3. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On appelle équation différentielle linéaire du deuxième ordre une équation de la forme

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = f(x)\,.$$

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad \text{(I)}$$

où a, b et c sont des constantes données et f une fonction donnée.

On associe à l'équation (I) l'équation sans second membre

$$ay'' + by' + cy = 0\,. \qquad \text{(II)}$$

3.1. Théorème fondamental

On obtient l'intégrale générale d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants en ajoutant à une intégrale particulière de cette équation, l'intégrale générale de l'équation sans second membre associée.

En effet, soit y_0 une intégrale particulière de l'équation complète (I), y_0 vérifie

$$ay_0'' + by_0' + cy_0 = f(x)\,.$$

Effectuons le changement de fonction inconnue

$$y = y_0 + u\,.$$

L'équation (I) devient

$$a(y_0'' + u'') + b(y_0' + u') + c(y_0 + u) = f(x)$$

et en tenant compte de l'hypothèse y_0 solution de l'équation complète, il reste

$$au'' + bu' + cu = 0$$

donc u est solution de l'équation sans second membre (II), ce qui démontre le théorème.

Remarque. — Ce théorème s'applique aussi aux équations linéaires du second ordre à coefficients non constants et plus généralement à toutes les équations linéaires quel que soit leur ordre.

3.2. Résolution de l'équation sans second membre

$$ay'' + by' + cy = 0\,. \qquad \text{(II)}$$

On démontre que l'ensemble des solutions d'une telle équation est un espace vectoriel de dimension 2.

Ainsi, lorsqu'on connaît deux intégrales particulières linéairement indépendantes y_1 et y_2 d'une équation linéaire du second ordre sans second membre, l'intégrale générale de cette équation est $C_1\,y_1 + C_2\,y_2$, C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires.

Pour déterminer ces intégrales particulières de l'équation sans second membre, on cherche s'il existe des solutions de la forme

$$y = e^{rx} \quad \text{avec} \quad r \text{ complexe}\,.$$

On a donc

$$y' = r\,e^{rx}$$
$$y'' = r^2\,e^{rx}$$

soit en reportant dans (II)

$$(ar^2 + br + c)\,e^{rx} = 0\,.$$

Puisque e^{rx} ne s'annule jamais, r est solution de l'équation du second degré

$$ar^2 + br + c = 0$$

équation qui porte le nom d'**équation caractéristique.**

On distingue trois cas suivant le signe du discriminant :

1) $\Delta = b^2 - 4\,ac > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.

Le rapport des deux solutions e^{r_1x} et e^{r_2x} n'est pas constant, l'intégrale générale est

$$y = C_1\,e^{r_1x} + C_2\,e^{r_2x}$$

C_1 et C_2 constantes réelles.

2) $\Delta = b^2 - 4\,ac = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double $r_1 = r_2 = -\,b/2\,a$.

$\exp\left(-\dfrac{b}{2\,a}x\right)$ est solution de l'équation différentielle. La recherche des solutions sous la forme $y = e^{rx}$ conduit à un seul vecteur de base pour l'espace vectoriel des solutions qui est de dimension 2. On vérifie que $x\exp\left(-\dfrac{b}{2\,a}x\right)$ est un deuxième vecteur indépendant du premier qui complète la base.

L'intégrale générale est

$$y = (C_1\,x + C_2)\exp\left(-\frac{b}{2\,a}x\right)$$

C_1 et C_2 constantes réelles.

3) $\Delta = b^2 - 4\,ac < 0$, l'équation caractéristique est à coefficients réels, elle admet deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ (α partie réelle et β partie imaginaire des racines).

Les fonctions $e^{(\alpha + i\beta)x}$ et $e^{(\alpha - i\beta)x}$ forment une base de l'espace vectoriel des solutions. On a donc

$$y = e^{\alpha x}(K_1\,e^{i\beta x} + K_2\,e^{-i\beta x})$$

et d'après les formules d'Euler

$$y = e^{\alpha x}[(K_1 + K_2)\cos\beta x + i(K_1 - K_2)\sin\beta x]\,.$$

Pour obtenir des solutions réelles, on doit prendre $K_2 = \overline{K}_1$.

D'où la solution générale

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

C_1 et C_2 constantes réelles.

Remarque. — Lorsque Δ est négatif, on préfère, dans la résolution des problèmes physiques, exprimer la solution sous la forme :

$$y = C\,e^{\alpha x} \cos(\beta x - \varphi)$$

C et φ étant des constantes réelles arbitraires ;
C représente une amplitude et φ un angle de déphasage.

En utilisant les formules de transformation trigonométrique la solution

$$y = C\,e^{\alpha x} \cos(\beta x - \varphi)$$

s'écrit

$$y = C\,e^{\alpha x}(\cos \beta x \cos \varphi + \sin \beta x \sin \varphi) .$$

Les relations liant C, φ et C_1, C_2 sont donc :

$$\begin{cases} C \cos \varphi = C_1 \\ C \sin \varphi = C_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \varphi = \dfrac{C_2}{C_1} \\ C^2 = C_1^2 + C_2^2 . \end{cases}$$

Exercices-Exemples

E_1 *Résoudre* $y'' - 5y' + 6y = 0.$

L'équation caractéristique associée est

$$r^2 - 5r + 6 = 0 .$$

Les racines de cette équation du second degré sont

$$r_1 = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = 3 .$$

L'intégrale générale est

$$y = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{3x} .$$

C_1 et C_2 constantes arbitraires.

E_2 *Résoudre* $4y'' + 4y' + y = 0.$

L'équation caractéristique associée est

$$4r^2 + 4r + 1 = 0$$

qui admet une racine double $r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$.
L'intégrale générale est

$$y = (C_1 x + C_2)\,e^{-x/2}$$

C_1 et C_2 constantes arbitraires.

E_3 *Résoudre* $y'' + y' + y = 0.$

L'équation caractéristique associée est

$$r^2 + r + 1 = 0 .$$

Les racines complexes conjuguées sont $-\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

donc

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

L'intégrale générale est

$$y = e^{-x/2}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$$

C_1 et C_2 constantes arbitraires.
Ou encore

$$y = C\,e^{-x/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x - \varphi\right) ,$$

C et φ constantes arbitraires.

TESTS

Résoudre

T_1 $y'' + y' - 2y = 0 .$

T_2 $y'' + 2y' + 5y = 0 .$

T_3 $9y'' + 6y' + y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 1.$

T_4 $y'' - 4y = 0 .$

T_5 $y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(\pi) = -2 .$

T_6 $y'' + 4y' = 0 .$

T_7 Y désignant une fonction de la variable t, soit l'équation différentielle

$$Y'' - 2Y' + Y = \frac{2\,e^t}{(1+t)^3} . \qquad (1)$$

1) Vérifier que la fonction

$$Y_0(t) = \frac{e^t}{1+t}$$

est une solution de (1).
2) Résoudre l'équation (1).
3) Déterminer la solution de (1) que l'on désignera par $y(t)$ et qui est telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

T_8 Soit l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + y = 2\,e^{-x} . \qquad (1)$$

1) Vérifier que la fonction $y_0(x) = x^2\,e^{-x}$ est solution de (1).
2) Résoudre l'équation (1).
3) Déterminer la solution de (1) telle que $y(0) = 3$ et $y'(0) = 1$.

Réponses

T_1 $y = C_1\,e^{x} + C_2\,e^{-2x} .$

T_2 $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) .$
ou $y = C\,e^{-x} \cos(2x - \varphi) .$

T₃ $y = (2x + 3)\,e^{-x/3}$.

T₄ $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$.

T₅ $y = \cos 2x - \sin 2x$.

T₆ $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$.

T₇
$$Y_0'(t) = \frac{t\,e^t}{(1+t)^2}$$
$$Y_0''(t) = \frac{e^t}{1+t} - \frac{2\,t\,e^t}{(1+t)^3}.$$

$Y_0(t)$ vérifie la relation (1).
Sans second membre, l'équation admet la solution
$$(C_1\,t + C_2)\,e^t.$$

En appliquant le théorème fondamental, (1) admet pour solution
$$Y(t) = \left(C_1\,t + C_2 + \frac{1}{1+t}\right)e^t$$
$$y(0) = 1 \Rightarrow C_2 = 0$$
$$y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \text{ d'où } y(t) = \frac{e^t}{1+t}.$$

T₈ 1) $y_0'(x) = (2x - x^2)\,e^{-x}$
$y_0''(x) = (2 - 4x + x^2)\,e^{-x}$.

2) La solution générale de (1) est :
$$y = (x^2 + C_1\,x + C_2)\,e^{-x}.$$

3) Les conditions $y(0) = 3$ et $y'(0) = 1$ donnent $C_1 = 4$ et $C_2 = 3$
$$y = (x^2 + 4x + 3)\,e^{-x}.$$

3.3. Résolution de l'équation complète

Pour avoir la solution de l'équation complète, il faut ajouter à la solution générale de l'équation sans second membre une solution particulière de l'équation complète.

Dans la plupart des exemples physiques, le second membre est une fonction simple et la solution particulière de l'équation complète s'obtient directement (§ 3.3.1 à 3.3.5).

Dans le cas général, il faut appliquer la méthode de variation des constantes (§ 3.3.6).

3.3.1. Cas où le second membre est un polynôme de degré n

L'équation s'écrit
$$ay'' + by' + cy = P_n(x).$$

Si $c \neq 0$, on cherche une intégrale particulière sous la forme d'un polynôme de degré n.

Si $c = 0$ et $b \neq 0$, on cherche une intégrale particulière sous la forme d'un polynôme de degré $(n + 1)$.

Si $c = 0$ et $b = 0$, l'équation se réduit à $ay'' = P_n(x)$ et l'on intègre deux fois successivement.

Exercice-Exemple

E₄ *Résoudre*
$$y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x + 1.$$

L'équation sans second membre $y'' + y' - 2y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ qui admet les racines réelles 1 et -2.

L'intégrale générale de l'équation sans second membre est
$$C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Le second membre est un polynôme de degré 2 et la constante c n'est pas nulle. On cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme d'un polynôme de degré 2 à coefficients indéterminés
$$\begin{array}{r|l} -2 & y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ 1 & y' = 2\alpha x + \beta \\ 1 & y'' = 2\alpha. \end{array}$$

Plaçons les multiplicateurs 1 pour y'', 1 pour y' et -2 pour y en faisant bien attention à l'ordre. On obtient
$$y'' + y' - 2y = -2\alpha x^2 + (-2\beta + 2\alpha)\,x - 2\gamma + \beta + 2\alpha = 2x^2 - 3x + 1$$
égalité valable quel que soit x.

Soit en identifiant les termes de même degré
$$\begin{cases} -2\alpha = 2 \\ -2\beta + 2\alpha = -3 \\ -2\gamma + \beta + 2\alpha = 1 \end{cases}$$
$$\alpha = -1 \qquad \beta = \tfrac{1}{2} \text{ et } \gamma = -\tfrac{5}{4}.$$

La solution particulière de l'équation complète est donc
$$-x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{4}.$$

La solution générale de l'équation différentielle proposée est, d'après le théorème fondamental
$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - x^2 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{4}.$$

E₅ *Résoudre*
$$y'' + y' + 2y = 2x^2 - x + 3.$$

L'intégrale générale de l'équation sans second membre est
$$e^{-x/2}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right).$$

Le coefficient c n'est pas nul, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2, à coefficients indéterminés

$$\begin{array}{r|l} 2 & y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \\ 1 & y' = \quad 2\alpha x + \beta \\ 1 & y'' = \quad\quad 2\alpha\,. \end{array}$$

On obtient

$$y'' + y' + 2y = 2\alpha x^2 + (2\beta + 2\alpha)x + 2\gamma + \beta + 2\alpha = 2x^2 - x + 3\,.$$

Et en identifiant

$$\alpha = 1 \qquad \beta = -\tfrac{3}{2} \quad \text{et} \quad \gamma = \tfrac{5}{4}\,.$$

La solution particulière de l'équation complète est donc

$$x^2 - \tfrac{3}{2}x + \tfrac{5}{4}\,.$$

La solution générale de l'équation différentielle proposée est

$$y = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}\,.$$

E₆ *Résoudre* $y'' + 2y' = x^2 - 4x + 3.$

L'intégrale générale de l'équation sans second membre est

$$C_1 + C_2 e^{-2x}\,.$$

Le terme en y ne figure pas dans l'équation différentielle puisque le coefficient c est nul. On cherche alors une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 3 à coefficients indéterminés

$$\begin{array}{r|l} 0 & y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \\ 2 & y' = \quad 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \\ 1 & y'' = \quad\quad 6\alpha x + 2\beta\,. \end{array}$$

La constante δ disparaît ainsi de la solution particulière ; elle était déjà dans la solution générale de l'équation sans second membre sous l'écriture C_1.

On obtient

$$6\alpha x^2 + (4\beta + 6\alpha)x + 2\gamma + 2\beta = x^2 - 4x + 3$$

et en identifiant

$$\begin{aligned} 6\alpha &= 1 \\ 4\beta + 6\alpha &= -4 \\ 2\gamma + 2\beta &= 3 \end{aligned}$$

soit

$$\alpha = \tfrac{1}{6}\,, \qquad \beta = -\tfrac{5}{4} \quad \text{et} \quad \gamma = \tfrac{11}{4}\,.$$

La solution particulière de l'équation complète est donc

$$\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{5}{4}x^2 + \tfrac{11}{4}x\,.$$

La solution générale de l'équation différentielle proposée est

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{5}{4}x^2 + \tfrac{11}{4}x\,.$$

E₇ *Résoudre* $y'' = x^2 + x - 3.$

Les termes en y et y' ne figurent pas dans l'équation différentielle puisque les coefficients c et b sont nuls.

On intègre successivement deux fois

$$y' = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x + C_1$$

$$y = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x^2 + C_1 x + C_2\,.$$

La solution de cette équation différentielle du second ordre dépend bien de deux constantes arbitraires.

Remarque. — On pourrait utiliser la même méthode que dans les exemples précédents, mais cela serait plus lourd. En effet $r = 0$ est racine double de l'équation caractéristique donc

$$y = C_1 + C_2 x$$

est solution de l'équation sans second membre et la recherche des solutions particulières de l'équation complète devrait s'effectuer sous la forme d'un polynôme à coefficients indéterminés du quatrième degré $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2$.

TESTS

Résoudre

T₉ $y'' - 2y' + 5y = x^2\,.$

T₁₀ $2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} + y = x^2 - x + 5\,.$

T₁₁ $y'' - y' = x^2\,.$

T₁₂ $y'' = 2x^2 - 3x + 1\,.$

T₁₃ On considère l'équation différentielle

$$y'' + y = x^3 + x^2 + x + 1\,.$$

a) Intégrer cette équation différentielle.
b) Déterminer la solution de cette équation s'annulant pour $x = 0$ et $x = \pi/2$.

Réponses

T₉ $y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{25}x - \frac{2}{125}\,.$

T₁₀ $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x/2} + x^2 - 7x + 22\,.$

T11 $y = C_1 + C_2\,e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2\,x\,.$

T12 $y = \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^2}{2} + C_1\,x + C_2\,.$

T13
$$y = A\cos x + B\sin x + x^3 + x^2 - 5\,x - 1$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow B = -\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{5\,\pi}{2} + 1\,.$$

3.3.2. Cas où le second membre est de la forme $e^{mx}\,P_n(x)$, $m \in \mathbb{R}$, P_n polynôme de degré n

L'équation s'écrit

$$ay'' + by' + cy = e^{mx}\,P_n(x)\,.$$

On se ramène au cas précédent (§ 3.3.1) en effectuant le changement de fonction inconnue

$$y = e^{mx}\,z\,.$$

E8 *Résoudre* $y'' - y' - 2\,y = x^2\,e^{-3x}$.

Posons

$$\begin{array}{r|l} -2 & y = e^{-3x}\,z \\ -1 & y' = e^{-3x}(-3\,z + z') \\ 1 & y'' = e^{-3x}(9\,z - 6\,z' + z'')\,. \end{array}$$

L'équation devient :

$$e^{-3x}(z'' - 7\,z' + 10\,z) = x^2\,e^{-3x}$$

ou en divisant par e^{-3x} qui est différent de zéro pour tout x :

$$z'' - 7\,z' + 10\,z = x^2$$

équation à second membre polynomial qui admet pour solution particulière

$$z_0 = \frac{1}{10}x^2 + \frac{14}{100}x + \frac{78}{1\,000}\,.$$

L'équation proposée admet donc pour solution particulière $z_0\,e^{-3x}$ et en ajoutant la solution générale de l'équation sans second membre, on obtient :

$$y = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-x} + \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{14}{100}x + \frac{78}{1\,000}\right)e^{-3x}\,.$$

Remarque. — Au lieu de chercher une solution particulière de l'équation en z, on peut chercher la solution générale de cette équation. Il suffit d'ajouter à la solution particulière z_0, la solution générale de l'équation sans second membre, ce qui donne :

$$z = C_1\,e^{5x} + C_2\,e^{2x} + z_0$$

et en revenant en y, on retrouve :

$$y = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-x} + z_0\,e^{-3x}\,.$$

Cette méthode est particulièrement indiquée lorsque l'équation se réduit à la forme $z'' = g(x)$ (cf. E_{10}).

E9 *Résoudre*

$$y'' - y' - 6\,y = e^{-2x}(x^2 - x + 1)\,.$$

On pose

$$\begin{array}{r|l} -6 & y = e^{-2x}\,z \\ -1 & y' = e^{-2x}(-2\,z + z') \\ 1 & y'' = e^{-2x}(4\,z - 4\,z' + z'')\,. \end{array}$$

L'équation devient, après simplification par e^{-2x}

$$z'' - 5\,z' = x^2 - x + 1\,.$$

Elle admet la solution particulière

$$z_0 = -\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{50}x^2 - \frac{22}{125}x\,.$$

L'équation proposée a donc pour solution :

$$y = C_1\,e^{-2x} + C_2\,e^{3x} + \left(-\frac{1}{15}x^3 + \frac{3}{50}x^2 - \frac{22}{125}x\right)e^{-2x}\,.$$

E10 *Résoudre*

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = (x^2 - x)\,e^{2x}\,.$$

On pose

$$\begin{array}{r|l} 4 & y = e^{2x}\,z \\ -4 & y' = e^{2x}(2\,z + z') \\ 1 & y'' = e^{2x}(4\,z + 4\,z' + z'')\,. \end{array}$$

L'équation devient

$$z'' = x^2 - x$$

équation dont on obtient la solution générale en intégrant deux fois :

$$z = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + C_1\,x + C_2\,.$$

L'équation donnée a donc pour solution

$$y = \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + C_1\,x + C_2\right)e^{2x}\,.$$

Remarque. — Dans le cas particulier où le polynôme P_n se réduit à une constante, le second membre est de la forme $A\,e^{mx}$. Si m n'est pas racine de l'équation caractéristique, on obtient très simplement une solution particulière en cherchant y_0 sous la forme

$\lambda\,e^{mx}$. Par contre, si m est racine de l'équation caractéristique, e^{mx} est solution de l'équation sans second membre et il faut utiliser le changement de fonction inconnue $y = e^{mx} z$.

E₁₁ *Résoudre* $y'' + 2\,y' - 3\,y = e^{-2x}$.

-2 n'est pas racine de l'équation caractéristique. On cherche y_0 sous la forme $\lambda\,e^{-2x}$ ce qui donne :

$$(4\,\lambda - 4\,\lambda - 3\,\lambda)\,e^{-2x} = e^{-2x} \quad \text{et} \quad \lambda = -\tfrac{1}{3}$$

$y_0 = -\frac{1}{3}\,e^{-2x}$ est solution particulière de l'équation complète et la solution générale s'écrit :

$$y = C_1\,e^{-3x} + C_2\,e^{x} - \tfrac{1}{3}\,e^{-2x}.$$

E₁₂ *Résoudre* $y'' - y' - 2\,y = 3\,e^{-x}$.

-1 est racine de l'équation caractéristique.
Posons

$$\begin{array}{r|l} -2 & y = e^{-x} z \\ -1 & y' = e^{-x}(-z + z') \\ 1 & y'' = e^{-x}(z - 2\,z' + z''). \end{array}$$

Après simplification par e^{-x}, il reste :

$$z'' - 3\,z' = 3$$

qui admet la solution particulière $-x$.
L'équation donnée admet $-x\,e^{-x}$ comme solution particulière et la solution générale s'écrit :

$$y = C_1\,e^{-x} + C_2\,e^{2x} - x\,e^{x}.$$

TESTS

Résoudre

T₁₄ $y'' - y' + y = x^2\,e^{-x}$.

T₁₅ $y'' - 2\,y' - 3\,y = x\,e^{-x}$.

T₁₆ $4\,y'' + 4\,y' + y = x\,e^{-x/2}$.

T₁₇ $y'' + y' + y = e^{-2x}$.

T₁₈ $y'' + 3\,y' - 4\,y = e^{x}$.

T₁₉ $9\,y'' - 6\,y' + y = e^{x/3}$.

T₂₀ $y'' + 3\,y' = x\,e^{-3x}$.

T₂₁ $y'' + 2\,y' + y = 4\,e^{3x}$.

T₂₂ Intégrer l'équation différentielle

$$y'' - 2\,my' + y = e^{x}$$

lorsque m est un paramètre compris entre -1 et $+1$.
Etudier les cas particuliers $m = +1$ et $m = -1$.

Réponses

T₁₄ $$y = e^{x/2}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \left(\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{9}\right)e^{-x}.$$

T₁₅ $$y = \left(-\tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x + C_1\right)e^{-x} + C_2\,e^{3x}.$$

T₁₆ $$y = e^{-x/2}\left(\frac{x^3}{24} + C_1\,x + C_2\right).$$

T₁₇ $$y = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \tfrac{1}{3}\,e^{-2x}.$$

T₁₈ $$y = \left(\tfrac{1}{5}x + C_1\right)e^{x} + C_2\,e^{-4x}.$$

T₁₉ $$y = \left(\tfrac{1}{18}x^2 + C_1\,x + C_2\right)e^{x/3}.$$

T₂₀ $$y = C_1 - \left(\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{9}x + C_2\right)e^{-3x}.$$

T₂₁ $$y = \tfrac{1}{4}\,e^{3x} + (C_1\,x + C_2)\,e^{-x}.$$

T₂₂ $$y = \frac{e^{x}}{2(1-m)} + e^{mx}\left(C_1 \cos\sqrt{1-m^2}\,x + C_2 \sin\sqrt{1-m^2}\,x\right) \quad \text{si} \quad |m| < 1$$

$$y = \frac{e^{x}}{4} + (C_1\,x + C_2)\,e^{-x} \quad \text{si} \quad m = -1$$

$$y = \frac{x^2}{2}\,e^{x} + (C_1\,x + C_2)\,e^{x} \quad \text{si} \quad m = 1.$$