6. Extension de la notion d'intégrale

6.1. Définitions

6.1.1. Intervalle d'intégration de la forme $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, +\infty[$

Soit f une fonction définie, continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_a^X f(x)\,dx$ admet une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(x)\,dx .$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est divergente.

De même si f est une fonction définie, continue sur l'intervalle $]-\infty, b]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ est dite convergente si l'intégrale $\int_{X'}^b f(x)\,dx$ admet une limite finie lorsque X' tend vers $-\infty$. On pose alors par définition :

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{X' \to -\infty} \int_{X'}^b f(x)\,dx .$$

Enfin si f est une fonction définie, continue sur $\mathbb{R}$, on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente si les intégrales $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ et $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ le sont, c étant un nombre réel arbitraire. On pose dans ce cas :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{X \to +\infty \\ X' \to -\infty}} \int_{X'}^X f(x)\,dx$$

X et X' étant supposés indépendants l'un de l'autre.

Exercice-Exemple

$\boxed{E_1}$ Déterminer la nature (convergence ou divergence) de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ pour α rationnel.

On a :

$$\int_1^X \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left[\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_1^X \\ \quad = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{X^{\alpha-1}} - 1\right) \quad si \ \alpha \neq 1 . \\ [\operatorname{Log} x]_1^X = \operatorname{Log} X \ \text{si} \ \alpha = 1 . \end{cases}$$

Or on sait que :

$$\lim_{X \to +\infty} \operatorname{Log} X = +\infty$$

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{1}{X^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 \ pour \ \alpha > 1 \\ +\infty \ pour \ \alpha < 1 . \end{cases}$$

On en déduit donc que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ *est convergente pour* $\alpha > 1$ *et divergente pour* $\alpha \leqslant 1$.
De plus, pour $\alpha > 1$, *on a :*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{X \to +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{X^{\alpha-1}} - 1\right)\right] = \frac{1}{\alpha - 1} .$$

6.1.2. Fonction f non bornée en a ou b $(a < b)$

Soit f une fonction définie, continue sur l'intervalle $[a, b[$ et telle que

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = -\infty .$$

On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente si l'intégrale $\int_a^X f(x)\,dx$ admet une limite finie lorsque

X tend vers b en restant inférieur à b. On pose dans ce cas :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{X \to b \\ X < b}} \int_a^X f(x)\,dx .$$

Dans le cas contraire on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est divergente.

De même pour une fonction f définie, continue sur l'intervalle $]a, b]$ et telle que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty ,$$

l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est dite convergente si l'intégrale $\int_{X'}^b f(x)\,dx$ admet une limite finie lorsque X' tend vers a en restant supérieur à a. On pose alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{X' \to a \\ X' > a}} \int_{X'}^b f(x)\,dx .$$

Si f est une fonction définie, continue sur l'intervalle $]a, b[$ et non bornée en a et b, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est dite convergente si les intégrales $\int_a^c f(x)\,dx$ et $\int_c^b f(x)\,dx$ le sont, c étant un élément arbitraire de l'intervalle $]a, b[$. On pose dans ce cas :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ou encore :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{X \to b, X < b \\ X' \to a, X' > a}} \int_{X'}^X f(x)\,dx$$

X et X' étant supposés indépendants l'un de l'autre.

Exercice-Exemple

E$_2$ Déterminer la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ pour α rationnel strictement positif.

Pour $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ est définie, continue sur l'intervalle $]0, 1]$ et vérifie :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^\alpha} = +\infty .$$

Il faut donc étudier la limite lorsque X' tend vers 0 en restant positif de l'intégrale

$$\int_{X'}^1 \frac{dx}{x^\alpha} .$$

On a :

$$\int_{X'}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left[\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{X'}^1 \\ = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1 - \dfrac{1}{(X')^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [\operatorname{Log} x]_{X'}^1 = -\operatorname{Log} X' & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

et

$$\lim_{\substack{X' \to 0 \\ X' > 0}} (-\operatorname{Log} X') = +\infty$$

$$\lim_{\substack{X' \to 0 \\ X' > 0}} \frac{1}{(X')^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 \text{ pour } 0 < \alpha < 1 . \\ +\infty \text{ pour } \alpha > 1 . \end{cases}$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ est donc convergente pour $0 < \alpha < 1$ et divergente pour $\alpha \geqslant 1$. Pour $0 < \alpha < 1$ on a :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\substack{X' \to 0 \\ X' > 0}} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{(X')^{\alpha-1}}\right) = \frac{1}{1-\alpha} .$$

TESTS

Déterminer la nature des intégrales suivantes en utilisant les définitions.

T$_1$ $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx .$

T$_2$ $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x}\,dx .$

T$_3$ $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} .$

T$_4$ $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} .$

T$_5$ $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} .$

T$_6$ $\int_2^3 \frac{dx}{x-2} .$

Réponses

T$_1$ Convergente.

T$_2$ Divergente.

$\boxed{T_3}$ Divergente.

$\boxed{T_4}$ Convergente.

$\boxed{T_5}$ Convergente.

$\boxed{T_6}$ Divergente.

6.2. Critères de convergence

Considérons deux fonctions f et g définies, continues sur l'intervalle $[a, b[$ (respectivement $]a, b]$ et $]a, b[$) avec : soit $b = +\infty$ (respectivement $a = -\infty$ et $a = -\infty$, $b = +\infty$).

soit f et g non bornées en b (respectivement en a et en a et b)

a étant supposé strictement plus petit que b.

On démontre les propositions suivantes :

Proposition 6.2.1.

Si f et g sont positives et vérifient $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x de l'intervalle $[a, b[$ (respectivement $]a, b]$ et $]a, b[$).

i) si l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ l'est aussi.

ii) si l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est divergente, l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ l'est aussi.

Proposition 6.2.2.

Si on a $|f(x)| \leqslant g(x)$ pour tout x de l'intervalle $[a, b[$ (respectivement $]a, b]$ et $]a, b[$) et si l'intégrale $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ l'est aussi.

Définition 6.2.1.

On dit que $f(x)$ et $g(x)$ sont équivalents lorsque x tend vers b et on écrit $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b$ si et seulement si :

$$f(x) = g(x)\,[1 + \varepsilon(x)] \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to b} \varepsilon(x) = 0\,.$$

Remarque. — $\lim_{x \to b} f(x)/g(x) = 1$ entraîne $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b$.

Exemples : Lorsque x tend vers 0 on a :

$$\sin x \sim x$$
$$\operatorname{tg} x \sim x$$
$$\mathrm{e}^x \sim 1 + x\,.$$

Proposition 6.2.3.

Si f et g sont de signe constant et si on a $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b$ (respectivement $x \to a$ et $x \to a$, $x \to b$) les intégrales $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

Remarque. — Pour déterminer la nature d'une intégrale il suffit de l'étudier au voisinage de la borne en laquelle la fonction à intégrer n'est pas continue.

On déduit de la proposition 6.2.3 et de l'étude des intégrales de la fonction $x \mapsto 1/x^\alpha$ (cf. exercices-exemples E_1 et E_2) la proposition suivante :

Proposition 6.2.4.

i) Soit f une fonction définie, continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$ telle que $f(x) \sim 1/x^\alpha$ quand $x \to +\infty$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente si $\alpha > 1$, divergente si $\alpha \leqslant 1$.

ii) Soit f une fonction définie, continue sur l'intervalle $]0, b]$ telle que $f(x) \sim 1/x^\alpha$ quand $x \to 0$, l'intégrale $\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente si $\alpha < 1$, divergente si $\alpha \geqslant 1$.

Remarque. — On a les mêmes résultats qu'en i) et ii) respectivement pour les intégrales $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercices-Exemples

$\boxed{E_3}$ Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{Log} x}\,.$$

Pour tout x de l'intervalle $[2, +\infty[$ *on a :*

$$0 \leqslant \operatorname{Log} x \leqslant x$$

donc

$$0 \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{\operatorname{Log} x}.$$

L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ *étant divergente d'après la proposition* 6.2.4 i), *l'intégrale* $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{Log} x}$ *l'est aussi (proposition* 6.2.1 ii)).

E₄ Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^n}{x^3+x+1}\,\mathrm{d}x$$

selon les valeurs de l'entier n.

La fonction $x \mapsto \frac{x^n}{x^3+x+1}$ *est définie, continue et positive sur l'intervalle* $[2, +\infty[$.

Lorsque x *tend vers* $+\infty$ *on a* :

$$\frac{x^n}{x^3+x+1} \sim x^{n-3} = \frac{1}{x^{3-n}}.$$

D'après les propositions 6.2.3 *et* 6.2.4 i) *on peut donc dire que l'intégrale* $\int_2^{+\infty} \frac{x^n}{x^3+x+1}\,\mathrm{d}x$ *est convergente pour* $3-n>1$ *c'est-à-dire* $n<2$ *et divergente pour* $n \geqslant 2$.

TESTS

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

T₇ $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x$.

T₈ $\int_{-\infty}^{2} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-3)(x^2+4)}$.

T₉ $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+3)}}$.

T₁₀ $\int_0^5 \frac{\mathrm{d}x}{x(x+2)^2}$.

T₁₁ $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

T₁₂ $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

T₁₃ $\int_{-\pi/3}^{0} \frac{2\,\mathrm{d}x}{\operatorname{tg}^3 x}$.

T₁₄ $\int_0^3 \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

T₁₅ $\int_0^1 \frac{\operatorname{Log}(\cos x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

T₁₆ $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x + 1}$.

T₁₇ $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc\,tg} x}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

T₁₈ $\int_{-2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

T₁₉ $\int_{-\infty}^{1} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x-2}\,\mathrm{d}x$.

T₂₀ $\int_{-\infty}^{0} \frac{\cos x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

T₂₁ $\int_1^{\pi/2} \frac{2\sin x}{x-1}\,\mathrm{d}x$.

T₂₂ $\int_2^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

T₂₃ $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

T₂₄ $\int_{-\infty}^{0} \frac{1+\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Réponses

T₇ Convergente, $\frac{x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+2)} \sim \frac{1}{x^2}$ quand $x \to +\infty$.

T₈ Convergente, $\frac{x}{(x-3)(x^2+4)} \sim \frac{1}{x^2}$ quand $x \to -\infty$.

T₉ Convergente, $\frac{1}{\sqrt{x(x+3)}} \sim \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{x}}$ quand $x \to 0$.

T₁₀ Divergente, $\frac{1}{x(x+2)^2} \sim \frac{1}{4x}$ quand $x \to 0$.

T₁₁ Divergente, $\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$ quand $x \to 0$.

T₁₂ Convergente, $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{x} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ quand $x \to 0$.

T₁₃ Divergente, $\dfrac{2}{\operatorname{tg}^3 x} \sim \dfrac{2}{x^3}$ quand $x \to 0$.

T₁₄ Convergente, $\dfrac{\operatorname{Log}(1+x)}{\sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$ quand $x \to 0$.

T₁₅ Convergente, $\dfrac{\operatorname{Log}(\cos x)}{x} \sim -\dfrac{x}{2}$ quand $x \to 0$.

T₁₆ Convergente, $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x + 1} \sim 2\,\mathrm{e}^{-x}$ quand $x \to +\infty$.

T₁₇ Convergente, $\dfrac{\operatorname{Arc\,tg} x}{x^3} \leqslant \dfrac{\pi}{2\,x^3}$ pour $x \geqslant 1$.

T₁₈ Convergente, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.

T₁₉ Convergente, $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{x-2}\right| \leqslant \mathrm{e}^{2x}$ pour $x \leqslant 1$.

T₂₀ Convergente, $\left|\dfrac{\cos x}{x^4+1}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^4+1}$.

T₂₁ Divergente, $\dfrac{2\sin x}{x-1} \geqslant \dfrac{1}{x-1} \geqslant 0$ pour $1 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $\displaystyle\int_1^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{x-1}$ divergente.

T₂₂ Convergente, $\dfrac{\operatorname{Log} x}{x^3} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ pour $x \geqslant 2$.

T₂₃ Convergente, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ quand $x \to 0$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ pour $x \geqslant 1$.

T₂₄ Divergente, $\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{x} \sim \dfrac{2}{x}$ quand $x \to 0$.

6.3. Changement de variable et intégration par parties

Les formules

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \qquad (1)$$

et

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u \qquad (2)$$

peuvent être utilisées dans les cas d'extension de la notion d'intégrale, elles s'interprètent alors ainsi :

Dans la formule (1), si l'une des intégrales est convergente, l'autre l'est aussi et les deux intégrales sont égales.

Dans la formule (2), si deux des termes sont finis, le troisième l'est aussi et ils sont liés par cette relation.

Exercice-Exemple

E₅ Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x .$$

On pose :

$$u = \frac{1}{x} \qquad \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$$

d'où

$$\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \qquad v = -\cos x .$$

La formule d'intégration par parties nous donne :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x .$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\cos x/x$ tend vers 0. Le terme $[-\cos x/x]_1^{+\infty}$ est donc fini.

On a d'autre part :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2} .$$

D'après les propositions 6.2.2 *et* 6.2.4 i) *l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ *est donc convergente. On en déduit que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ *est elle aussi convergente.*

TESTS

Déterminer la nature des intégrales suivantes.

T₂₅ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\,(x+2)^2}$.

T26 $\displaystyle\int_0^3 \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x-3)}$.

T27 $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} (\mathrm{tg}\,x + 1)\,\mathrm{d}x$.

T28 $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\mathrm{tg}^3\,x}\,\mathrm{d}x$.

T29 $\displaystyle\int_1^e \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{Log}\,x}$.

T30 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$.

T31 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$.

T32 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}\,x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Réponses

T25 Convergente, on pose $t = x + 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{t}(t+1)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{quand } t \to 0 .$$

T26 Divergente, on pose $t = x - 3$,

$$\frac{t+3}{(t+4)\,t} \sim \frac{3}{4\,t} \quad \text{quand } t \to 0 .$$

T27 Divergente, on pose $t = \mathrm{tg}\,x$,

$$\frac{t+1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t} \quad \text{quand } t \to -\infty .$$

T28 Convergente, on pose $t = \mathrm{tg}\,x$,

$$\frac{1}{t^3(1+t^2)^{3/2}} \sim \frac{1}{t^6} \quad \text{quand } t \to +\infty .$$

T29 Divergente, on pose $t = x - 1$,

$$\frac{(1+t)^2}{\mathrm{Log}\,(1+t)} \sim \frac{1}{t} \quad \text{quand } t \to 0 .$$

T30 Divergente, on pose $t = \frac{\pi}{2} - x$,

$$\frac{1}{1-\cos t} \sim \frac{2}{t^2} \quad \text{quand } t \to 0 .$$

T31 Convergente,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{2x^2}\,\mathrm{d}x ,$$

$\left[\dfrac{\sin 2x}{2x}\right]_1^{+\infty}$ est fini, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{2x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente car on a $\left|\dfrac{\sin 2x}{2x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2x^2}$.

T32 Convergente,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{Log}\,x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{Log}\,x}{x}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} ,$$

$\dfrac{\mathrm{Log}\,x}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ est convergente.