ de E^n dans K telle que :

a) f est une fonction linéaire de chaque vecteur :

$$f(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_i + \mathbf{V}'_i,..., \mathbf{V}_n)$$
$$= f(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_i,..., \mathbf{V}_n) + f(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}'_i,..., \mathbf{V}_n)$$
$$f(\mathbf{V}_1,..., \lambda \mathbf{V}_i,..., \mathbf{V}_n) = \lambda f(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_i,..., \mathbf{V}_n)$$

b) La transposition de 2 vecteurs change $f(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_n)$ en son opposé :

$$f(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_i,.., \mathbf{V}_j,.., \mathbf{V}_n) = -f(\mathbf{V}_1,.., \mathbf{V}_j,.., \mathbf{V}_i,.., \mathbf{V}_n)$$

3.2.2. Propriétés

a) $$f\left(\mathbf{V}_1,..., \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{V}_i^{(j)},..., \mathbf{V}_n\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_i^{(j)},..., \mathbf{V}_n)$$

cette relation résulte de la linéarité.

b) Si $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_j$ avec $i \neq j$, alors $f(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_n) = 0$ car lorsqu'on transpose $\mathbf{V}_i$ et $\mathbf{V}_j$, $f(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_n)$ se change en son opposé.

c) Si $\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_n$ sont liés, alors $f(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_n) = 0$ car l'un des vecteurs s'écrit $\mathbf{V}_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{V}_j$ et on applique les propriétés *a)* et *b)*.

d) Toutes les formes n-linéaires alternées sur E sont proportionnelles :

si $(\mathbf{e}_1,..., \mathbf{e}_n)$ est une base de E et

si $\mathbf{V}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \mathbf{e}_i$ $(j = 1,..., n)$, alors :

$$\boxed{f(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_n) = \left[\sum_{P \in G_n} \sigma_P \, a_{P(1),1} \dots a_{P(n),n}\right] f(\mathbf{e}_1,..., \mathbf{e}_n)}$$

En effet :

$$f(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} \mathbf{e}_{i_1},..., \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} \mathbf{e}_{i_n}\right)$$
$$= \sum_{i_1,...,i_n} a_{i_1,1} \dots a_{i_n,n} f(\mathbf{e}_{i_1},..., \mathbf{e}_{i_n})$$

Les seuls termes non nuls correspondent aux indices $i_1,..., i_n$ deux à deux distincts donc formant une permutation P de $\{1, 2,..., n\}$:

$$f(\mathbf{V}_1,..., \mathbf{V}_n) = \sum_{P \in G_n} a_{P(1),1} \dots a_{P(n),n} \ f(\mathbf{e}_{P(1)},..., \mathbf{e}_{P(n)})$$

Or P est le produit de r transpositions et $\sigma_P = (-1)^r$.

On passe de $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ à $(\mathbf{e}_{P(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{P(n)})$ en faisant r transpositions, chacune d'elle changeant le signe de f :

$$f(\mathbf{e}_{P(1)}, \ldots, \mathbf{e}_{P(n)}) = (-1)^r \, f(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$$
$$= \sigma_P \; f(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$$

ce qui démontre la formule.

e) Il existe une forme n-linéaire alternée unique D sur E telle que $D(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$.

Si D existe, d'après *d)*, on a :

$$D(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n) = \sum_{P \in G_n} \sigma_P \; a_{P(1),1} \cdots a_{P(n),n}$$

ce qui prouve l'unicité. On vérifie que la formule précédente définit une forme n-linéaire alternée.

3.3. Définition des déterminants

E étant rapporté à une base $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, on appelle **déterminant des n vecteurs $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n$ par rapport à la base $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$** le scalaire :

$$D(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n) = \sum_{P \in G_n} \sigma_P \; a_{P(1),1} \cdots a_{P(n),n}$$

où l'on a posé :

$$\mathbf{V}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \; \mathbf{e}_i \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

On appelle **déterminant de la matrice $A = [a_{ij}]$ carrée d'ordre n** le déterminant des n vecteurs colonnes de A par rapport à la base canonique de K^n :

$$\boxed{det(A) = \sum_{P \in G_n} \sigma_P \; a_{P(1),1} \cdots a_{P(n),n}}$$

On utilisera aussi les notations :

$$D(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n) \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

n est appelé l'**ordre du déterminant**.

Remarque. – Le déterminant n'est défini que pour n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n. On ne peut donc envisager le déterminant d'une matrice que pour une matrice carrée.

Calcul des déterminants d'ordre 2. –

Il y a deux permutations dans G_2 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_P = +1$$

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \sigma_{P'} = -1$$

On a donc :

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}$$

On retrouve cette formule en utilisant le schéma ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \\ - & & + \end{array}$$

Le produit affecté du signe + correspond aux éléments de la diagonale principale et le produit affecté du signe – aux éléments de l'autre diagonale.

Calcul des déterminants d'ordre 3. –

Il y a 6 permutations de $\{1, 2, 3\}$:

123 231 312 avec $\sigma_P = +1$

321 132 213 avec $\sigma_P = -1$

ce qui donne :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{l} a_{11} \, a_{22} \, a_{33} + a_{21} \, a_{32} \, a_{13} + a_{31} \, a_{12} \, a_{23} \\ - a_{31} \, a_{22} \, a_{13} - a_{11} \, a_{32} \, a_{23} - a_{21} \, a_{12} \, a_{33} \end{array}$$

Règle de Sarrus. – Pour retrouver la formule ci-dessus, on recopie sous le déterminant les deux premières lignes. Le schéma permet d'obtenir :

a) les trois produits affectés du signe + en considérant les parallèles à la diagonale principale ;

b) les trois produits affectés du signe – en considérant les parallèles à l'autre diagonale :

$$\begin{array}{ccccc} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ - & a_{11} & a_{12} & a_{13} & + \\ - & a_{21} & a_{22} & a_{23} & + \\ - & & & & + \end{array}$$

Remarque importante. – La règle précédente ne s'étend pas aux déterminants d'ordre supérieur à 3.

Exercice - Exemple

E₁ Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} a & 1 & \dfrac{\operatorname{sh} a}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \operatorname{ch} a & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\operatorname{sh} a & 1 \end{vmatrix}$$

On développe par la règle de Sarrus :

$$D = \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a + 2 - \sqrt{2}\operatorname{ch} a \operatorname{sh} a + \sqrt{2}\operatorname{ch} a \operatorname{sh} a - 1$$
$$= \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a + 1 = 2$$

TESTS

Calculer les déterminants suivants :

T₁ $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ c-id & a-ib \end{vmatrix}$

T₂ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 8 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

T₃ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

T₄ $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & z & 0 \end{vmatrix}$

Réponses

T₁ $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$

T₂ -4

T₃ 0

T₄ $2\,xyz$

3.4. Propriétés des déterminants

a) **On ne change pas la valeur d'un déterminant en échangeant lignes et colonnes :**

$$\boxed{\det({}^tA) = \det(A)}$$

Soit : $A = \left[a_{ij}\right]$ et ${}^tA = \left[a'_{ij}\right]$ avec $a'_{ij} = a_{ji}$

$$\det({}^tA) = \sum_{P \in G_n} \sigma_P \, a'_{P(1),1} \cdots a'_{P(n),n}$$

$$= \sum_{P \in G_n} \sigma_P \, a_{1,P(1)} \cdots a_{n,P(n)}$$

En modifiant l'ordre des facteurs pour que le second indice varie en croissant, on a (puisque P et P^{-1} ont même signature) :

$$\det({}^tA) = \sum_{P \in G_n} \sigma_{P^{-1}} \, a_{P^{-1}(1),1} \cdots a_{P^{-1}(n),n}$$

Quand P décrit G_n, P^{-1} décrit aussi G_n et le second membre a donc pour valeur $\det(A)$.

Par suite, toute propriété qui sera démontrée pour les colonnes d'un déterminant sera aussi valable pour les lignes.

b) **Un déterminant est une fonction linéaire des éléments d'une rangée (ligne ou colonne)** car D est une fonction linéaire de chaque vecteur colonne (§ 3.2.2.). Propriété analogue pour les lignes d'après *a)*.

En particulier, si on multiplie une colonne (resp. ligne) par λ, le déterminant est multiplié par λ. Donc, si on multiplie une matrice d'ordre n par λ, son déterminant est multiplié par λ^n :

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

c) **Si on échange deux colonnes** (resp. **lignes**) **d'un déterminant, le déterminant change de signe,** d'après la définition des formes n-linéaires alternées.

d) **Si les vecteurs colonnes** (resp. **lignes**) **sont liés, le déterminant est nul** (§ 3.2.2.).

En particulier : un déterminant ayant une colonne (resp. ligne) nulle ou deux colonnes (resp. lignes) proportionnelles est nul.

e) **On ne modifie pas la valeur d'un déterminant en ajoutant à une colonne** (resp. **ligne**) **une combinaison linéaire des autres colonnes** (resp. **lignes**). En effet :

$$D(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j \mathbf{V}_j, \ldots, \mathbf{V}_n)$$
$$= D(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_i, \ldots, \mathbf{V}_n) + \sum_{j \neq i} \lambda_j D(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_j, \ldots, \mathbf{V}_n)$$
$$= D(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_i, \ldots, \mathbf{V}_n)$$

car tous les autres déterminants sont nuls (deux colonnes identiques).

Exercices - Exemples

E₂ Montrer sans le calculer que le déterminant suivant est nul :

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 3a+2 \\ b & 2 & 3b+4 \\ c & 3 & 3c+6 \end{vmatrix}$$

La $3^{ème}$ colonne s'obtient en ajoutant 3 fois la $1^{ère}$ colonne et 2 fois la $2^{ème}$ colonne. Les colonnes du déterminant sont liées et le déterminant est donc nul.

E₃ Montrer sans le calculer que le déterminant suivant est nul :

$$D = \begin{vmatrix} \sin\theta & 0 & -\sin\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin\theta & \sin 2\theta & \sin 3\theta \\ \sin\theta & \sin 2\theta & \sin 3\theta & \sin 4\theta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

Retranchons la $1^{ère}$ ligne de la $3^{ème}$:

$$D = \begin{vmatrix} \sin\theta & 0 & -\sin\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & \sin\theta & \sin 2\theta & \sin 3\theta \\ 0 & 2\sin\theta\cos\theta & 2\sin 2\theta\cos\theta & 2\sin 3\theta\cos\theta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

La $3^{ème}$ ligne est égale à la $2^{ème}$ multipliée par $2\cos\theta$. Le déterminant ayant deux lignes proportionnelles est donc nul.

TESTS

Montrer sans les calculer que les déterminants suivants sont nuls :

T_5
$$D = \begin{vmatrix} a & a+1 & \alpha & \alpha+2 \\ b & b+2 & \beta & \beta+4 \\ c & c-1 & \gamma & \gamma-2 \\ d & d+3 & \delta & \delta+6 \end{vmatrix}$$

T_6
$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta & \alpha \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta & \beta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta & \gamma \\ \cos 3\theta & \cos 4\theta & \cos 5\theta & \delta \end{vmatrix}$$

T_7 $D = \det(A)$ avec A matrice antisymétrique $({}^tA = -A)$ d'ordre impair $2p + 1$.

T_8 Montrer (sans le calculer) que le déterminant suivant est un polynôme divisible par $(x + 3)$:

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

T_9 Montrer (sans le calculer) que le déterminant suivant est un polynôme divisible par $(x - 1)$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ -7 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Réponses

T_5 Retrancher la $1^{ère}$ colonne de la $2^{ème}$ et la $3^{ème}$ de la $4^{ème}$. On a alors deux colonnes proportionnelles.

T_6 Ajouter la $1^{ère}$ colonne à la $3^{ème}$.

T_7 $\det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^{2p+1} \det(A)$ et $\det({}^tA) = \det(A)$.
Donc : $\det(A) = -\det(A)$.

T_8 Ajouter à la $1^{ère}$ ligne toutes les autres lignes.

T_9 Ajouter à la $1^{ère}$ ligne la $2^{ème}$ ligne et retrancher la $3^{ème}$.

3.5. Calcul des déterminants

Pour les déterminants d'ordre 2 ou 3, voir § 3.3.

3.5.1. Déterminant triangulaire

Propriété. – **Si la matrice A est triangulaire (ou diagonale) :**

$$\det(A) = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$$

En particulier : $\det(I) = 1$.

Supposons la matrice triangulaire supérieure :

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i > j$$

Le produit $\sigma_P\, a_{P(1),1} \ldots a_{P(n),n}$ est nul dès que $P(i) > i$ pour un indice i. Il ne reste alors que les permutations P vérifiant $P(i) \leqslant i$ pour tout i, ce qui impose $P(i) = i$, c'est-à-dire la permutation identique (de signature + 1). Pour une matrice triangulaire inférieure, on utilise la propriété 3.4.*a)*.

3.5.2. Développement par rapport aux éléments d'une rangée (ligne ou colonne)

Chacun des produits $\sigma_P\, a_{P(1),1} \ldots a_{P(n),n}$ contient un élément et un seul de la colonne j. Regroupons tous les produits contenant l'élément a_{ij}. Leur somme s'écrit $A_{ij}\, a_{ij}$. En procédant de même pour chaque i, on obtient le développement du déterminant par rapport aux éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne :

$$\Delta = \det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\, a_{ij}$$

Pour calculer A_{11}, on considère tous les produits de la forme :

$$\sigma_P \; a_{11} \; a_{P(2),2} \cdots a_{P(n),n}$$

qui s'écrivent aussi :

$$\sigma_Q \; a_{11} \; a_{Q(2),2} \cdots a_{Q(n),n}$$

où Q est la permutation de $\{2, 3,..., n\}$ définie par :

$$Q(i) = P(i) \qquad i = 2,..., n$$

Donc :

$$A_{11} = \sum_{Q \in G_{n-1}} \sigma_Q \; a_{Q(2),2} \cdots a_{Q(n),n}$$

c'est-à-dire la définition du déterminant Δ_{11} de la matrice B_{11} obtenue en supprimant dans A la $1^{\text{ère}}$ ligne et la $1^{\text{ère}}$ colonne.

Soit A' la matrice déduite de A par les transpositions successives de la $i^{\text{ème}}$ ligne avec les $(i-1)$ lignes qui la précèdent et de la $j^{\text{ème}}$ colonne avec les $(j-1)$ colonnes qui la précèdent. On a :

$$\Delta' = \det(A') = (-1)^{i-1+j-1}\,\Delta = (-1)^{i+j}\,\Delta$$

Les transpositions ont amené l'élément a_{ij} à la place de l'élément a_{11}, l'ordre des autres lignes et colonnes de A étant conservé. Dans le développement de Δ', le coefficient de a_{ij} est $\Delta'_{11} = \det(B'_{11})$ où B'_{11} est la matrice déduite de A' par suppression de la $1^{\text{ère}}$ ligne et la $1^{\text{ère}}$ colonne. Dans le développement de Δ, le coefficient de a_{ij} est donc :

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}}$$

où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice déduite de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Ce qui donne la formule de développement par rapport aux éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne :

$$\boxed{\Delta = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\; a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}\; a_{ij}}$$

Δ_{ij} est appelé **mineur relatif à l'élément a_{ij}** et A_{ij} **cofacteur** de a_{ij}.

En appliquant ce résultat à la matrice transposée de A, on obtient la formule de développement par rapport aux éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne :

$$\boxed{\Delta = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\; a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}\; a_{ij}}$$

Pour retenir le signe à affecter au mineur Δ_{ij}, on peut utiliser le schéma ci-dessous :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Il y a changement de signe au passage d'un élément d'une ligne ou d'une colonne au suivant et Δ_{11} est affecté du signe $+$.

3.5.3. Calcul pratique des déterminants

Les formules précédentes permettent de ramener le calcul d'un déterminant d'ordre n au calcul de n déterminants d'ordre $(n-1)$. On réduit ce nombre en faisant apparaître des éléments nuls dans la colonne (ou ligne) par rapport à laquelle on veut développer.

Pour cela, on ajoute à cette colonne (ou ligne) des multiples convenables des autres colonnes (ou lignes). On modifie en général simultanément plusieurs colonnes (ou lignes) mais on n'a pas le droit de les modifier toutes en même temps : **on doit toujours conserver au moins une colonne (ou ligne) inchangée.**

Exercices - Exemples

$\boxed{E_4}$ Calculer le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 6 & 5 & 2 \\ -1 & -4 & 6 & 5 \\ -2 & -6 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On fait apparaître trois zéros dans la première ligne : on retranche 2 fois la colonne 1 de la colonne 2, la colonne 1 de la colonne 3 et on ajoute la colonne 1 à la colonne 4 (on conserve la $1^{ère}$ colonne sans modification) :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 7 & 4 \\ -2 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Développons par rapport à la $1^{ère}$ ligne :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 7 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Ajoutons la $1^{ère}$ ligne à la $2^{ème}$ et à la $3^{ème}$:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 8 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2\,(30-48) = -\,36$$

Remarque. – Il existe en général plusieurs types de combinaisons linéaires permettant de calculer simplement un déterminant. Par exemple, dans D, on peut faire apparaître des zéros dans la première colonne, ou bien dans la dernière colonne...

E_5 Mettre sous forme d'un produit de facteurs le déterminant :

$$D = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

En développant ce déterminant par la règle de Sarrus, on obtient un polynôme de degré 5 par rapport à l'ensemble des variables a, b, c et il est difficile de le mettre sous forme d'un produit de facteurs. Avant de développer, faisons apparaître des facteurs communs en effectuant des combinaisons de lignes (ou colonnes). Retranchons la $1^{ère}$ colonne de la $2^{ème}$ et de la $3^{ème}$:

$$D = \begin{vmatrix} b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

On peut mettre en facteur $(a-b)$ dans la $2^{ème}$ colonne et $(a-c)$ dans la $3^{ème}$:

$$D = (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \\ a^2 & -a-b & -a-c \end{vmatrix}$$

Retranchons la $2^{ème}$ colonne de la $3^{ème}$:

$$D = (a-b)(a-c) \begin{vmatrix} b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \\ a^2 & -a-b & b-c \end{vmatrix}$$

$$D = (a-b)(a-c)(b-c) \begin{vmatrix} b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 1 \\ a^2 & -a-b & 1 \end{vmatrix}$$

Retranchons la $3^{ème}$ ligne de la $2^{ème}$ et développons :

$$D = (a-b)(a-c)(b-c) \begin{vmatrix} b+c & 1 & 0 \\ bc-a^2 & a+b+c & 0 \\ a^2 & -a-b & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = (a-b)(a-c)(b-c)\left[(b+c)(a+b+c)-(bc-a^2)\right]$$

soit : $D = (a-b)(a-c)(b-c)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$

E_6 Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \ldots a_1 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 \ldots a_2 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_3 & a_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Retranchons la colonne $(n-1)$ de la colonne n, puis la colonne $(n-2)$ de la colonne $(n-1)$,..., la colonne 1 de la colonne 2 :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_1 & a_2-a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \ldots & a_{n-1}-a_{n-2} & 0 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_2 & \ldots & a_{n-1}-a_{n-2} & a_n-a_{n-1} \end{vmatrix}$$

c'est un déterminant triangulaire qui a pour valeur :

$$D = a_1\,(a_2-a_1)\,(a_3-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})$$

E_7 Calculer, par récurrence sur n, le déterminant suivant **(déterminant de Van der Monde)** :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\,2} \ldots x_0^{\,n} \\ 1 & x_1 & x_1^{\,2} \ldots x_1^{\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^{\,2} \ldots x_n^{\,n} \end{vmatrix}$$

On fait apparaître n zéros dans la dernière ligne : de chaque colonne on retranche la colonne précédente multipliée par x_n en commençant par la dernière et en s'arrêtant à la deuxième. On obtient ainsi le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0-x_n & x_0(x_0-x_n) & \ldots & x_0^{\,n-1}(x_0-x_n) \\ 1 & x_1-x_n & x_1(x_1-x_n) & \ldots & x_1^{\,n-1}(x_1-x_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n-1}-x_n & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) & \ldots & x_{n-1}^{\,n-1}(x_{n-1}-x_n) \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne puis on met en facteur (x_0-x_n), (x_1-x_n),. . . :

$$D_n = (-1)^{n+2}(x_0-x_n)(x_1-x_n)\dots(x_{n-1}-x_n)\,\Delta$$

avec : $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

On a donc :

$$D_n = (x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})\,D_{n-1}$$
$$D_{n-1} = (x_{n-1}-x_0)\dots(x_{n-1}-x_{n-2})\,D_{n-2}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$D_2 = (x_2-x_0)(x_2-x_1)\,D_1$$
$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = (x_1-x_0)$$

Ce qui donne :

$$D_n = \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 0} (x_i - x_j)$$

On peut aussi calculer directement D_n. En développant, on obtient un polynôme homogène de degré $\frac{n(n+1)}{2}$ par rapport à l'ensemble des variables $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Ce polynôme s'annule lorsque $x_i = x_j$ avec $i \neq j$. Il est divisible par $(x_i - x_j)$ et donc par :

$$\prod_{n \geqslant i > j \geqslant 0} (x_i - x_j)$$

qui est un polynôme de degré $\frac{n(n+1)}{2}$. On a donc :

$$D_n = \lambda \prod_{n \geqslant i > j \geqslant 0} (x_i - x_j)$$

où λ est une constante. On obtient $\lambda = 1$ en remarquant que, dans chaque membre de cette égalité, le terme $x_n^{\,n}\, x_{n-1}^{\,n-1} \dots x_1$ a le même coefficient.

TESTS

Mettre sous forme d'un produit de facteurs les déterminants suivants :

T_{10} $$\begin{vmatrix} -a & b+c & b+c \\ a+c & -b & a+c \\ a+b & a+b & -c \end{vmatrix}$$

T_{11} $$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \sin a \\ 1 & \cos b & \sin b \\ 1 & \cos c & \sin c \end{vmatrix}$$

T_{12} $$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

T_{13} $$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}$$

T_{14} Déterminant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} x & x & x \dots & x & x \\ -x & 0 & x \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & -x & -x \dots & 0 & x \\ -x & -x & -x \dots & -x & 0 \end{vmatrix}$$

T_{15} $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 \dots & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 \dots & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 \dots & a_{n-2} & a_{n-2} \\ b_1 & b_2 & b_3 \dots & b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

T_{16} Déterminant d'ordre n dont les éléments diagonaux sont égaux à x et les autres éléments égaux à y.

T_{17} $$D_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & -1 & x \end{vmatrix}$$

(Etablir une relation de récurrence liant D_n et D_{n-1}).

T_{18} $$D_n^p = \begin{vmatrix} C_n^\circ & C_n^1 & C_n^p \\ C_{n+1}^\circ & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^p \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{n+p}^\circ & C_{n+p}^1 & C_{n+p}^p \end{vmatrix}$$

(Etablir une relation de récurrence entre $D_n^{\,p}$ et D_n^{p-1} en utilisant la relation de récurrence des coefficients du binôme).

T_{19} On considère le déterminant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

et on note Δ_n le déterminant obtenu en prenant $a_n = 0$.

1) Calculer Δ_n.

2) En déduire D_n

T20 Soit D_n le déterminant d'ordre n défini par :

$a_{ii} = \alpha^2, a_{i,i+1} = \alpha + 1, a_{i,i-1} = \alpha - 1$,

les autres a_{ij} étant nuls.

1) Déterminer une relation de récurrence définissant D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}.

2) On pose $B_n = D_n - D_{n-1}$. Calculer B_n en utilisant la relation trouvée au 1).

3) En déduire D_n.

Réponses

T10 $D = (a+b+c)^3$. Retrancher la $1^{\text{ère}}$ colonne des autres puis ajouter la $2^{\text{ème}}$ et la $3^{\text{ème}}$ ligne à la $1^{\text{ère}}$.

T11 $D = 4 \sin \dfrac{a-b}{2} \sin \dfrac{b-c}{2} \sin \dfrac{c-a}{2}$. Retrancher la $1^{\text{ère}}$ ligne des autres et transformer les différences en produits de sinus et cosinus.

T12 $D = (a^2 - b^2)^4$. Retrancher la $1^{\text{ère}}$ colonne de la $4^{\text{ème}}$ et la $2^{\text{ème}}$ de la $3^{\text{ème}}$ puis ajouter la $4^{\text{ème}}$ ligne à la $1^{\text{ère}}$ et la $3^{\text{ème}}$ à la $2^{\text{ème}}$.

T13 $D = (x+a+b+c)(x-a)(x-b)(x-c)$.
Ajouter à la $1^{\text{ère}}$ colonne toutes les autres. Puis faire apparaître des 0 sur la $1^{\text{ère}}$ ligne en ajoutant à chaque colonne un multiple de la $1^{\text{ère}}$ colonne.

T14 $D = x^n$. Ajouter la $1^{\text{ère}}$ ligne à chacune des autres lignes.

T15 $D = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \ldots (a_{n-1} - b_{n-1})$.
Retrancher de chaque colonne la précédente, de la $n^{\text{ème}}$ à la $2^{\text{ème}}$.

T16 $D = [x + (n-1)y](x-y)^{n-1}$. Ajouter toutes les lignes à la $1^{\text{ère}}$, puis retrancher la $1^{\text{ère}}$ colonne de toutes les autres.

T17 $D_n = x D_{n-1} + a_n$ (en développant par rapport à la dernière colonne).

$$D_n = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

T18 Retrancher de chaque ligne la ligne précédente de la $(p+1)^{\text{ème}}$ à la $2^{\text{ème}}$. La relation $C_m^j = C_{m-1}^{j-1} + C_{m-1}^j$ donne :

$$D_n^p = D_n^{p-1}, \; D_n^1 = 1.$$

T19 1) $\Delta_n = a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$. Retrancher la dernière ligne des autres lignes.

2) $D_n = \Delta_n + a_n D_{n-1}$

$$D_n = a_1 a_2 \ldots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

T20 1) $D_n = \alpha^2 D_{n-1} - (\alpha^2 - 1) D_{n-2}$. Développer par rapport à la $1^{\text{ère}}$ ligne.

2) $B_n = (\alpha^2 - 1) B_{n-1}$, $B_n = (\alpha^2 - 1)^n$

3) $D_n = D_1 + (\alpha^2 - 1)^2 + (\alpha^2 - 1)^3 + \ldots + (\alpha^2 - 1)^n$

$$D_n = \frac{1 - (\alpha^2 - 1)^{n+1}}{2 - \alpha^2} \quad \text{si} \quad \alpha \neq \pm\sqrt{2}$$

$$D_n = (n+1) \quad \text{si} \quad \alpha = \pm\sqrt{2}$$

3.6. Calcul de l'inverse d'une matrice

3.6.1. Matrice régulière

Une matrice A carrée d'ordre n est régulière si et seulement si ses vecteurs colonnes sont linéairement indépendants (§ 2.5.4.).

Propriétés. — *a)* **Pour que n vecteurs $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n$ de K^n soient linéairement indépendants, il faut et il suffit que $D(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n) \neq 0$.**

b) **Pour qu'une matrice $A \in M_n$ soit régulière, il faut et il suffit que son déterminant soit non nul.**

Si $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n$ sont liés, alors $D(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n) = 0$ (§ 3.4.). Donc si $D(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n) \neq 0$, les vecteurs sont linéairement indépendants.

Réciproquement, si $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n$ sont linéairement indépendants, ils forment une base et on a : (§ 3.2.2.)

$$D(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1 = \lambda D(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n)$$

Donc :

$$D(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n) \neq 0$$

3.6.2. Calcul de l'inverse d'une matrice

En développant $\det(A)$ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne, on a :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, a_{ij}$$

Si on remplace la $i^{\text{ème}}$ ligne du déterminant par la $k^{\text{ème}}$ (avec $k \neq i$) on obtient un déterminant nul (deux lignes identiques) :

$$0 = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, a_{kj} \qquad (\text{si } k \neq i)$$

Si A est inversible, $\det(A) \neq 0$ et les égalités précédentes peuvent s'écrire :

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{A_{ij}}{\det(A)}\, a_{kj} = \delta_{ik}$$

Si $B = \left[b_{ij}\right]$ est la matrice de $\mathbf{M}_n$ définie par :

$$b_{ji} = \frac{A_{ij}}{\det(A)}$$

on a : $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, b_{ji} = \delta_{ik}$

c'est-à-dire : $AB = I$.

B est donc la matrice inverse de A :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^{t}\!\left[A_{ij}\right]}$$

Pour obtenir A^{-1}, on divise par le déterminant de A la transposée de la matrice des cofacteurs.
On peut aussi commencer par transposer A puis diviser la matrice des cofacteurs de ${}^{t}A$ par le déterminant.

Remarque 1. — Dans certains cas particuliers (matrices triangulaires, matrices comportant de nombreux éléments nuls), la méthode vue au § 2.5.4. conduit plus rapidement au résultat.

Remarque 2. — On peut aussi utiliser pour calculer l'inverse d'une matrice les opérations par blocs (§ 2.7.).

Exercices - Exemples

$\boxed{\mathbf{E}_8}$ Calculer l'inverse de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Le déterminant Δ de A vaut : $\Delta = 9$. La matrice des cofacteurs est :

$$B = \begin{bmatrix} -13 & -4 & 7 \\ 10 & 1 & -4 \\ -8 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

On a donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\ {}^{t}B = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -13 & 10 & -8 \\ -4 & 1 & 1 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{E}_9}$ Dans $\mathbf{R}^3$ rapporté à la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, déterminer la matrice de la rotation d'angle θ autour du vecteur $(1, 1, 1)$.

Soit $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ une base orthonormée avec $\mathbf{e}'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Prenons $\mathbf{e}'_1$ dans le plan de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et orthogonal à $\mathbf{e}'_3$, soit :

$$\mathbf{e}'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

et : $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_3 \wedge \mathbf{e}'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

La rotation est représentée par une matrice A par rapport à la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ et par une matrice A' par rapport à la base $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$. Soit P la matrice de passage de la base $(\mathbf{e}_i)$ à la base $(\mathbf{e}'_i)$. On a :

$$A' = P^{-1} A P \quad \text{ou} \quad A = P A' P^{-1}$$

Or :

$$A' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$A = P A' P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

avec :

$$a = 1 + 2\cos\theta$$
$$b = 1 - \cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta$$
$$c = 1 - \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$$

TESTS

Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$\boxed{\mathbf{T}_{21}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{T_{22}}$ $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$

$\boxed{T_{23}}$ Les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbf{R}^4$:

$$\mathbf{V}_1 = (1, 2, 0, -2)$$
$$\mathbf{V}_2 = (2, -1, 1, 2)$$
$$\mathbf{V}_3 = (0, 5, 3, 1)$$
$$\mathbf{V}_4 = (-1, -2, 4, 3)$$

$\boxed{T_{24}}$ Dans $\mathbf{R}^3$ rapporté à la base canonique, on considère l'endomorphisme f de matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Quelle est la matrice de f par rapport à la base formée par les vecteurs :

$$\mathbf{V}_1 = (-3, 2, -1)$$
$$\mathbf{V}_2 = (2, 0, 2)$$
$$\mathbf{V}_3 = (-1, 1, 1)$$

$\boxed{T_{25}}$ Soit f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^3$ qui a pour matrice (par rapport aux bases canoniques) :

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Quelle est la matrice de f par rapport aux bases suivantes :
dans $\mathbf{R}^2$: $\mathbf{e}_1 = (1, 2)$; $\mathbf{e}_2 = (2, 3)$
dans $\mathbf{R}^3$: $\mathbf{f}_1 = (1, 2, 1)$; $\mathbf{f}_2 = (2, 0, -1)$
$\mathbf{f}_3 = (2, 1, -1)$

Réponses

T_{21} $\dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

T_{22} $\det(A) = (b-a)(c-a)(c-b)$ (Van der Monde)

$$\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} bc(c-b) & ca(a-c) & ab(b-a) \\ b^2-c^2 & c^2-a^2 & a^2-b^2 \\ c-b & a-c & b-a \end{bmatrix}$$

T_{23} Les vecteurs sont linéairement indépendants car :

$$D(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4) = 120 \neq 0$$

T_{24} $P = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T_{25} $A' = Q^{-1}AP$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.7. Produit de deux déterminants

3.7.1. Déterminant du produit de deux matrices

Propriété. – **Si A et B sont deux matrices de $\mathbf{M}_n(K)$:**

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$$

Soient $\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n$ les vecteurs colonnes de B. Si $f_A \in \mathcal{L}(K^n, K^n)$ est l'application linéaire associée à A, les vecteurs colonnes de AB sont $f_A(\mathbf{V}_1), \ldots, f_A(\mathbf{V}_n)$ et on a :

$$\det(AB) = D(f_A(\mathbf{V}_1), \ldots, f_A(\mathbf{V}_n))$$

D'après les propriétés de D, l'application :

$$\phi : (\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n) \to D(f_A(\mathbf{V}_1), \ldots, f_A(\mathbf{V}_n))$$

est une forme n-linéaire alternée sur E et on a :

$$\phi(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n) = D(\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n)\,\phi(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$$

soit :

$$\det(AB) = \det(B)\det(AI) = \det(B)\det(A)$$

Cas particuliers. – *a)* Si A est inversible :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

car : $\det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$.

b) Deux matrices semblables ont même déterminant :

$$\det(P^{-1} AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(A)$$

Définition. – On appelle **déterminant d'un endomorphisme** f le déterminant de la matrice de f par rapport à une base quelconque. La propriété *b)* montre que le résultat est indépendant de la base choisie.

*3.7.2. PRODUIT DE DEUX DÉTERMINANTS

La formule $\det(A) \det(B) = \det(AB)$ peut aussi s'écrire :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

avec : $\quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \; b_{kj}$

On dit que l'on a fait le **produit** des deux déterminants **lignes par colonnes** : on obtient l'élément c_{ij} à partir de la $i^{\text{ème}}$ ligne du premier déterminant et de la $j^{\text{ème}}$ colonne du deuxième.

Deux matrices transposées ayant même déterminant, on peut remplacer A ou B par sa transposée ce qui revient dans le déterminant correspondant à échanger lignes et colonnes.

On peut donc effectuer le produit de deux déterminants de 4 manières différentes :

a) lignes par colonnes ;

b) colonnes par colonnes : l'élément c_{ij} s'obtient à partir de la $i^{\text{ème}}$ colonne du premier déterminant et de la $j^{\text{ème}}$ colonne du deuxième ; .

c) lignes par lignes ;

d) colonnes par lignes.

Remarque. – En faisant le produit de deux déterminants des diverses manières possibles, on obtient des déterminants qui ont la même valeur mais n'ont pas en général les mêmes éléments.

Exercice - Exemple

E_{10} On considère le déterminant :

$$D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ a & x & b \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

1) Calculer $D^2(x)$ en faisant le produit lignes par lignes.

2) En déduire la valeur du déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2+2 & 4x+2 & 2x+2 \\ 4x+2 & x^2+13 & 4x+3 \\ 2x+2 & 4x+3 & x^2+5 \end{vmatrix}$$

1) *Le produit lignes par lignes donne :*

$$D^2(x) = \begin{vmatrix} x^2+2 & (a+1)x+b & 2x+2 \\ (a+1)x+b & x^2+a^2+b^2 & (b+2)x+a \\ 2x+2 & (b+2)x+a & x^2+5 \end{vmatrix}$$

2) *En faisant $a = 3$ et $b = 2$, on obtient :*

$$\Delta = D^2(x)$$

soit, en développant $D(x)$:

$$\Delta = (x^3 - 8x + 8)^2$$

TESTS

T_{26} En utilisant le produit des déterminants :

$$D = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{vmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{vmatrix}$$

démontrer l'identité :

$$(x\,x' + y\,y')^2 + (x\,y' - y\,x')^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2)$$

T_{27} En calculant D^2, montrer que :

$$D = \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{vmatrix} = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$$

$^*T_{28}$ On considère la matrice décomposée en blocs :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline O & A_4 \end{array}\right]$$

avec : $A_1, A_2, A_4 \in \mathbf{M}_n(K)$

1) Calculer $\det(A)$ lorsque $A_1 = I$ (ou $A_4 = I$).

2) Si $\det(A_1) = 0$, montrer que les vecteurs colonnes de A sont liés. En déduire que $\det(A) = 0$.

3) Si $\det(A_1) \neq 0$, montrer qu'il existe des matrices B_1, C_2, C_4 de $\mathbf{M}_n(K)$ telles

que :

$$A = \left[\begin{array}{c|c} B_1 & O \\ \hline O & I \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I & C_2 \\ \hline O & C_4 \end{array}\right]$$

En déduire que $\det(A) = \det(A_1)\det(A_4)$.

Réponses

T_{26} $D = (x^2 + y^2)$ $\qquad \Delta = (x'^2 + y'^2)$

En faisant le produit lignes par colonnes :

$$D\Delta = \begin{vmatrix} x\,x' + y\,y' & x\,y' - y\,x' \\ y\,x' - x\,y' & y\,y' + x\,x' \end{vmatrix}$$

$$= (x\,x' + y\,y')^2 + (x\,y' - y\,x')^2$$

T_{27} On effectue le produit lignes par lignes (ou colonnes par colonnes) :

$$D^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^4$$

$$D = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$$

car le développement de D contient le terme x^4.

T_{28} 1) Si $A_1 = I$, $\det(A) = \det(A_4)$
Si $A_4 = I$, $\det(A) = \det(A_1)$

2) Les n vecteurs colonnes de A_1 sont liés, donc aussi les n premiers vecteurs colonnes de A : $\det(A) = 0$.

3) $B_1 = A_1$, $C_2 = A_1^{-1} A_2$, $C_4 = A_4$

$\det(A) = \det(B_1)\det(C_4)$
$= \det(A_1)\det(A_4)$