Daniel ALIBERT

Séries numériques. Séries de fonctions. Séries entières. Séries de Fourier.

Objectifs :

Savoir déterminer la convergence d'une série numérique. Calculer une valeur approchée ou déterminer l'expression exacte de la somme d'une série. Connaître les notions de convergence ponctuelle, convergence uniforme, convergence normale, d'une série de fonctions. Etudier la convergence d'une série entière ou d'une série de Fourier, et les propriétés de sa somme. Utiliser les séries entières ou de Fourier pour résoudre divers problèmes : calcul d'intégrale, sommation d'expressions, résolution d'équations différentielles, développement d'une fonction.

Organisation, mode d'emploi

Cet ouvrage, comme tous ceux de la série, a été conçu en vue d'un usage pratique simple.

Il s'agit d'un livre d'exercices corrigés, avec rappels de cours.

Il ne se substitue en aucune façon à un cours de mathématiques complet, il doit au contraire l'accompagner en fournissant des exemples illustratifs, et des exercices pour aider à l'assimilation du cours.

Ce livre a été écrit pour des étudiants de première et seconde années des Licences de sciences, dans les parcours où les mathématiques tiennent une place importante.

Il est le fruit de nombreuses années d'enseignement auprès de ces étudiants, et de l'observation des difficultés qu'ils rencontrent dans l'abord des mathématiques au niveau du premier cycle des universités :

- difficulté à valoriser les nombreuses connaissances mathématiques dont ils disposent lorsqu'ils quittent le lycée,
- difficulté pour comprendre un énoncé, une définition, dès lors qu'ils mettent en jeu des objets abstraits, alors que c'est la nature même des mathématiques de le faire,
- difficulté de conception et de rédaction de raisonnements même simples,
- manque de méthodes de base de résolution des problèmes.

L'ambition de cet ouvrage est de contribuer à la résolution de ces difficultés aux côtés des enseignants.

Ce livre comporte quatre parties.

La première, intitulée "A Savoir", rassemble les définitions et résultats qui sont utilisés dans les exercices qui suivent. Elle ne contient ni démonstration, ni exemple.

La seconde est intitulée "Pour Voir" : son rôle est de présenter des exemples de toutes les définitions, et de tous les résultats de la partie précédente, en ne faisant référence qu'aux connaissances qu'un étudiant abordant le chapitre considéré a nécessairement déjà rencontré (souvent des objets et résultats abordés avant le baccalauréat). La moitié environ de ces exemples sont développés complètement, pour éclairer la définition ou l'énoncé correspondant. L'autre moitié est formée d'énoncés intitulés "exemple à traiter" : il s'agit de questions permettant au lecteur de réfléchir de manière active à d'autres exemples très proches des précédents. Ils sont suivis immédiatement d'explications détaillées.

La troisième partie est intitulée "Pour Comprendre et Utiliser" : des énoncés d'exercices y sont rassemblés, en référence à des objectifs. Ces énoncés comportent des renvois de trois sortes :

(☺) pour obtenir des indications pour résoudre la question,

(🕯) lorsqu'une méthode plus générale est décrite,

(👓) renvoie à une entrée du lexique.

Tous les exercices sont corrigés de manière très détaillée dans la partie 3 - 2. Au cours de la rédaction, on a souvent proposé au lecteur qui souhaiterait approfondir, ou élargir, sa réflexion, des questions complémentaires (QC), également corrigées de façon détaillée.

La quatrième partie, "Pour Chercher", rassemble les indications, les méthodes, et le lexique.

Certains livres d'exercices comportent un grand nombre d'exercices assez voisins, privilégiant un aspect "entraînement" dans le travail de l'étudiant en mathématiques. Ce n'est pas le choix qui a été fait ici : les exemples à traiter, les exercices et les questions complémentaires proposés abordent des aspects variés d'une question du niveau du L1 L2 de sciences pour l'éclairer de diverses manières et ainsi aider à sa compréhension.

Le lecteur est invité, à propos de chacun d'entre eux, à s'interroger sur ce qu'il a de général (on l'y aide par quelques commentaires)

Table des matières

1 A Savoir

Dans cette partie, on rappelle rapidement les principales définitions et les principaux énoncés utilisés. Vous devrez vous référer à votre cours pour les démonstrations.

Vous trouverez des exemples dans la partie 2*Pour Voir.

1-1 Séries numériques

Définition

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe.

Pour chaque n, soit :

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

On dit que la **série de terme général** u_n, ou la série $\sum u_n$, converge si la suite (S_n) converge. Dans ce cas, la limite S est appelée la **somme** de la série de terme général u_n. On écrit :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n .$$

⁂ Etudier une série, c'est donc étudier la convergence d'une suite particulière, (S_n), à partir d'hypothèses portant sur (u_n).

⁂ La suite, et la série, peuvent n'être définies que pour $n \geq n_0$.

⁂ On ne change pas la convergence d'une série en modifiant un nombre fini de termes. Par contre, en général, on modifie la valeur de sa somme si elle existe.

⁂ Si la série converge, alors (u_n) tend vers 0.

⁂ L'ensemble des suites termes généraux de séries convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

⁂ L'application qui à une telle suite associe la somme de la série est une application linéaire.

⁂ Dans le cas d'une série dont le terme général u_n est complexe, on voit qu'elle converge si et seulement si la série de terme général $Re(u_n)$ et la série de terme général $Im(u_n)$ convergent toutes deux.

⁂ On étudie donc dans la suite seulement les séries réelles.

Définition

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème

Toute série réelle absolument convergente est convergente.

⁂ La réciproque n'est pas vraie. Les séries convergentes mais non absolument convergentes sont appelées **semi-convergentes**.

⁂ Le théorème justifie l'importance particulière accordée aux séries réelles à termes positifs.

⁂ Une série de terme général u_n positif est convergente si et seulement si la suite :

$$S_n = u_0 + \ldots + u_n$$

est majorée. Dans ce cas, la somme de la série est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs de S_n.

Prposition

Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles positives tendant vers 0. Si ces suites sont équivalentes lorsque n tend vers l'infini, alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge.

⁂ Dans la pratique, pour étudier la convergence d'une série positive, on peut remplacer son terme général par une suite équivalente.

Proposition

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, où α est un réel, converge si et seulement si $\alpha > 1$

⁂ Pour qu'une série positive $\sum u_n$ converge, il suffit qu'il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ soit majorée.

Règles usuelles de convergence

Soit (u_n) une suite de nombres réels ou complexes.
Règle de Cauchy : Si la suite $\|u_n\|^{1/n}$ a une limite L, alors si $L < 1$ la série $\sum u_n$ est absolument convergente et si $L > 1$, la série est divergente.
Règle de D'Alembert : si la suite $\frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|}$ a une limite L, alors si $L < 1$ la série $\sum u_n$ est absolument convergente et si $L > 1$ la série est divergente.

Définition

On appelle **série alternée** une série réelle dont le terme général est de la forme :

$$(-1)^n u_n$$

la suite (u_n) étant décroissante, et tendant vers 0.

Théorème

Toute série alternée $\sum u_n$ est convergente.

Posons pour tout n :

$$S_n = u_0 + \dots + u_n,$$

la somme S de la série alternée vérifie pour tout m :

$$S_{2m+1} \leq S \leq S_{2m}.$$

Proposition

Soit f une fonction réelle, définie sur [a , +∞[, décroissante et telle que :

$$\lim(f(x)) = 0$$

quand x tend vers l'infini.

Alors l'intégrale :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

et la série $\sum f(n)$ convergent ou divergent simultanément.

Définition

Soit (u_n) une suite telle que la série $\sum u_n$ converge, et soit S sa somme.

Pour tout entier naturel n, posons $S_n = u_0 + \dots + u_n$.

On appelle **reste d'ordre n** de la série le nombre :

$$R_n = S - S_n.$$

Majoration de restes

⁂ Dans le cas d'une série alternée, la valeur absolue du reste est inférieure à la valeur absolue du premier terme négligé (u_{n+1}).

⁂ Dans le cas d'une série vérifiant le critère de Cauchy, avec :

$$(u_n)^{1/n} \leq k < 1, \text{ pour } n > N$$

la valeur absolue du reste d'ordre n vérifie :

$$R_n \leq \frac{k^{n+1}}{1-k}.$$

⁂ Dans le cas d'une série vérifiant le critère de d'Alembert, avec :

$$\frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} \le k < 1,$$

pour n > N, la valeur absolue du reste d'ordre n vérifie :

$$\|R_n\| \le \frac{1}{1-k}\|u_{n+1}\|.$$

⁂ Dans le cas où on a comparé la série $\sum f(n)$ avec l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, le reste vérifie les inégalités :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \le R_n \le \int_n^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Groupement de termes

Soit ϕ : N →. N une application strictement croissante.

Soit $\sum u_n$ une série. On lui associe la série de terme général :

$$v_0 = u_0 + \dots + u_{\phi(0)},\ v_n = u_{\phi(n-1)+1} + \dots + u_{\phi(n)}$$

obtenue en sommant "par paquets".

Si ϕ(n + 1) – ϕ(n) est borné et si u_n tend vers 0, alors si $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge également, et les sommes sont égales.

⁂ Le cas 2 s'applique souvent lorsqu'on regroupe par paquets de même longueur (sauf peut-être le premier).

1-2 Suites et séries de fonctions

Définition

Soit E un ensemble. On appelle **suite de fonctions** sur E à valeurs complexes toute application de N dans F(E, C).

⁂ Une suite de fonctions définit donc pour chaque entier n une fonction, notée par exemple f_n, de E dans C.

⁂ Si, pour tout n et tout x de E, $f_n(x)$ est un nombre réel, on dira que la suite de fonctions est réelle.

⁂ Une suite de fonctions peut être définie à partir d'un entier n_0 seulement, et non à partir de 0.

Définition

Soit E un ensemble, et (u_n) une suite de fonctions sur E à valeurs complexes. On appelle **série de fonctions** de terme général u_n la suite de fonctions sur E définie pour tout n par :

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

⁂ Il se peut que la suite (u_n) soit définie seulement à partir de n_0. Dans ce cas, il en est de même pour la série.

⁂ On parle souvent, par abus, de :

"la série $\sum u_n$."

Définition

Soit F une partie de E, et (u_n) une suite de fonctions sur E. On dit que cette suite **converge simplement** (ou **ponctuellement**) sur F, si pour tout x de F la suite $(u_n(x))$ est convergente.

⁂ L'ensemble de convergence simple (ou ponctuelle) de la suite est :

$$P = \{x \in E \mid (u_n(x)) \text{ est convergente}\}.$$

⁂ La fonction limite de la suite (u_n) est la fonction u définie sur P par :

$$u(x) = \lim(u_n(x)).$$

Définition

Soit A une partie de E, et (u_n) une suite de fonctions sur E. On dit que cette suite **converge uniformément** sur A vers la fonction u, si :

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N, N \in \mathbb{N}, \forall\ x \in A\ \ n \geq N \Rightarrow \|u_n(x) - u(x)\| \leq \varepsilon.$$

⁂ Ici, $\|z\|$ désigne la norme du complexe z.

⁂ On voit que A est une partie de l'ensemble de convergence ponctuelle, et que sur A, u est la limite de la suite.

⁂ Une série converge simplement (ou uniformément) si la suite notée plus haut (s_n) converge simplement (ou uniformément).

⁂ Pour x appartenant à l'ensemble de convergence ponctuelle de la série, on peut parler du reste d'ordre n, ce qui définit donc une suite de fonctions sur l'ensemble de convergence ponctuelle de la série.

⁂ Une série de fonctions $\sum u_n$ **converge normalement** sur une partie A s'il existe une série numérique convergente $\sum a_n$ à termes positifs ou nuls telle que pour tout x de A :

$$\|u_n(x)\| \leq a_n.$$

⁂ Lorsqu'une série converge, la limite de (s_n) est la somme de la série. Cette fonction est notée :

$$\sum_0^{+\infty} u_n.$$

⁂ Si une série converge simplement (resp. uniformément), alors son terme général converge simplement (resp. uniformément) vers 0.

⁂ Si une série converge simplement sur A, alors elle converge uniformément sur A si et seulement si la suite de ses restes tend vers 0 uniformément sur A.

Proposition

Avec les notations utilisées ci-dessus, les énoncés suivants sont équivalents :

⁂ La suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers u sur A,

⁂ La suite réelle positive :

$$\sup(\|u_n(x) - u(x)\|, x \in A)$$

converge vers 0,

⁂ Il existe une suite de nombres réels positifs, (a_n), qui converge vers 0, un entier N, tels que pour $n \geq N$, et $x \in A$, on ait :

$$\|u_n(x) - u(x)\| \leq a_n.$$

Théorème

Si une série converge normalement sur une partie A, alors elle converge uniformément sur A.

⁂ La somme et le produit de suites de fonctions qui convergent simplement sont des suites de fonctions convergentes, et :

$$\lim(u_n + v_n) = \lim(u_n) + \lim(v_n)$$

$$\lim(u_n \times v_n) = \lim(u_n) \times \lim(v_n).$$

⁂ Ces énoncés sont encore vrais pour la convergence uniforme si de plus les fonctions limites sont bornées sur la partie considérée.

Théorème

Soit I une partie de R. Soit (u_n) une suite de fonctions réelles sur I. Soit A une partie de I. On suppose que les propriétés suivantes sont vérifiées :

⁂ Pour tout n, la fonction u_n est continue sur A,

⁂ La suite converge uniformément sur A.

Alors la fonction limite est continue sur A.

⁂ La somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est une fonction continue.

Théorème

Soit I = [a , b] un intervalle de R. Soit (u_n) une suite de fonctions continues sur I, uniformément convergente sur I, de limite u. On a :

$$\lim\left(\int_a^b u_n(x)\,dx\right) = \int_a^b u(x)\,dx.$$

⁂ Si $\sum u_n$ est une série uniformément convergente de fonctions continues sur I = [a , b], alors :

$$\sum\left(\int_a^b u_n(x)\,dx\right) = \int_a^b \left(\sum u_n\right)dx.$$

Théorème

Soit I un intervalle de R. Soit (u_n) une suite de fonctions de classe C^1 sur I, convergente en au moins un point de I, de limite u. On suppose que la suite des dérivées (u'_n) converge uniformément sur tout intervalle fermé borné contenu dans I, et que sa limite est v.
Alors la suite (u_n) converge uniformément sur tout intervalle fermé borné contenu dans I. Sa limite u est dérivable, et :

$$u' = v.$$

⁂ Une série $\sum u_n$ de fonctions de classe C^1 qui converge simplement en au moins un point, et dont la série des dérivées $\sum u'_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé borné, converge uniformément sur tout intervalle fermé borné, vers une fonction dérivable, et :

$$\left(\sum u_n\right)' = \sum u'_n.$$

1-3 Séries entières

Définition

On appelle **série entière** une série de fonctions dont le terme général est de la forme :

$$u_n(x) = a_n x^n.$$

⁂ Les nombres (réels ou complexes) a_n sont appelés les **coefficients** de la série entière.

⁂ On étudie les séries entières dans le cadre d'une variable complexe.

Proposition

Soit z_0 un complexe tel que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée.

Alors pour tout complexe z tel que $\|z\| < \|z_0\|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Pour tout réel k vérifiant $0 \leq k < 1$, la série est normalement convergente sur l'ensemble (disque fermé) des complexes z vérifiant :

$$\|z\| \leq k.\|z_0\|.$$

⁂ Le nombre z_0 peut être tel que $\sum a_n z_0^n$ converge.

Définition

Le **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée.

⁂ Si l'ensemble des réels r n'est pas majoré, on dit que le rayon de convergence est $+\infty$.

Théorème

Soit R (fini ou infini) le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$
.

Si R = 0, la série ne converge que pour z = 0.

Si R ≠ 0 est un réel, la série est absolument convergente pour ||z|| < R, divergente pour ||z|| > R, et elle converge normalement sur tout disque fermé ||z|| ≤ r < R.

Si R est infini, la série est absolument convergente pour tout z, et converge normalement sur toute partie bornée de C.

⁂ Si R ≠ 0, le disque ouvert défini par ||z|| < R est appelé le disque de convergence de la série entière. L'intervalle ouvert de IR,]– R , R[est appelé l'intervalle de convergence.

⁂ On détermine souvent le rayon de convergence en remarquant que si le quotient :

$$\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\|$$

a pour limite L, alors le rayon de convergence est $\frac{1}{L}$, avec la convention que si L = 0, le rayon est infini, et si L est infinie, le rayon est 0.

⁂ Attention, la réciproque de cet énoncé n'est pas vraie.

Proposition

⁂ La somme d'une série entière est continue sur son intervalle (ou son disque) de convergence.

⁂ La somme d'une série entière $\sum a_n z^n$ est dérivable sur son disque de convergence, et sa dérivée est la somme de la série $\sum n a_n z^{n-1}$.

⁂ Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

⁂ Dans le cas complexe, on dit qu'une fonction f est dérivable en z_0 si le quotient :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

a une limite quand z tend vers z_0.

⁂ En généralisant, on voit que la somme d'une série entière est indéfiniment dérivable, et que toutes les dérivées ont le même rayon de convergence que la série.

Définition

Soit I un intervalle ouvert contenant l'origine, et f une fonction définie sur I, à valeurs dans R. On dit que f est **développable en série entière** sur I s'il existe une suite réelle (a_n) telle que pour tout x de I on ait :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

⁂ S'ils existent, les coefficients a_n sont donnés par :

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

En particulier, ils sont uniques.

1-4 Séries de Fourier

Définition

On appelle **série trigonométrique** une série de fonctions dont le terme général est de la forme :

$$u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \text{ si } n > 0,$$

$$u_0(x) = a_0/2,\ b_0 = 0,$$

où (a_n) et (b_n) désignent des suites de nombres réels (ou complexes) définies pour $n \geq 0$.

⁂ Lorsqu'une série trigonométrique converge, sa somme s'écrit :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big).$$

⁂ On utilise également une écriture complexe des séries trigonométriques. En posant :

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},\ n \geq 0$$

on obtient :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

⁂ Notons que si la série trigonométrique est réelle, alors :

$$c_{-n} = \overline{c_n}.$$

⁂ L'ensemble de convergence ponctuelle d'une série trigonométrique est invariant par une translation de 2π, et sa somme est 2π-périodique.

⁂ La somme d'une série trigonométrique est continue sur tout intervalle où la série converge uniformément.

⁂ Si $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ sont convergentes, la série trigonométrique est uniformément convergente sur R. La somme de cette série est une fonction continue sur R.

⁂ Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence non nul R, de somme u(x), alors pour tout r vérifiant 0 < r < R, la série trigonométrique :

$$\sum a_n r^n e^{inx}$$

est normalement convergente sur R, et sa somme est $u(re^{ix})$.

Proposition

Si les suites (a_n) et (b_n) sont des suites réelles décroissantes tendant vers 0, alors la série trigonométrique converge en tout point x tel que $x \neq 2k\pi$, k entier relatif, et converge uniformément sur tout intervalle fermé borné contenu dans $IR - 2\pi Z$.

Théorème

Si la série trigonométrique $\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge uniformément sur R et si on note s sa somme, alors les coefficients vérifient les relations suivantes pour tout réel x_0 :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} s(x) \cos(nx)\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} s(x) \sin(nx)\, dx,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} s(x) e^{-inx}\, dx.$$

Définition

Soit f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux sur R (à valeurs réelles ou complexes). On appelle **coefficients de Fourier** de f les nombres suivants (réels ou complexes selon les valeurs de f), indépendants de x_0 :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} s(x)\cos(nx)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} s(x)\sin(nx)dx,$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{x_0}^{x_0+2\pi} s(x)e^{-inx}dx.$$

⁂ La série trigonométrique :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)$$

s'appelle la **série de Fourier** de f.

⁂ On peut choisir x_0 pour rendre le calcul plus facile pour une fonction particulière : on voit ainsi que si f est paire, alors $b_n = 0$ pour tout n, et si f est impaire alors $a_n = 0$ pour tout n.

Théorème

Soit f une fonction 2π-périodique, et C^1 par morceaux.

La série de Fourier de f a les propriétés suivantes :

⁂ Elle converge ponctuellement sur R, vers :

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

⁂ Elle converge uniformément sur tout intervalle fermé borné contenu dans un intervalle ouvert où f est continue.

2 Pour Voir

Dans cette partie, on présente des exemples simples des notions ou résultats abordés dans la partie précédente. Ils sont suivis de questions très élémentaires pour vérifier votre compréhension.

2-1 Séries numériques

"Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On dit que la série de terme général u_n, ou la série $\sum u_n$, converge si la suite (S_n) converge. "

exemple 1

Posons $u_n = (0,2)^n$. La série de terme général u_n converge, en effet :

$$S_n = 1 + 0,2 + \dots + (0,2)^n$$

$$S_n = \frac{1-(0,2)^{n+1}}{1-0,2}$$

donc S_n a bien une limite finie quand n tend vers l'infini, qui vaut 1,25.

exemple 2

(à traiter)

La série de terme général $u_n = n$ converge-t-elle ?

réponse

Non, bien entendu, S_n tend vers l'infini :

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Etudier une série, c'est donc étudier la convergence d'une suite particulière, (S_n), à partir d'hypothèses portant sur (u_n).

exemple 3

En effet, généralement, on ne sait pas expliciter la valeur de S_n en fonction de n comme dans les deux premiers exemples. Ces exemples peuvent cependant servir de séries de comparaison. Ainsi la série de terme général :

$$v_n = n(2 + \cos(n))$$

diverge car $v_n \geq n$, donc la somme S_n correspondante est supérieure à celle de l'exemple 2, qui tend vers l'infini.

exemple 4

(à traiter)

La série de terme général :

$$w_n = \frac{(0,2)^n}{n+1}$$

est-elle convergente ?

réponse

Oui, car on a les inégalités pour tout n :

$$w_n = \frac{(0,2)^n}{n+1} \leq (0,2)^n$$

$$w_0 + \ldots + w_n \leq 1 + \ldots + (0,2)^n \leq 1,25$$

donc la somme $w_0 + \ldots + w_n$ est une suite croissante majorée par 1,25.

La suite, et la série, peuvent n'être définies que pour $n \geq n_0$.

exemple 5

La série de terme général :

$$\frac{1}{n(n-1)}$$

n'est définie qu'à partir de n = 2.

---

exemple 6
(à traiter)

A partir de quelle valeur de n est définie la série de terme général :

$$\frac{1}{n^2 - 6n + 5}.$$

---

réponse

Il faut chercher si l'expression au dénominateur s'annule. On trouve facilement que les racines sont 1 et 5. La série est définie pour $n \geq 6$.

> On ne change pas la convergence d'une série en modifiant un nombre fini de termes. Par contre, en général, on modifie la valeur de sa somme si elle existe.

---

exemple 7

La série de terme général x_n donné par :

$$x_0 = 0,\ x_n = (0{,}2)^n$$

converge d'après l'exemple 1.

---

exemple 8
(à traiter)

Quelle est la somme de cette série ?

---

réponse

Seul le premier terme est modifié, la somme est donc diminuée de 1. Sa valeur est donc 0,25.

Si la série converge, alors (u_n) tend vers 0.

exemple 9

C'est effectivement ce qu'on constate pour l'exemple 1.

Ce résultat permet de montrer, par contraposition, qu'une série ne converge pas.

exemple 10

(à traiter)

Reprendre l'exemple 3 pour vérifier que la série ne converge pas.

réponse

On voit facilement que le terme général :

$$v_n = n(2 + \cos(n))$$

ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

L'ensemble des suites termes généraux de séries convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites.

exemple 11

Pour montrer qu'une série, somme de plusieurs séries, converge, il suffit de montrer que chacune est convergente.

La série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$$

converge pour cette raison.

exemple 12

(à traiter)

La somme de deux séries divergentes est-elle toujours divergente ?

réponse

Evidemment, non. On peut prendre comme exemple une série divergente et son opposé, dont la somme, constante égale à 0, converge.

L'application qui à une telle suite associe la somme de la série est une application linéaire.

exemple 13

Pour calculer la somme de la série de l'exemple 11, on ajoute les sommes des séries de termes généraux respectifs $\frac{1}{2^n}$, et $\frac{1}{3^n}$. On obtient donc :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=2+1{,}5=3{,}5.$$

exemple 14

(à traiter)

Quelle est la somme de la série de terme général :

$$u_n=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

réponse

Cette série est le produit par 0,5 de la série de terme général $\frac{1}{2^n}$.

La somme de cette dernière série est 2, donc :

$$\sum_0^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=1.$$

Dans le cas d'une série dont le terme général u_n est complexe, on voit qu'elle converge si et seulement si la série de terme général $Re(u_n)$ et la série de terme général $Im(u_n)$ convergent toutes deux.

---

exemple 15

La série de terme général ($n \geq 1$) :

$$z_n = \frac{1+ni}{n3^n}$$

converge. En effet sa partie réelle est $\frac{1}{n3^n}$, inférieure à $\frac{1}{3^n}$, terme général d'une série convergente, et sa partie imaginaire est $\frac{1}{3^n}$.

---

exemple 16
(à traiter)

La série de terme général :

$$w_n = \frac{1+2^n i}{3^n}$$

converge-t-elle ?

---

réponse

La partie réelle est $\frac{1}{3^n}$, et la partie imaginaire est $\left(\frac{2}{3}\right)^n$. Dans les deux cas, le raisonnement utilisé pour l'exemple 1 s'applique puisque le nombre élevé à la puissance n est inférieur à 1. Cette série converge bien.

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

exemple 17

Ainsi la série de terme général :

$$(-1)^n k^n$$

est absolument convergente pour tout réel k de [0 , 1[.

exemple 18
(à traiter)

Vérifier que la série de terme général :

$$\frac{\cos(n)}{3^n}$$

est absolument convergente.

réponse

En effet, on peut écrire :

$$\left|\frac{\cos(n)}{3^n}\right| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

La série majorante étant convergente, la série de terme général $\frac{\cos(n)}{3^n}$ est bien absolument convergente.

Toute série réelle absolument convergente est convergente.

exemple 19

Par exemple la série de l'exemple précédent est convergente. On notera que ce résultat s'obtient sans savoir écrire l'expression des sommes partielles de cette série en fonction de n.

exemple 20
(à traiter)

Montrer que la série de terme général :

$$\frac{n\sin(n)}{n2^n+1}$$

est convergente.

réponse

Cette série n'est pas positive. Cherchons si elle est absolument convergente. On peut écrire :

$$\left|\frac{n\sin(n)}{n2^n+1}\right| \leq \frac{n}{n2^n+1} \leq \frac{n}{n2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

La série de terme général valeur absolue de la précédente est donc convergente.

Soient (u_n) et (v_n) des suites réelles positives tendant vers 0. Si ces suites sont équivalentes lorsque n tend vers l'infini, alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge.

exemple 21

Soit $\sum u_n$ une série positive divergente, et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Cette série est divergente. En effet, si v_n ne tend pas vers 0, la série $\sum v_n$ diverge, et si v_n tend vers 0, alors $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$ tend vers 0, et le quotient :

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{1+u_n}$$

tend vers 1, donc les séries sont équivalentes et $\sum v_n$ diverge encore.

exemple 22
(à traiter)

En cherchant un équivalent, étudier la convergence de la série de terme général :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

réponse

Le calcul est le suivant :

$$Log\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = n^2 Log\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^2 Log\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$$Log\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = n^2 Log\left(1-\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= n^2\left(-\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= -n+\frac{1}{2}+\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right).$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{-n+\frac{1}{2}+\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)} = \sqrt{e}\left(\frac{1}{e}\right)^n e^{\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

D'où un équivalent du terme général de la suite :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \sim \sqrt{e}\left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

Comme e > 1, cette série converge.

Dans la pratique, pour étudier la convergence d'une série positive, on peut remplacer son terme général par une suite équivalente.

exemple 23

La série de terme général :

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\sqrt{n}}$$

est positive. Cherchons un équivalent de son terme général.

Les calculs donnent :

$$Log(u_n) = \sqrt{n}Log\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \sqrt{n}Log\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$Log(u_n) = \sqrt{n}\left(-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right).$$

On obtient donc un équivalent de u_n :

$$u_n \sim e^{-\frac{1}{n\sqrt{n}}}$$

ce qui montre que le terme général de la série ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

exemple 24

(à traiter)

Par la même méthode, étudier la convergence de la série dont le terme général est :

$$u_n = \left(\frac{1}{ch\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^{n^3}.$$

\# réponse

Les calculs sont les suivants :

$$Log(u_n) = n^3 Log\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = n^3 Log\left(1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$Log(u_n) = n^3\left(-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}-\frac{1}{2n^4}+\frac{1}{n^4}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$Log(u_n) = \left(-n+\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

D'où un équivalent pour u_n :

$$u_n \sim e^{-n}.$$

On en déduit que la série converge, puisque e > 1.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, où α est un nombre réel quelconque, converge si et seulement si α > 1

exemple 25

Si P et Q sont des polynômes, la série de terme général :

$$\frac{P(n)}{Q(n)}$$

converge si et seulement si deg(Q) ≥ deg(P) + 2.

En effet, P(n), comme Q(n), est, pour n assez grand, du signe de son terme dominant, et équivalent à celui-ci. Le terme général de la série est donc de signe fixe pour n assez grand, et on peut examiner sa convergence par comparaison avec un équivalent.

Si ax^k (resp. bx^p) est le terme dominant de P(x) (resp. Q(x)) alors on a :

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \sim \frac{a}{b}\frac{1}{n^{p-k}}.$$

La série converge donc si et seulement si p – k > 1, soit, puisque ce sont des entiers, p – k ≥ 2.

---

exemple 26

(à traiter)

Examiner la convergence de la série de terme général :

$$w_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1}.$$

---

réponse

C'est une série positive, on peut en chercher un développement limité pour obtenir un équivalent.

Les calculs sont les suivants :

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1} = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}\right)$$

$$= n\left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^2} - 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right).$$

On voit que le terme général de la série est équivalent à $\frac{1}{n}$. Cette série est donc divergente.

> Pour qu'une série positive $\sum u_n$ converge, il suffit qu'il existe un réel α > 1 tel que la suite ($n^\alpha u_n$) soit majorée.

---

exemple 27

On cherchera donc à exprimer une telle expression en fonction de n.

Ainsi, soit la série de terme général :

$$a_n = \frac{Log(n)}{n^{3/2}}.$$

On écrit $n^\alpha a_n$:

$$n^\alpha a_n = \frac{Log(n)}{n^{3/2-\alpha}}$$

il suffit donc de choisir α strictement compris entre 1 et 1,5 pour que $n^\alpha a_n$ tende vers 0. Par exemple pour $\alpha = 1{,}25$. Cette série converge.

---

exemple 28
(à traiter)

Vérifier que la série de terme général :

$$v_n = \frac{\cos(n)}{n^\alpha}$$

converge pour $\alpha > 1$.

---

réponse

En effet, on a :

$$n^\alpha |v_n| = |\cos(n)| \le 1$$

donc cette série est absolument convergente, donc convergente.

Règle de Cauchy : Si la suite $(\|u_n\|)^{1/n}$ a une limite (finie ou infinie) L, alors si L < 1 la série $\sum u_n$ est absolument convergente et si L > 1, la série est divergente.

---

exemple 29

La série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{(Log(n))^n}$$

converge puisque :

$$(u_n)^{1/n} = \frac{1}{(Log(n))}$$

tend vers 0.

---

exemple 30

(à traiter)

La série de terme général :

$$w_n = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4n+1}\right)\right)^{2n}$$

est-elle convergente ?

---

réponse

Le critère de Cauchy conduit aux calculs suivants :

$$(w_n)^{1/n} = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4n+1}\right)\right)^2$$

$$\lim(w_n)^{1/n} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

donc la série est bien convergente.

Règle de D'Alembert : si la suite $\frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|}$ a une limite L, alors si L < 1 la série $\sum u_n$ est absolument convergente et si L > 1 la série est divergente.

---

exemple 31

La série de terme général $u_n = (n^2 + n + 1)e^{-n}$ vérifie :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n^2 + 2n + 1 + n + 2)e^{-n-1}}{(n^2 + n + 1)e^{-n}} = \frac{(n^2 + 3n + 3)}{(n^2 + n + 1)}e^{-1}$$

donc la limite est e^{-1}. La série est convergente.

---

exemple 32
(à traiter)

Etudier par le critère de D'Alembert la convergence de la série de terme général :

$$v_n = \frac{n!}{n^n}.$$

---

réponse

Les calculs sont les suivants :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!(n)^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

$$Log\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = nLog\left(\frac{n}{n+1}\right) = nLog\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sim -\frac{n}{n+1}$$

donc :

$$\lim\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \frac{1}{e}.$$

La série $\sum v_n$ est convergente.

On appelle série alternée une série réelle dont le terme général est de la forme $(-1)^n u_n$, la suite (u_n) étant décroissante, et tendant vers 0.

---

exemple 33

Un exemple simple est la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

exemple 34
(à traiter)

La série de terme général :

$$x_n = \sin\left(\pi \frac{n^2+1}{n+1}\right)$$

est-elle une série alternée ?

\# réponse

On écrit :

$$\frac{n^2+1}{n+1} = n - 1 + \frac{2}{n+1},$$

$$\sin\left(\pi \frac{n^2+1}{n+1}\right) = \sin\left(\pi(n-1) + \frac{2\pi}{n+1}\right)$$

$$= (-1)^{n-1} \sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right).$$

Pour n assez grand, $\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)$ est une fonction positive et décroissante, donc on peut conclure que la série $\sum x_n$ est bien une série alternée.

Toute série alternée est convergente.

exemple 35

On déduit de cet énoncé que la série de l'exemple 33 est une série semi-convergente.

exemple 36
(à traiter)

En calculant sa différence avec la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, étudier la convergence de la série de terme général :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}.$$

réponse

Calculons la différence indiquée :

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n} &= (-1)^n \left(\frac{1}{n + (-1)^n} - \frac{1}{n} \right) \\ &= (-1)^n \frac{-(-1)^n}{n\big(n + (-1)^n\big)} \\ &= -\frac{1}{n\big(n + (-1)^n\big)}.\end{aligned}$$

On voit que cette série différence est de signe constant (négatif), et équivalente à $-\frac{1}{n^2}$, terme général d'une série convergente. La série étudiée est donc la somme de deux séries convergentes. Elle converge.

Posons pour tout n, $S_n = u_0 + \ldots + u_n$, la somme S de la série alternée vérifie pour tout m, $S_{2m+1} \leq S \leq S_{2m}$.

exemple 37

Cherchons à partir de quel rang les sommes partielles de la série de l'exemple 34 :

$$x_n = \sin\left(\pi \frac{n^2+1}{n+1}\right)$$

donnent une valeur approchée de la somme de la série avec une erreur de moins de 0,001. Il suffit de voir quand le terme général devient inférieur à cette valeur, en valeur absolue :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) < 0,001.$$

On trouve :

$$n+1 > 2000\pi \geq 6244$$

on voit que cette série converge assez lentement vers sa somme.

exemple 38

(à traiter)

Après avoir vérifié que la série de terme général :

$$y_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$$

est alternée, calculer une valeur approchée de sa somme à 10^{-1} près.

réponse

On peut écrire :

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=\sin\left(n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)=\sin\left(n\pi\left(1+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{\pi}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Pour n assez grand, l'argument de sin est compris entre 0, et $\frac{\pi}{2}$, ce qui montre bien que les termes changent de signe avec la parité de n.

Pour étudier le sens de variation de la valeur absolue de y_n, on remarque que d'après les calculs précédents, elle est égale à :

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right).$$

La dérivée de la fonction :

$$x\mapsto\sin\left(\pi\sqrt{x^2+1}-x\pi\right)$$

est négative, donc la fonction est bien décroissante.

Les valeurs de y_n sont :

n	yn	Sn
0	0	
1	-0,96390253	-0,9639025
2	0,675490294	-0,2884122
3	-0,48801168	-0,7764239
4	0,377178355	-0,3992456
5	-0,306086	-0,7053316
6	0,257086502	-0,4482451
7	-0,22141585	-0,6696609

8	0,194343833	-0,4753171
9	-0,1731209	-0,648438
10	0,156048516	-0,4923895
11	-0,142024	-0,6344135
12	0,130301656	-0,5041118
13	-0,12035976	-0,6244716
14	0,111822625	-0,5126489
15	-0,104413	-0,6170619
16	0,097921914	-0,51914

Le premier terme dont la valeur absolue est inférieure à 0,1 est y_{16}.

Une valeur approchée à 0,1 près de la somme est donc – 0,6.

Soit f une fonction réelle, définie sur [a , +∞[, décroissante et telle que lim(f(x)) = 0 quand x tend vers l'infini. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et la série $\sum f(n)$ convergent ou divergent simultanément.

exemple 39

Ainsi, on voit que la série de terme général :

$$\frac{1}{n^{1,1}}$$

converge, puisque l'énoncé précédent s'applique avec a = 1 :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1,1}} dx = \left[\frac{x^{-0,1}}{-0,1}\right]_1^{+\infty} = 10.$$

exemple 40

(à traiter)

Etudier la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{nLog(n)}.$$

réponse

Posons :

$$f(x) = \frac{1}{xLog(x)}.$$

pour x ≥ 2. La dérivée de f est :

$$f'(x) = -\frac{Log(x)+1}{(xLog(x))^2},$$

elle est donc négative pour x ≥ 2, donc f décroit, et tend évidemment vers 0 si x tend vers +∞.

Or, on a :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{xLog(x)} dx = [Log(Log(x))]_2^{+\infty} = +\infty.$$

donc l'intégrale, et, par conséquent, la série, divergent.

Dans le cas d'une série alternée, la valeur absolue du reste est inférieure à la valeur absolue du premier terme négligé (u_{n+1}).

exemple 41

Revoir l'exemple 38. Le reste donne la valeur de l'erreur faite en remplaçant la somme de la série (généralement inconnue) par une somme partielle. Un majorant du reste donne donc un majorant de l'erreur.

exemple 42

(à traiter)

Donner une valeur de la somme de la série de terme général :

$$\frac{(-1)^n}{n^n}$$

à moins de 10^{-5} près.

réponse

La série est clairement alternée. Pour que le reste R_n soit inférieur à la précision souhaitée, il suffit que le terme d'ordre n + 1 soit en valeur absolue inférieur à cette précision :

n	u_n	S_n
1	1	1
2	0,25	1,25
3	0,037037037	1,28703704
4	0,00390625	1,29094329
5	0,00032	1,29126329
6	2,14335E-05	1,29128472
7	1,21427E-06	1,29128593

donc n + 1 = 7, et la valeur cherchée est celle de S_6, soit 1,29128.

On notera la différence de "vitesse de convergence" avec l'exemple 37.

Dans le cas d'une série vérifiant le critère de Cauchy, avec : $(u_n)^{1/n} \leq k < 1$, pour $n > N$ la valeur absolue du reste d'ordre n vérifie :

$$R_n \leq \frac{k^{n+1}}{1-k}.$$

exemple 43

Reprenons l'exemple 30 :

$$w_n = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4n+1}\right)\right)^{2n}$$

pour lequel on a vu que $(w_n)^{1/n}$ est au plus égal à k = $\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2$.

Le reste d'ordre n est majoré par :

$$\frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^{2n+2}}{\left(\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^{2}}.$$

Avec les valeurs :

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)^{2} \leq 0{,}655$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)^{2} \geq 0{,}345$$

On voit par exemple que :

$$R_{15} \leq 0{,}0051.$$

Une valeur approchée de la somme S est donc donnée par :

$$1{,}353 \leq S_{15} < S < 1{,}3581.$$

---

exemple 44
(à traiter)

Donner un majorant de R_{10} dans le cas de la série de l'exemple 29.

---

réponse

On doit donner un majorant de :

$$(u_n)^{1/n} = \frac{1}{(Log(n))}$$

pour n > 10. Numériquement :

$$2{,}302 < \mathrm{Log}(10) < 2{,}303$$

donc :

$$\frac{1}{(Log(n))} < 0{,}435$$

pour n > 10. Un majorant de R_{10} est donc :

$$R_{10} < \frac{(0,435)^{11}}{1-0,435} \leq 0,0002.$$

Dans le cas d'une série vérifiant le critère de d'Alembert, avec :

$$\frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|} \leq k < 1,$$

pour n > N, la valeur absolue du reste d'ordre n vérifie :

$$\|R_n\| \leq \frac{1}{1-k}\|u_{n+1}\|.$$

---

exemple 45

Appliquons ce résultat à l'exemple 32 :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

La limite est $\frac{1}{e}$.

Cherchons à partir de quelle valeur de n la majoration :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{1}{2,5} = 0,4$$

est vérifiée. On remarque que la fonction :

$$n \mapsto nLog\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

est décroissante (calcul de dérivée). Il suffit donc de trouver une valeur de n pour laquelle la majoration est vérifiée. Quelques essais numériques conduisent à n > 5.

---

exemple 46

(à traiter)

Donner une valeur approchée à 10^{-10} près de la somme de la série de l'exemple 31 :

$$u_n = \left(n^2 + n + 1\right)e^{-n}.$$

---

réponse

La limite obtenue en appliquant le critère de D'Alembert est e^{-1}. D'après :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(n^2 + 3n + 3\right)}{\left(n^2 + n + 1\right)}e^{-1}$$

cette limite est obtenue en décroissant.
Cherchons à partir de quelle valeur de n le quotient est inférieur à 0,4 :

$$\frac{2n+2}{n^2 + n + 1} < 0,4 \times e - 1 < 0,0874$$

soit :

$$0,0874(n^2 + n + 1) - 2n - 2 > 0$$

ce qui est vrai à partir de n = 23.
Pour $n \geq 23$, on a donc la majoration du reste :

$$R_n < \frac{(0,4)^{n+1}}{0,6}.$$

Il suffit donc de rendre le second membre inférieur à la précision souhaitée, soit ici 10^{-10} :

$$\frac{(0,4)^{n+1}}{0,6} < 10^{-10}.$$

On voit qu'il suffit de prendre $n \geq 25$. La valeur approchée de la somme de la série est alors :

3,4949450659.

Dans le cas où on a comparé la série $\sum f(n)$ avec l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, le reste vérifie les inégalités $\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \le R_n \le \int_n^{+\infty} f(x)dx$.

exemple 47

Cherchons à quelle vitesse converge la série de terme général $\frac{1}{n^2}$. Le reste d'ordre n vérifie l'encadrement :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \le R_n \le \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\left[\frac{-1}{x}\right]_{n+1}^{\infty} \le R_n \le \left[\frac{-1}{x}\right]_n^{\infty}$$

$$\frac{1}{n+1} \le R_n \le \frac{1}{n}.$$

Il faut donc de l'ordre de 1000 termes pour que la valeur d'une somme partielle approche la valeur de la somme de la série à 10^{-3} près : c'est une convergence lente.

exemple 48

(à traiter)

Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la somme de la série de terme général :

$$v_n = (n+1)e^{-n}.$$

\# réponse

On peut étudier la convergence de cette série en comparant avec une intégrale :

$$\int_0^{+\infty} (x+1)e^{-x}dx.$$

En effet, on peut calculer cette intégrale et vérifier qu'elle converge :

$$\int_0^{+\infty}(x+1)e^{-x}dx = \left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}e^{-x}dx$$
$$= 1+1 = 2.$$

Le reste d'ordre n vérifie donc :

$$\int_{n+1}^{+\infty}(x+1)e^{-x}dx \le R_n \le \int_n^{+\infty}(x+1)e^{-x}dx$$
$$\left[-(x+1)e^{-x}\right]_{n+1}^{+\infty} + \left[-e^{-x}\right]_{n+1}^{+\infty} \le R_n \le \left[-(x+1)e^{-x}\right]_n^{+\infty} + \left[-e^{-x}\right]_n^{+\infty}$$
$$(n+3)e^{-n-1} \le R_n \le (n+2)e^{-n}.$$

Un simple calcul numérique montre que R_7 est inférieur à la précision demandée. La valeur approchée de la somme correspondante est :

2,49.

Soit ϕ : N --. N une application strictement croissante. Soit $\sum u_n$ une série. On lui associe la série de terme général : $v_0 = u_0 + \ldots + u_{\phi(0)}$, $v_n = u_{\phi(n-1)+1} + \ldots + u_{\phi(n)}$ obtenue en sommant "par paquets". Si $\phi(n+1) - \phi(n)$ est borné et si u_n tend vers 0, alors si $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge également, et les sommes sont égales.

exemple 49

Etudions la série de terme général :

$$v_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}.$$

Ce n'est pas une série alternée puisque la parité de l'exposant du numérateur K(n) est la suivante :

n = 4p, K(n) = 2p(4p – 1) est pair

n = 4p + 1, K(n) = (4p + 1)(2p), pair

$$n = 4p + 2,\ K(n) = (2p + 1)(4p + 1),\ \text{impair}$$
$$n = 4p + 3,\ K(n) = (4p + 3)(2p + 1),\ \text{impair.}$$

Regroupons les termes deux par deux :

$$v_{2p} = u_{4p} + u_{4p+1}$$
$$v_{2p+1} = u_{4p+2} + u_{4p+3}$$

Il est clair que c'est une série alternée, donc convergente : la série $\sum u_n$ converge également.

---

exemple 50

(à traiter)

Etablir la convergence de la série de terme général :

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}.$$

---

réponse

Cette série n'est pas absolument convergente. Ce n'est pas non plus une série alternée car la différence $|a_{n+1}| - |a_n|$ n'est pas de signe constant.

Groupons les termes par deux. On obtient la série de terme général :

$$\frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p-1} = \frac{-2}{(2p+1)(2p-1)}$$

dont le signe est fixe, et qui converge, puisqu'elle est équivalente à $-\frac{1}{2p^2}$.

Comme a_n tend vers 0, on conclut que $\sum a_n$ converge également.

2-2 Suites et séries de fonctions

Soit E un ensemble, et (u_n) une suite de fonctions sur E à valeurs complexes. On appelle série de fonctions de terme général u_n la suite de fonctions sur E définie pour tout n par :

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

exemple 51

Une suite de fonctions n'est rien d'autre que la donnée, pour chaque n, d'une fonction définie sur E, par exemple sin(nx), ou x^n.

On peut lui associer une série, comme par exemple :

$$\sum x^n .$$

exemple 52

(à traiter)

Expliciter la suite s_n dans le cas précédent.

\# réponse

On écrit :

$$s_n(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1} + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Soit F une partie de E, et (u_n) une suite de fonctions sur E. On dit que la série converge simplement (ou ponctuellement) sur F, si pour tout x de F la suite $(s_n(x))$ est convergente.

exemple 53

La série de l'exemple 52 converge ponctuellement sur]– 1 , 1[.

exemple 54
(à traiter)

Quel est l'ensemble de convergence ponctuelle de la série de fonctions de terme général :

$$a_n(x) = n^{1+x}.$$

réponse

Il s'agit d'une série de Riemann, donc elle converge si et seulement si on a l'inégalité :

$$1 + x < -1,$$

donc l'ensemble de convergence ponctuelle est $]-\infty, -2[$.

La fonction somme de la série de terme général (u_n) est la fonction s définie sur l'ensemble de convergence ponctuelle par $s(x) = \lim(s_n(x))$.

exemple 55

Pour l'exemple 53, la somme est donnée par :

$$s(x) = \frac{1}{1-x}.$$

exemple 56
(à traiter)

Soit la suite de fonctions :

$$u_{2p}(x) = x^{2p}$$

$$u_{2p+1}(x) = 0.$$

Définir l'ensemble de convergence ponctuelle de la série associée, et sa somme.

réponse

Il suffit de remarquer que cette série n'est autre que celle de l'exemple 53, composée avec la fonction x → x^2. Autrement dit l'ensemble de convergence ponctuelle est]– 1 , 1[, et la somme :

$$s(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Soit A une partie de E, et (u_n) une suite de fonctions sur E. On dit que cette suite converge uniformément sur A vers la fonction u, si $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N, N \in \mathbb{N}, \forall\ x \in A, n \geq N \Rightarrow \|u_n(x) - u(x)\| \leq \varepsilon$.

exemple 57

Ainsi, la suite de fonctions sur [0 , 1] définie par $u_n(x) = x^n$, converge ponctuellement vers la fonction u définie par :

$$u(x) = 0, \text{ si } x < 1$$
$$u(1) = 1.$$

Toutefois cette convergence n'est pas uniforme. Il suffit par exemple de remarquer que :

$$u_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}.$$

exemple 58
(à traiter)

Montrer que la suite de fonctions définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{(1 + x)^n}$$

est uniformément convergente, de limite 0, sur [1 , +∞[.

réponse

On remarque :

$$\frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

pour tout x de l'intervalle considéré. Comme $\frac{1}{2^n}$ tend vers 0 il en résulte que $f_n(x)$ tend vers 0 pour tout x. La limite ponctuelle est donc la fonction nulle. De plus :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N,\ n \geq N \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$$

donc :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N,\ n \geq N,\ \forall\ x \Rightarrow f_n(x) \leq \varepsilon$$

la convergence est donc bien uniforme.

Une série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur une partie A s'il existe une série numérique convergente $\sum a_n$ à termes positifs ou nuls telle que pour tout x de A $\|u_n(x)\| \leq a_n$.

exemple 59

La série $\sum \frac{\sin(nx)}{n!}$ converge normalement sur R puisque pour tout x :

$$\frac{|\sin(nx)|}{n!} \leq \frac{1}{n!}$$

et que $\sum \frac{1}{n!}$ converge.

exemple 60

(à traiter)

Vérifier que la série de terme général :

$$\frac{1}{(1+x)^n}$$

converge normalement sur [1 , +∞[.

---

réponse

En effet, on a remarqué la majoration :

$$\frac{1}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

et on sait que la série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge.

> Si une série converge normalement sur une partie A, alors elle converge uniformément sur A.

---

exemple 61

C'est le raisonnement utilisé dans l'exemple 58.

---

exemple 62
(à traiter)

En cherchant le maximum de la fonction u_n, montrer que la série de terme général :

$$u_n(x) = Log\left(1 + \frac{1}{n^2 x}\right)$$

converge uniformément sur [1 , +∞[.

---

réponse

Cette fonction est clairement décroissante (on peut aussi vérifier par un calcul de dérivée), donc le maximum est $u_n(1)$:

$$u_n(1) = Log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

et on a :

$$Log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$$

donc la série des maximum est convergente.

Il en résulte que $\sum Log\left(1+\frac{1}{n^2 x}\right)$ est normalement convergente.

Soit (u_n) une suite de fonctions réelles sur I. Soit A une partie de I telle que pour tout n, la fonction u_n soit continue sur A, et que la suite converge uniformément sur A. Alors la fonction limite est continue sur A.

---

exemple 63

La fonction zéta de Riemann est la somme (quand elle existe) de la série de terme général $u_n(x) = n^{-x}$. Cette fonction est continue sur]1 , +∞[.

En effet, soit a > 1, et ε tel que 1 < a – ε < a. Sur l'intervalle [a – ε , +∞[, la fonction u_n a pour maximum $u_n(a – ε)$. Or la série numérique :

$$\sum \frac{1}{n^{a-\varepsilon}}$$

converge, puisque 1 < a – ε. La série $\sum \frac{1}{n^x}$ est donc normalement convergente sur [a – ε , +∞[, donc sa somme y est continue, en particulier en a.

---

exemple 64

(à traiter)

Utiliser ce résultat pour montrer que dans l'exemple 57 la convergence n'est pas uniforme.

---

réponse

En effet la limite de cette suite de fonctions continues n'est pas continue.

Soit I = [a , b] un intervalle de R. Soit (u_n) une suite de fonctions continues sur I, uniformément convergente sur I, de limite u. On a

$$\lim\left(\int_a^b u_n(x)\,dx\right) = \int_a^b u(x)\,dx.$$

---

exemple 65

Reprenons l'exemple 57. L'intégrale de u_n est $\dfrac{1}{n+1}$, donc sa limite est 0. De même l'intégrale de la fonction u, limite de la suite, est 0. Pourtant cette suite ne converge pas uniformément.

Retenir que l'énoncé précédent n'admet pas de réciproque.

---

exemple 66

(à traiter)

Soit la suite de fonctions :

$$g_n(x) = x^n \text{ si } 0 \le x \le \frac{n-1}{n}$$

$$g_n(x) = n \text{ si } \frac{n-1}{n} < x < 1$$

$$g_n(1) = 0.$$

Etudier la convergence de cette suite et la validité de l'égalité de l'énoncé.

---

réponse

Pour tout x de [0 , 1[, pour n assez grand, on a :

$$x < \frac{n-1}{n}$$

donc la limite ponctuelle de la suite est la fonction 0, d'intégrale nulle, bien entendu.

L'intégrale de g_n s'écrit :

$$\int_0^1 g_n(x)dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} x^n dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 n dx$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} + 1$$

et cette suite d'intégrales tend vers 1.

La convergence n'est donc pas uniforme.

Une série $\sum u_n$ de fonctions de classe C1 qui converge simplement en au moins un point, et dont la série des dérivées $\sum u'_n$ converge uniformément sur tout intervalle fermé borné, converge uniformément sur tout intervalle fermé borné, vers une fonction dérivable, et $\left(\sum u_n\right)' = \sum u'_n$.

exemple 67

Considérons la série de fonctions de terme général :

$$u_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

qui converge ponctuellement en 0. On note s la somme de cette série.

La dérivée est :

$$u_n'(x) = -\frac{\sin(nx)}{n^2}$$

terme général d'une série absolument convergente sur R.

On peut donc dériver s terme à terme :

$$s'(x) = -\sum_1^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

exemple 68
(à traiter)

Dans l'exemple précédent, la dérivée seconde est :

$$-\frac{\cos(nx)}{n}.$$

Peut-on en déduire s''(0) ?

réponse

La série des dérivées secondes ne converge pas en 0. Le résultat ne s'applique donc pas ici.

2-3 Séries entières

On appelle série entière une série de fonctions dont le terme général est de la forme $u_n(x) = a_n x^n$.

exemple 69

On connaît la série exponentielle :

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

dont la somme est (par définition) e^x.

exemple 70

(à traiter)

La série de fonctions sur [0 , +∞[, de terme général :

$$v_n(x) = \frac{1}{n+x} x^n$$

est-elle une série convergente ? est-elle une série entière ?

\# réponse

Par le critère de D'Alembert, on voit que :

$$\left| \frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} \right| = |x| \frac{n+x}{n+1+x} \to |x|$$

donc cette série converge pour $|x| < 1$. Elle diverge pour $|x| \geq 1$.

Ce n'est pas une série entière.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée.

exemple 71

Pour la série entière suivante :

$$\sum \frac{x^n}{n^2+n+1}$$

le rayon de convergence est 1. En effet, si 0 ≤ r ≤ 1, la suite $\frac{r^n}{n^2+n+1}$ converge vers 0, donc est bornée. Par contre si r > 1, cette suite tend vers l'infini, elle n'est pas bornée.

---

exemple 72

(à traiter)

Quel est le rayon de convergence pour :

$$\sum \frac{x^n}{n!+n+1}.$$

---

réponse

Pour r positif, le terme général est équivalent à $\frac{r^n}{n!}$.

Or cette expression tend vers 0 quand n tend vers l'infini, quel que soit r. Rappelons pourquoi : soit r > 0, et N = E(r) + 1. Pour n > N :

$$u_n = \frac{r}{n} u_{n-1} < \frac{r}{N} u_{n-1} < \left(\frac{r}{N}\right)^{n-N} u_N.$$

Comme $\frac{r}{N} < 1$, on voit que u_n tend vers 0. L'expression $\frac{x^n}{n!+n+1}$ est donc bornée pour tout r : le rayon de convergence est infini.

Si R ≠ 0, la série est absolument convergente pour ||z|| < R, divergente pour ||z|| > R, et elle converge normalement sur tout disque fermé ||z|| ≤ r < R.

---

exemple 73

Dans l'exemple précédent, la série est absolument convergente pour tout x, et normalement convergente sur tout intervalle fermé et borné de R.

exemple 74
(à traiter)

Vérifier que la série entière :

$$\sum \frac{x^n}{n}$$

a pour rayon de convergence 1. Est-elle normalement convergente sur l'intervalle fermé borné [– 1 , 1] ?

réponse

On voit facilement que $\frac{r^n}{n}$ tend vers 0 si r ≤ 1, et vers +∞ si r > 1.Le rayon de convergence est 1. On en déduit que la série est normalement convergente sur tout intervalle fermé borné contenu dans l'intervalle ouvert]– 1 , 1[. Mais la série n'est pas normalement convergente sur l'intervalle fermé [–1 , 1], puisqu'elle n'est pas convergente en 1.

Si le quotient $\left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\|$ a pour limite L, alors le rayon de convergence est $\frac{1}{L}$, avec la convention que si L = 0, le rayon est infini, et si L est infinie, le rayon est 0.

exemple 75

On le vérifie sur l'exemple 74 :

$$\frac{n}{n+1} \to 1.$$

exemple 76
(à traiter)

Retrouver le rayon de convergence de l'exemple 72.

réponse

On écrit :

$$\frac{n!+n+1}{(n+1)!+n+2} \sim \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

donc le rayon de convergence est infini.

Soit I un intervalle ouvert contenant l'origine, et f une fonction définie sur I, à valeurs dans R. On dit que f est développable en série entière sur I s'il existe une suite réelle (a_n) telle que pour tout x de I on ait

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

exemple 77

Soit I =]– 1 , 1[, et f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Cette fonction est développable en série entière :

$$f(x) = \sum_{0}^{+\infty} x^n.$$

exemple 78

(à traiter)

La fonction définie sur]–1 , 1[par :

$$g(x) = \sqrt{x}$$

est-elle développable en série entière sur I ?

\# réponse

Non, car cette fonction n'est pas dérivable en 0. Or la somme d'une série entière le serait.

S'ils existent, les coefficients a_n sont donnés par $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$. En particulier, ils sont uniques.

exemple 79

Il faut donc pouvoir calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout n.
Si f est la fonction définie par :

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \quad pour\ x \neq 0$$
$$f(0) = 0,$$

on voit (par récurrence) que, pour tout n, $f^{(n)}(0) = 0$. Il suffit de voir que quel que soit l'entier k :

$$\frac{e^{-1/x^2}}{x^k} \to 0$$

quand x tend vers 0.

exemple 80
(à traiter)

Mais il ne suffit pas de calculer ces dérivées. Il faut également que la série converge, et que sa somme soit bien f. Est-ce le cas dans l'exemple précédent ?

réponse

Non, bien entendu, puisque la série est nulle et la fonction non nulle.

2-4 Séries de Fourier

On appelle série trigonométrique une série de fonctions dont le terme général est de la forme : $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$, si $n > 0$, $u_0(x) = a_0/2$, $b_0 = 0$;

exemple 81

La série :

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$$

est une série trigonométrique.

exemple 82

(à traiter)

La série de terme général :

$$\frac{\sin(nx+a)}{n!}$$

où a est un réel, est-elle une série trigonométrique ?

Si c'est le cas, expliciter les coefficients.

réponse

Effectivement, c'est une série trigonométrique, puisque :

$$\sin(nx + a) = \sin(nx)\cos(a) + \cos(nx)\sin(a).$$

Les coefficients sont :

$$a_0 = 2\sin(a), \text{ et pour } p > 0$$

$$a_p = \frac{\sin(a)}{p!}$$

$$b_p = \frac{\cos(a)}{p!}$$

On utilise également une écriture complexe des séries trigonométriques. En posant

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},\ n \geq 0$$

on obtient $\displaystyle \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$.

exemple 83

Ci-dessus :

$$\sum \sin(nx + a) = \sum c_n e^{inx}$$

avec les coefficients :

$$c_n = \frac{\sin(a) - i\cos(a)}{2},$$

$$c_{-n} = \frac{\sin(a) + i\cos(a)}{2}.$$

exemple 84

(à traiter)

Ecrire sous forme complexe la série trigonométrique de l'exemple 81.

réponse

On obtient :

$$c_n = \frac{-i}{2n},\ c_{-n} = \frac{i}{2n},\ n > 0.$$

Notons que si la série trigonométrique est réelle, alors $c_{-n} = \overline{c_n}$.

exemple 85

C'est ce qu'on vérifie dans les deux cas précédents.

exemple 86
(à traiter)

Mettre sous forme normale la série :

$$\sum_{n\in Z}\frac{e^{inx}}{n+i}.$$

réponse

On écrit :

$$\sum_{n\in Z}\frac{e^{inx}}{n+i}=\sum\cos(nx)\left(\frac{1}{n+i}+\frac{1}{-n+i}\right)+i\sin(nx)\left(\frac{1}{n+i}-\frac{1}{-n+i}\right)$$

donc :

$$\sum_{n\in Z}\frac{e^{inx}}{n+i}=-2i\sum\cos(nx)\left(\frac{1}{1+n^2}\right)+\sin(nx)\left(\frac{-n}{1+n^2}\right).$$

Si $\sum|a_n|$ et $\sum|b_n|$ sont convergentes, la série trigonométrique est uniformément convergente sur R. La somme de cette série est une fonction continue sur R.

exemple 87

Ce sera le cas par exemple pour :

$$\sum\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

exemple 88
(à traiter)

Donner des cas où la série :

$$\sum k^n\sin(nx)$$

converge uniformément sur R.

réponse

D'après l'énoncé rappelé, il suffit que $|k| < 1$.

Si les suites (a_n) et (b_n) sont des suites réelles décroissantes tendant vers 0, alors la série trigonométrique converge en tout point x tel que $x \neq 2k\pi$, k entier relatif, et converge uniformément sur tout intervalle fermé borné contenu dans $R - 2\pi Z$.

exemple 89

La série :

$$\sum \frac{\cos(nx)}{n+1} + \frac{\sin(nx)}{n}$$

converge d'après l'énoncé. Remarquer que la condition de convergence de l'énoncé précédent ne s'applique pas.

exemple 90

(à traiter)

Sous les hypothèses de cet énoncé, la série trigonométrique peut-elle converger en $x = 2k\pi$?

réponse

Bien entendu, c'est possible, en particulier si les séries $\sum |a_n|$, et $\sum |b_n|$ convergent, comme on l'a vu plus haut.

Soit f une fonction 2π-périodique, continue par morceaux sur R (à valeurs réelles ou complexes). On appelle coefficients de Fourier de f les nombres suivants …

exemple 91

Supposons que f soit définie par :

$$f(x) = 0 \text{ si } -\pi \leq x < 0,$$

$$f(x) = 1 \text{ si } 0 \leq x < \pi.$$

Les coefficients de Fourier sont :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{\pi}{\pi} = 1.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi}[\sin(nx)]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = \frac{1}{-n\pi}[\cos(nx)]_0^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{-n\pi}$$

donc :

$$b_{2p} = 0,$$

$$b_{2p+1} = \frac{2}{(2p+1)\pi}.$$

---

exemple 92
(à traiter)

Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π périodique définie sur l'intervalle [–π , π[par f(x) = x.

---

réponse

Les calculs sont les suivants :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx) + \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-2(-1)^n}{n}.$$

On peut choisir x_0 pour rendre le calcul plus facile pour une fonction particulière : on voit ainsi que si f est paire, alors $b_n = 0$ pour tout n, et si f est impaire alors $a_n = 0$ pour tout n.

exemple 93

C'est ce qu'on a constaté dans l'exemple 92.

exemple 94

(à traiter)

Vérifier ce résultat pour la fonction définie par f(x) = |x| sur [–π , π[.

réponse

Les coefficients b_n sont donnés par :

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\cos(nx) - \frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} - \pi\frac{\cos(n\pi)}{n}\right] = 0.
\end{aligned}
$$

3 Pour Comprendre et Utiliser

3-1 Énoncés des exercices

Savoir déterminer la convergence d'une série numérique. Calculer une valeur approchée ou déterminer l'expression exacte de la somme d'une série.

exercice 1

Sur le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

1) Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes (☞) positifs.

On suppose que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

à partir d'un certain rang.

Démontrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (☺)(🕯)(☞).

2) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ a pour limite 1, et qu'il existe un réel α et une fonction tendant vers 0 à l'infini ε, tels que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}.$$

Discuter, selon la valeur de α, la convergence de $\sum u_n$ (☺)(🕯).

3) Dans le cas précédent, on suppose que $\alpha = -1$, et qu'il existe un réel β tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\beta}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2}.$$

Etudier la convergence de $\sum u_n$ (☺).

4) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ a pour limite 1, et on écrit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1 + v_n},$$

(v_n) étant une suite de réels tendant vers 0. Démontrer que s'il existe un réel k tel que pour n assez grand :

$$nv_n \geq k > 1,$$

alors la série $\sum u_n$ converge, et que si pour n assez grand :

$$nv_n \leq 1$$

alors la série $\sum u_n$ diverge (☺).

5) Soit $\sum u_n$ une série telle que $u_n.u_{n+1} < 0$. On écrit :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{1}{1 + v_n},$$

démontrer que si, pour n assez grand :

$$-1 < v_n \leq 0$$

la série $\sum u_n$ diverge, et que si il existe un réel k tel que :

$$0 < k \leq n.v_n$$

pour n assez grand, alors $\sum u_n$ converge (☺).

---

exercice 2

Autour de $\sqrt[n]{u_n}$

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1) On suppose qu'il existe un réel α, de]0 , 1[, tel que :

$$\sqrt[n]{u_n} \leq 1 - \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Démontrer que la série $\sum u_n$ est convergente (☺).

2) Plus généralement, supposons que $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers 1 par valeurs inférieures. Soit f une application telle que, pour n assez grand :

$$\sqrt[n]{u_n} \leq 1 - \frac{1}{f(n)},$$

avec $\lim\left(\frac{1}{f(n)}\right) = 0$.

Démontrer que pour que $\sum u_n$ converge, il suffit qu'il existe un réel positif k < 1 tel que $\sum e^{\frac{-kn}{f(n)}}$ converge.

---

exercice 3

Echelles de Riemann et de Bertrand

1) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose qu'il existe un réel α tel que le produit :

$$n^{\alpha} u_n$$

ait une limite finie L. Discuter selon la valeur de α la convergence de la série $\sum u_n$ (☺).

2) Etudier, selon la valeur de β, la convergence de la série (☺) :

$$\sum \frac{1}{n(Log(n))^{\beta}}.$$

Soit $\sum u_n$ une série à termes (👓) positifs. On suppose qu'il existe β tel que le produit :

$$n(Log(n))^{\beta} u_n$$

ait une limite finie (🕯).

Discuter selon la valeur de β la convergence (👓) de $\sum u_n$ (☺).

---

exercice 4

Développements limités, équivalents (🕯)(👓)

1) Soit f une fonction tendant vers 1 à l'infini. On suppose qu'elle admet un développement limité de la forme :

$$f(n) = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + \frac{\varepsilon(n)}{n^3}.$$

Discuter, selon les valeurs de α, la convergence de la série de terme général (☺) :

$$(f(n))^{n^{\alpha}}.$$

On examinera successivement les cas :

a ≠ 0, a = 0 et b ≠ 0, a = b = 0 et c ≠ 0.

Application à la convergence des séries :

$$\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

$$\sum \left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$$

$$\sum \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}.$$

2) Chercher les polynômes P pour lesquels la série de terme général :

$$\sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt[4]{P(n)}$$

est convergente (☺).

3) En écrivant un développement limité du terme général, étudier la convergence des séries suivantes (☺) :

$$\sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\sum (-1)^n \left(e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right),$$

$$\sum 1-e^{(-1)^n\frac{Log(n)}{n}}.$$

---

exercice 5

Perturbation

Dans les exemples suivants, où les séries ne sont pas nécessairement à termes positifs, on cherche un équivalent (👓) du terme général (👓), puis on calcule la différence entre le terme général et son équivalent, ce qui fournit une autre série à étudier (🕯).

1) Etudier la convergence de (☺) :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}.$$

2) Etudier la convergence de (☺) :

$$\sum \frac{-1+(-1)^n\sqrt{n+1}}{n+1+(-1)^n\sqrt{n+1}}.$$

3) Etudier la convergence de :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^{3/4}+\cos(n)}.$$

4) Etudier la convergence de :

$$\sum \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1.$$

---

exercice 6

Autour de la formule de Stirling

Cette formule donne un équivalent (👓) à n!

1) On définit f(n) en posant :

$$n! = n^{\frac{2n+1}{2}} e^{-n} f(n).$$

On pose :

$$u_n = Log(f(n+1)) - Log(f(n)).$$

Ecrire un développement limité à l'ordre 3 en $\frac{1}{n}$ de u_n, et démontrer que la série $\sum u_n$ converge (☺).

En déduire que f(n) a une limite finie, soit K, quand n tend vers l'infini.

2) Etablir les relations (☺) :

$$\frac{1}{k^p} = \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^p} - p\int_{k-1}^{k} \frac{(t-k+1)dt}{t^{p+1}}$$

$$\frac{1}{k^2} = \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} - \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^3} + 3\int_{k-1}^{k} \frac{(k-t)(t-k+1)dt}{t^4}.$$

Déduire un développement à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$ du reste de la série $\sum u_n$.

3) Ecrire, à l'aide de la constante K, le développement limité de f(n) à l'ordre 2 en $\frac{1}{n}$, et en déduire une expression de n! (☺).

4) Calcul de K.

On définit une intégrale I_n par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt.$$

Etablir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n (☺). En déduire l'expression de I_{2n} et I_{2n+1}.

Montrer que I_n est une suite décroissante (☺).

Montrer que le rapport :

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$$

tend vers 1 (🕯), et en déduire la valeur de K (☺).

---

exercice 7

Sur la constante d'Euler

1) Soit f une fonction continue, décroissante, de [0 , +∞[dans [0 , +∞[.

Démontrer que la suite :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$$

est convergente (☺).

2) On suppose ici que $f(x) = \frac{1}{x}$. On note γ la limite de la suite définie à la question 1), dans ce cas (constante d'Euler).

Démontrer que γ vérifie :

$$0 \le \gamma \le 1.$$

3) Soit α un réel de l'intervalle]0 , 1[. La suite :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

a-t-elle une limite ?

> Connaître les notions de convergence ponctuelle, convergence uniforme, convergence normale, d'une série de fonctions. Etudier la convergence d'une série entière ou d'une série de Fourier, et les propriétés de sa somme. Utiliser les séries entières ou de Fourier pour résoudre divers problèmes : calcul d'intégrale, sommation d'expressions, résolution d'équations différentielles, développement d'une fonction.

---

exercice 8

Etudier les propriétés de convergence ponctuelle, normale ou uniforme (👓) des séries de fonctions suivantes. Le cas échéant, préciser quelles propriétés on peut en déduire quant à la continuité ou la dérivabilité de la somme (👓).

1) $\sum \frac{xe^{-nx}}{Log(n)}$. (☺)(🕯).

2) $\sum \frac{1}{1+x^{n}}$. (🕯)

3) $\sum x(1-x)^{n}$. (☺)(🕯).

4) $\sum \frac{\sin^{3}(nx)}{n!}$. (☺).

---

exercice 9

Autour de la fonction zeta de Riemann

On considère les fonctions suivantes (fonction zéta, et zéta alternée) :

$$\zeta(x) = \sum \frac{1}{n^x},\ \zeta_a(x) = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

1) Chercher leurs domaines de définition, étudier leur continuité, leur dérivabilité (☺)(🕯).

2) En calculant $\zeta(x) - \zeta_a(x)$, établir une relation entre ces deux fonctions.

3) Démontrer que, au voisinage de 1^+, on a l'équivalence (☺)(🕯) :

$$\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}.$$

4) Chercher la limite de $\zeta_a(x)$ quand x tend vers 1 (☺).

---

exercice 10

Séries entières

Trouver le rayon de convergence R des séries suivantes (🕯).

1) $\sum n^{(-1)^n} x^n$. Déterminer l'expression de la somme (☺).

2) $\sum \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$. Déterminer la somme (☺).

3) $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n (n!)^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Chercher une équation différentielle vérifiée par la somme f, puis déterminer f (☺).

4) $\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n+3\sin(n)}$. Etudier la convergence en R et –R, la convergence uniforme sur [–R , 0] (☺).

exercice 11

Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes.

On précisera dans chaque cas le rayon de convergence R.

1) $\left(Arc\sin(x)\right)^2$ Montrer que cette fonction vérifie une équation différentielle, et en déduire son développement (☺).

2) $\cos^3(x)$ (☺).

3) $e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}$. Ecrire d'abord une équation différentielle (☺).

4) $\dfrac{\sin(x)}{x}$. (☺).

5) $(1-x)^{\alpha}$. Ecrire d'abord une équation différentielle (α réel).

Déduire le développement de Arcsin(x), en étudiant la convergence aux extrémités de l'intervalle]– R , R[(☺).

exercice 12

On note f la fonction définie par f(x) = x sur $[0 , \pi]$.

1) Ecrire les prolongements 2π-périodique g_i de f à R possédant les propriétés suivantes :

g_1 est impaire

g_2 est paire.

2) Ecrire les développements en série de Fourier de g_1 et g_2, en précisant quelles sont leurs sommes respectives.

3) En ce qui concerne f, lequel de ces deux développements fournit la meilleure approximation (c'est-à-dire la plus rapidement convergente) (☺).

exercice 13

Résolution d'équations différentielles

Chercher les solutions développables en série entière des équations suivantes. On précisera dans chaque cas le rayon de convergence de la série obtenue.

1) xy'' + y' + xy = 0 (☺).
2) 4xy'' + 2y' – y = 0 (☺).

---

exercice 14

1) Montrer que la fonction f définie sur]0 , +∞[par :

$$f(x) = \frac{Log(1+x)}{x}$$

peut se prolonger en une fonction indéfiniment dérivable sur]–1 , +∞[.
On note ce prolongement encore f (☺).

2) A partir d'un développement en série entière de f(x), exprimer sous forme de série l'intégrale (☺) :

$$\int_0^1 f(t)dt.$$

3) Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par x^2 sur [–π , π].
En déduire la valeur de l'intégrale ci-dessus (☺).

3-2 Corrigés des exercices

exercice 1-C

1) Supposons la relation vraie à partir du rang N. On peut écrire, pour n supérieur à N :

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_N}{v_N}$$

donc :

$$u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n.$$

On en déduit que si $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge également.

(QC-1) Que peut-on dire si $\sum u_n$ diverge ( ) ?

2) Si α est strictement positif, alors le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est strictement plus grand que 1 pour n assez grand. La suite (u_n), positive et croissante, ne peut donc pas tendre vers 0. La série diverge.

Supposons maintenant $\alpha \leq 0$. Pour un réel β, posons :

$$v_n = n^{\beta}.$$

On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\beta} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\beta} = 1 + \frac{\beta}{n} + \frac{\varepsilon''(n)}{n}.$$

On voit que :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\beta}{n} + \frac{\varepsilon''(n)}{n} - 1 - \frac{\alpha}{n} - \frac{\varepsilon(n)}{n} = \frac{\beta - \alpha}{n} + \frac{\varepsilon_1(n)}{n}.$$

Donc si $\alpha < \beta$, la relation étudiée à la première question est vérifiée.

Supposons $\alpha < -1$, alors il existe β vérifiant $\alpha < \beta < -1$, donc $\sum v_n$ converge, et donc $\sum u_n$ converge.

Inversement, si $\beta < \alpha$ et si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge également. C'est le cas si $-1 < \alpha$: en effet il existe alors β vérifiant $-1 < \beta < \alpha$.

Il reste le cas où $\alpha = -1$.

Cette hypothèse ne permet pas de décider, en effet elle est vérifiée par :

$$\sum \frac{1}{n}\text{, qui diverge,}$$

$$\sum \frac{1}{n(Log(n))^2}\text{, qui converge.}$$

3) Soit t un réel, on pose :

$$v_n = \frac{1}{n+t}.$$

La série $\sum v_n$, équivalente à la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. Or on a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+t}{n+1+t} = \frac{1+\frac{t}{n}}{1+\frac{t+1}{n}} = \left(1+\frac{t}{n}\right)\left(1-\frac{t+1}{n}+\frac{(t+1)^2}{n^2}+\frac{\varepsilon(n)}{n^2}\right)$$

$$=1+\frac{t}{n}-\frac{t}{n}-\frac{1}{n}+\frac{(t+1)^2}{n^2}-\frac{t(t+1)}{n^2}+\frac{\varepsilon(n)}{n^2}$$

$$=1-\frac{1}{n}+\frac{(t+1)}{n^2}+\frac{\varepsilon(n)}{n^2}.$$

Choisissons t tel que $\beta > t + 1$, on a alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}$, et donc $\sum u_n$ diverge.

(QC-2) Si on suppose maintenant qu'on peut écrire :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\beta}{nLog(n)} + \frac{\varepsilon(n)}{nLog(n)}.$$

que peut-on dire de la convergence de $\sum u_n$.

4) Dans le premier cas, posons k = 1 + h, avec h > 0. On peut écrire :

$$v_n > \frac{1+h}{n},$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{1+\frac{1+h}{n}}.$$

Il en résulte, pour n assez grand ($n \geq N$) :

$$nu_n - (n+1)u_{n+1} \geq hu_{n+1}.$$

En ajoutant ces inégalités, il vient :

$$Nu_N \geq Nu_N - nu_n \geq h\left(u_{N+1} + \ldots + u_n\right)$$

ce qui démontre que la série converge.

Dans le second cas, si $n.v_n \leq 1$, on obtient :

$$nu_n \leq (n+1)u_{n+1}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$$

donc $\sum u_n$ diverge.

(QC-3) Expliquer comment utiliser ce résultat si $n.v_n$ *a une limite* $L \neq 1$.
Cet énoncé permet-il de résoudre tous les cas ?

5) Dans le premier cas, $1 \geq 1 + v_n > 0$, donc :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geq 1.$$

On voit que $|u_n|$ ne peut pas tendre vers 0 dans ce cas. La série diverge.

Dans le second cas, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{1}{1+\frac{k}{n}} < 1$$

donc le terme général décroit en valeur absolue. Il reste à prouver qu'il tend bien vers 0. Soit k' tel que 0 < k' < k, on pose :

$$w_n = \frac{1}{n^{k'}}.$$

On a les inégalités :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| - \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq \frac{1}{1+\frac{k}{n}} - \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{k'} = \frac{k'-k}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}$$

donc :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \frac{w_{n+1}}{w_n}$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{w_{n+1}}\right| \leq \left|\frac{u_n}{w_n}\right| \leq \left|\frac{u_N}{w_N}\right|$$

si la relation est vraie à partir de N. On en déduit que u_n tend vers 0 :

$$|u_n| \leq \left|\frac{u_N}{w_N}\right| w_n.$$

---

exercice 2-C

1) On a la majoration :

$$u_n \leq \left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)^n = e^{nLog\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)}.$$

On peut écrire le développement limité :

$$nLog\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)=n\frac{-1}{n^\alpha}(1+\varepsilon(n))=-n^{1-\alpha}(1+\varepsilon(n))$$

donc :

$$u_n \le e^{-n^{1-\alpha}(1+\varepsilon(n))} \le e^{\frac{-n^{1-\alpha}}{2}}.$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente.
Par exemple on peut observer que :

$$n^2 e^{\frac{-n^{1-\alpha}}{2}} \to 0$$

puisque $1-\alpha > 0$.
2) Dans ce cas, on a :

$$u_n \le \left(1-\frac{1}{f(n)}\right)^n = e^{nLog\left(1-\frac{1}{f(n)}\right)} = e^{-\frac{n}{f(n)}(1+\varepsilon(n))}.$$

Ici, $\varepsilon(n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc pour n assez grand, on a $k \le 1+\varepsilon(n)$, d'où :

$$u_n \le e^{-\frac{n}{f(n)}(1+\varepsilon(n))} \le e^{-\frac{n}{f(n)}k}$$

donc la série $\sum u_n$ converge bien.

exercice 3-C

1) L'hypothèse entraine l'existence d'une fonction ε tendant vers 0 à l'infini et vérifiant :

$$u_n = \frac{L}{n^\alpha}+\frac{\varepsilon(n)}{n^\alpha}.$$

Supposons $L \neq 0$. On écrit :

$$u_n \sim \frac{L}{n^\alpha},$$

donc la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Si L = 0, et $\alpha > 1$, alors la série converge, car u_n est majoré par $\frac{1}{n^\alpha}$ pour n assez grand. Par contre, si $\alpha \leq 1$, on ne peut pas conclure (voir le cas 2)).

2) On peut étudier cette série par comparaison avec l'intégrale généralisée :

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(Log(x))^\beta}$$

On écrit, si $\beta \neq 1$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(Log(x))^\beta} = \left[\frac{Log(x)^{-\beta+1}}{1-\beta}\right]_2^{+\infty}.$$

Donc si $\beta > 1$, l'intégrale (et donc la série), converge, et si $\beta < 1$, elles divergent.

Si $\beta = 1$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(Log(x))} = [Log(Log(x))]_2^{+\infty}.$$

L'intégrale est donc divergente, ainsi que la série.

Supposons donc qu'il existe β tel que l'expression :

$$n(Log(n))^\beta u_n$$

ait une limite finie L.

On procède comme précédemment. Si $L \neq 0$, on a l'équivalence :

$$u_n \sim \frac{L}{n(Log(n))^\beta}$$

donc la série de terme général u_n converge si et seulement si $\beta > 1$.

Si L = 0, il existe N tel que pour n > N, on ait :

$$u_n \leq \frac{1}{n(Log(n))^\beta}.$$

On voit donc que si β > 1, la série $\sum u_n$ converge, par majoration.

Par contre, si β ≤ 1, on ne peut pas conclure.

(QC-1) Généraliser avec l'échelle de Bertrand$_2$:

$$\sum \frac{1}{nLog(n)\big(Log(Log(n))\big)^{\gamma}}.$$

---

exercice 4-C

1) On écrit :

$$\big(f(n)\big)^{n^{\alpha}} = e^{n^{\alpha} Log\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{\varepsilon(n)}{n^3}\right)}.$$

Cas 1 : a ≠ 0.

On obtient :

$$\big(f(n)\big)^{n^{\alpha}} = e^{n^{\alpha} Log\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{\varepsilon(n)}{n^3}\right)} = e^{an^{\alpha-1}(1+\varepsilon(n))}.$$

Si a > 0, comme $n^{\alpha-1}$ tend vers 0, 1, ou +∞ selon que α < 1, α = 1, α > 1 on voit que le terme général de la série ne tend pas vers 0. La série diverge.

Si a < 0, le terme général ne tend vers 0 que si α > 1.

Examinons ce cas :

$$e^{an^{\alpha-1}(1+\varepsilon(n))} \le e^{\frac{an^{\alpha-1}}{2}}$$

et, l'exponentielle l'emportant sur toute puissance quand n tend vers l'infini, on a :

$$n^2 e^{\frac{an^{\alpha-1}}{2}} \to 0$$

donc la série converge.

Cas 2 : a = 0, b ≠ 0.

On obtient :

$$(f(n))^{n^\alpha} = e^{n^\alpha Log\left(1+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}+\frac{\varepsilon(n)}{n^3}\right)} = e^{bn^{\alpha-2}(1+\varepsilon(n))}.$$

Si b > 0, comme $n^{\alpha-2}$ tend vers 0, 1, ou +∞ selon que $\alpha < 2$, $\alpha = 2$, $\alpha > 2$ on voit que le terme général de la série ne tend pas vers 0. La série diverge.

Si b < 0, le terme général ne tend vers 0 que si $\alpha > 2$. Examinons ce cas :

$$e^{bn^{\alpha-2}(1+\varepsilon(n))} \leq e^{\frac{bn^{\alpha-2}}{2}}$$

et, l'exponentielle l'emportant sur toute puissance quand n tend vers l'infini, on a :

$$n^2 e^{\frac{bn^{\alpha-2}}{2}} \to 0$$

donc la série converge.

Cas 3 : a = b = 0, c ≠ 0.

Les mêmes raisonnements montrent que la série ne converge que si c < 0 et $\alpha > 3$.

$$\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

On écrit :

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}.$$

donc a = –1 et $\alpha = 2$. La série converge.

$$\sum\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}.$$

Dans ce cas :

$$n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{\varepsilon(n)}{n^3}\right) = 1 - \frac{1}{6n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2}.$$

On voit que a = 0, b < 0, donc la série converge si et seulement si $\alpha > 2$.

$$\sum\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}.$$

On a le développement :

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2}.$$

On voit que a = 0, b < 0, donc la série converge si et seulement si $\alpha > 2$.

2) Soit d le degré de P, et ax^d son terme dominant :

$$\sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - \sqrt[4]{P(n)} = n\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} - \sqrt[4]{\frac{P(n)}{n^4}}\right)$$

donc pour que le terme général de la série tende vers 0, il est nécessaire que le facteur entre parenthèses, ci-dessus, tende vers 0, et donc que le second radical tende vers 1, ce qui exige d = 4 et a = 1.

On écrit :

$$P(n) = n^4 + bn^3 + cn^2 + en + f,$$

$$\sqrt[4]{\frac{P(n)}{n^4}} = \left(1+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{e}{n^3}+\frac{f}{n^4}\right)^{1/4}.$$

Les termes d'ordre 3 ou plus en $\frac{1}{n}$ de la parenthèse ci-dessus, après produit par n, correspondent à des séries de Riemann convergentes.

Si celui d'ordre 1 n'est pas nul, le terme général de la série aura une limite finie non nulle, donc la série ne convergera pas. Si le terme d'ordre 1 est nul et celui d'ordre 2 non nul, il correspondra à la série harmonique, donc la série sera divergente.

Pour que la série considérée converge, il est donc nécessaire et suffisant que les termes d'ordre moindre que 3 soient nuls :

$$\left(1+\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}+\frac{e}{n^3}+\frac{f}{n^4}\right)^{1/4}=1+\frac{1}{4}\left(\frac{b}{n}+\frac{c}{n^2}\right)-\frac{3}{32}\frac{b^2}{n^2}+\frac{\varepsilon(n)}{n^2}$$

$$=1+\frac{b}{4n}+\frac{8c-3b^2}{32n^2}+\frac{\varepsilon(n)}{n^2},$$

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/3}=1+\frac{2}{3n}-\frac{1}{9n^2}+\frac{\varepsilon'(n)}{n^2},$$

$$\sqrt[3]{n^3+2n^2}-\sqrt[4]{P(n)}=n\left(\frac{8-3b}{12n}+\frac{-32-72c+27b^2}{9\times 32n^2}+\frac{\varepsilon''(n)}{n^2}\right).$$

On doit donc avoir :

$$b=\frac{8}{3},$$

$$c=\frac{20}{9}.$$

Les polynômes P convenables sont donc ceux de la forme :

$$n^4+\frac{8}{3}n^3+\frac{20}{9}n^2+en+f.$$

3) $\sum(-1)^n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

Il s'agit d'une série alternée car on a :

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+\frac{\varepsilon(n)}{n}$$

donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est positif, c'est la valeur absolue du terme général. Il est clair que $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 en décroissant. La série est donc convergente.

$$\sum (-1)^n \left(e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \right).$$

Calculons de même :

$$(-1)^n \left(e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+\varepsilon(n)}{n\sqrt{n}},$$

il s'agit donc d'une série à terme positifs (et non d'une série alternée). L'expression est somme de $\frac{(-1)^n}{n}$, et $\frac{1+\varepsilon(n)}{n\sqrt{n}}$, qui correspondent à des séries convergentes, et de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. Cette série est donc divergente.

$$\sum 1 - e^{(-1)^n \frac{Log(n)}{n}}.$$

Le développement limité est le suivant :

$$1 - e^{(-1)^n \frac{Log(n)}{n}} = 1 - \left(1 + (-1)^n \frac{Log(n)}{n} + \frac{Log(n)^2 + \varepsilon(n)}{n^2} \right)$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{Log(n)}{n} - \frac{Log(n)^2 + \varepsilon(n)}{n^2}.$$

On observe donc la somme d'une série alternée ($\frac{Log(n)}{n}$ tend vers 0 en décroissant) et d'une série convergente. Cette série est convergente.

---

exercice 5-C

1) $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

Le terme général est équivalent à :

$$\frac{(-1)^n}{n}$$

d'où la différence :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}-\frac{(-1)^n}{n}=(-1)^n\,\frac{n-n-(-1)^n}{n\big(n+(-1)^n\big)}$$
$$=-\frac{1}{n\big(n+(-1)^n\big)}$$

qui est équivalente à :

$$-\frac{1}{n^2}$$

donc est le terme général d'une série convergente.

La série $\sum\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ est donc la somme de deux séries convergentes, elle est donc convergente également.

2) $\sum\frac{-1+(-1)^n\sqrt{n+1}}{n+1+(-1)^n\sqrt{n+1}}$.

Le terme général est équivalent à :

$$\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{n+1}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

d'où la différence :

$$\frac{-1+(-1)^n\sqrt{n+1}}{n+1+(-1)^n\sqrt{n+1}}-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}=\frac{-1+(-1)^n\sqrt{n+1}-(-1)^n\big(\sqrt{n+1}+(-1)^n\big)}{n+1+(-1)^n\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{-2}{n+1+(-1)^n\sqrt{n+1}}.$$

Cette différence est de signe constant et équivalente à $\frac{-2}{n}$, c'est donc le terme général d'une série divergente. La série considérée, somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente (contrairement à son équivalent).

3) $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos(n)}$.

Un équivalent est :

$$\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}$$

d'où la différence :

$$\frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos(n)} - \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} = (-1)^n \frac{\cos(n)}{n^{3/2} + n^{3/4}\cos(n)}.$$

Cette différence est le terme général d'une série absolument convergente, puisque :

$$\frac{|\cos(n)|}{n^{3/2} + n^{3/4}\cos(n)} \sim \frac{|\cos(n)|}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}.$$

La série étudiée est somme d'une série alternée et d'une série absolument convergente, elle est donc convergente.

4) $\sum \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.

Un équivalent est :

$$\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$$

et la différence s'écrit :

$$\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} = -\frac{1}{8}\left(\frac{1 + \varepsilon(n)}{n}\right)$$

cette série apparaît donc comme somme d'une série alternée (donc convergente) et d'une série de Riemann divergente. Elle diverge.

---

exercice 6-C

1) Calculons le développement du terme u_n :

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{(n+1)!\,e^{n+1}n^{\frac{2n+1}{2}}}{n!\,e^{n}(n+1)^{\frac{2n+3}{2}}} = e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2}}$$

$$u_n = 1+\frac{2n+1}{2}Log\left(\frac{n}{n+1}\right), = 1-\frac{2n+1}{2}Log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+\frac{\varepsilon(n)}{n^4}\right)$$

$$= 1-1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{4n^3}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{8n^4}+\frac{\varepsilon(n)}{n^4}$$

$$= -\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{12n^3}+\frac{\varepsilon(n)}{n^3}.$$

Le terme u_n est donc équivalent au terme d'une série de Riemann qui converge, donc $\sum u_n$ converge.

Soit S_n sa somme partielle d'ordre n, on a :

$$S_n = \mathrm{Log}(f(n+1)) - \mathrm{Log}(f(1))$$

donc :

$$f(n+1) = e^{S_n+1},$$

et comme S_n a une limite finie S, quand n tend vers $+\infty$, f(n) tend également vers une limite finie $K = e^{S+1}$.

2) Il suffit de calculer les intégrales.

Pour la première relation :

$$\frac{1}{k^p} = \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^p} - p\int_{k-1}^{k}\frac{(t-k+1)dt}{t^{p+1}}$$

Pour la seconde relation :

$$\frac{1}{k^2} = \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2} - \int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^3} + 3\int_{k-1}^{k}\frac{(k-t)(t-k+1)dt}{t^4}$$

D'après le développement obtenu pour u_n plus haut, on a :

$$\sum_{n+1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{12}\sum_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{12}\sum_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3} + \sum_{n+1}^{+\infty}\frac{\varepsilon(k)}{k^3}.$$

Le reste de la série s'exprime donc par :

$$-\frac{1}{12}\left(\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^2} - \int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^3} + 3\sum_{n+1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{(k-t)(t-k+1)}{t^4}\,dt\right) + \frac{1}{12}\sum_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3} + \sum_{n+1}^{+\infty}\frac{\varepsilon(k)}{k^3}.$$

On peut remarquer que :

$$0 \le (k-t)(t-k+1) \le \frac{1}{4}$$

sur l'intervalle d'intégration.

On a donc :

$$\sum_{n+1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{(k-t)(t-k+1)}{t^4}\,dt \le \frac{1}{4}\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^4} = \frac{1}{12n^3}.$$

Par ailleurs, on écrit :

$$\frac{1}{12}\sum_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3} = \frac{1}{12}\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^3} - \frac{1}{4}\sum_{n+1}^{+\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{(t-k+1)}{t^4}\,dt$$

$$= \frac{1}{24n^2} + \frac{\varepsilon_1(n)}{n^3}.$$

Enfin, pour $\sum_{n+1}^{+\infty}\frac{\varepsilon(k)}{k^3}$, on remarque que pour tout réel ε', il existe un rang à partir duquel :

$$\sum_{n+1}^{+\infty}\frac{\varepsilon(k)}{k^3} \le \varepsilon' \sum_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^3},$$

donc $\sum_{n+1}^{+\infty}\frac{\varepsilon(k)}{k^3}$ est d'ordre supérieur à $\frac{1}{n^2}$.

En récapitulant, on voit que le reste de la série étudiée est de la forme :

$$\sum_{n+1}^{+\infty} u_k = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)+\frac{1}{24n^2}+\frac{\varepsilon_2(n)}{n^2},$$
$$= -\frac{1}{12n}+\frac{1}{12n^2}+\frac{\varepsilon_2(n)}{n^2}.$$

3) Avec les notations de la question 1), on a :

$$Log(f(n)) = S+1-\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = S+1+\frac{1}{12(n-1)}-\frac{1}{12(n-1)^2}+\frac{\varepsilon_2(n)}{n^2},$$
$$= S+1+\frac{1}{12n}+\frac{\varepsilon_2(n)}{n^2}.$$

D'où le développement de f(n) :

$$f(n) = Ke^{\frac{1}{12n}+\frac{\varepsilon_2(n)}{n^2}} = K\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\frac{\varepsilon(n)}{n^2}\right).$$

On en tire enfin le développement suivant de n! :

$$n! = K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}+\frac{\varepsilon(n)}{n^2}\right).$$

4) Les calculs sont les suivants :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+2}(t)dt = \left[-\cos(t)\sin^{n+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^2(t)\sin^n(t)dt$$
$$= (n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}.$$

D'où la relation :

$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$

Pour n = 0 et n = 1, on obtient :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2},$$
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)dt = \left[-\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Pour les indices impairs, on obtient donc :

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \ldots = \frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n+1)},$$

d'où en multipliant par 2.4.6…(2n) numérateur et dénominateur :

$$I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

D'une manière analogue, on trouve :

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \frac{\pi}{2}.$$

L'expression sin(t) étant comprise entre 0 et 1 sur l'intervalle d'intégration, on a les inégalités :

$$\sin^{2n+1}(t) \leq \sin^{2n}(t) \leq \sin^{2n-1}(t),$$

donc :

$$I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} .$$

On en déduit l'encadrement :

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}.$$

Le rapport indiqué tend bien vers 1.

Or ce rapport vaut :

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n)!\,(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^4} \times \frac{\pi}{2}$$

ce qui s'écrit, avec la formule donnant n! ci-dessus :

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \sim \frac{K\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n} \times K\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}\sqrt{2n+1}}{2^{4n}K^4\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}\left(\sqrt{n}\right)^4} \times \frac{\pi}{2}$$

$$\sim \frac{\pi 2^{2n+2n+1+1-4n-1}\, n^{2n+2n+1+1-4n-2}}{eK^2} \times \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}$$

d'où :

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \to \frac{2\pi}{K^2}.$$

Ce résultat donne la valeur de K :

$$K = \sqrt{2\pi},$$

et la formule asymptotique :

$$n! = \sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2}\right).$$

(QC-1) Quel est le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum C_{2n}^n x^n.$$

---

exercice 7-C

1) On écrit :

$$f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(t)dt \le f(k-1).$$

On obtient donc par sommation :

$$\sum_{2}^{n} f(k) \le \int_{1}^{n} f(t)dt \le \sum_{1}^{n-1} f(k).$$

Il en résulte :

$$\sum_{1}^{n} f(k) - f(1) \le \int_{1}^{n} f(t)dt \le \sum_{1}^{n} f(k) - f(n)$$

$$f(n) \le \sum_{1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(t)dt \le f(1)$$

donc la suite étudiée est positive. Elle est également décroissante :

$$\sum_{1}^{n} f(k) - \sum_{1}^{n-1} f(k) - \int_{n-1}^{n} f(t)dt = f(n) - \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \le 0.$$

La suite étant décroissante et minorée elle est convergente, et admet une limite positive ou nulle.

2) Dans ce cas la limite obtenue à la première question est appelée la constante d'Euler. On sait déjà qu'elle est positive ou nulle.

On a également obtenu la majoration :

$$\sum_{1}^{n} f(k) - \int_{1}^{n} f(t)dt \leq f(1)$$

donc ici la suite est majorée par 1, ainsi que sa limite.

3) La forme de cette suite incite à appliquer 1) avec :

$$f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}},$$

ce qui montre que l'expression a bien une limite :

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{p^{\alpha}} - \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^{\alpha}} = \sum_{1}^{n} \frac{1}{p^{\alpha}} - \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \right]_{1}^{n}$$

$$= \sum_{1}^{n} \frac{1}{p^{\alpha}} - \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}.$$

(QC-1) Vérifier qu'on obtient de cette manière un équivalent de la somme:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

---

exercice 8-C

1) Le terme général :

$$\frac{xe^{-nx}}{Log(n)}$$

ne tend pas vers 0 si x < 0, donc la série ne peut converger que sur l'intervalle [0 , +∞[. Il est clair qu'elle converge pour x = 0. Supposons donc x > 0.

Comme l'exponentielle l'emporte sur toute puissance, on voit que :

$$n^2 \frac{xe^{-nx}}{Log(n)} \to 0.$$

La série converge donc simplement sur [0 , +∞[. Soit S1 sa somme.

Etudions les variations de la fonction :

$$x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{Log(n)}.$$

Pour tout a > 0, pour n assez grand, la dérivée est négative sur [a , +∞[. Le terme général de la série est donc majoré sur [a , +∞[par :

$$\frac{ae^{-na}}{Log(n)}$$

terme général d'une série numérique convergente.

Il en résulte que la série de fonction converge normalement sur tout intervalle [a , +∞[.

(QC-1) Montrer que la série ne converge pas normalement sur [0 , +∞[.

Le terme général est une fonction continue, donc la somme S1 est continue sur]0 , +∞[, puisque pour tout b > 0 :

b [b/2 , +∞[,

et que la série converge normalement donc uniformément sur cet intervalle.

La dérivée du terme général vérifie pour x > 0 :

$$n^2 \frac{(1-nx)e^{-nx}}{Log(n)} \to 0$$

donc la série des dérivées converge simplement sur [0 , + ∞[, et d'après le même argument que précédemment, normalement sur tout intervalle de la forme [a , + ∞[(a > 0). La fonction S1 est donc dérivable sur]0 , +∞[.

Cherchons si la série converge uniformément sur [0 , +∞[.

Le reste de la série est défini puisque la série converge simplement :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{xe^{-kx}}{Log(k)} \leq \int_n^{+\infty} \frac{xe^{-tx}}{Log(t)} dt \\ &\leq \frac{x}{Log(n)} \int_n^{+\infty} e^{-tx} dt \\ &= \frac{e^{-nx}}{Log(n)} \\ &\leq \frac{1}{Log(n)}. \end{aligned}$$

On voit que le reste converge vers 0, uniformément sur [0 , +∞[.

La fonction S1 est donc continue sur cet intervalle.

2) $\sum \frac{1}{1+x^n}$.

Le terme général ne tend pas vers 0 si x^n ne tend pas vers l'infini.

On étudie donc cette série pour |x| > 1.

Dans ce cas :

$$\left| \frac{1}{1+x^n} \right| \sim \left| \frac{1}{x} \right|^n$$

donc la série converge ponctuellement sur]–∞ , –1[≈]1 , +∞[.

Soit a un réel de l'ensemble de convergence ponctuelle, par exemple :

$$1 < a.$$

Le rapport :

$$\frac{x^n}{1+x^n}$$

tend vers 1, donc pour n assez grand, sur [a , +∞[:

$$\frac{x^n}{1+x^n} \leq 2$$
$$\frac{1}{1+x^n} \leq \frac{2}{x^n} \leq \frac{2}{a^n}.$$

On voit que la série converge normalement sur [a , +∞[, comme sur l'autre intervalle de convergence]–∞ , –a].

La somme de la série est donc continue sur]–∞ , –1[≈]1 , +∞[.

La dérivée du terme général est :

$$\frac{-nx^{n-1}}{\left(1+x^n\right)^2}.$$

Cette série converge en valeur absolue pour |x| > 1 :

$$\frac{n|x|^{n-1}}{\left(1+x^n\right)^2} \sim \frac{n}{|x|^{n+1}}.$$

Elle converge uniformément sur tout intervalle fermé [a , +∞[du domaine de convergence ponctuelle (et de même sur]–∞ , a] si a < 0) :

$$\frac{nx^{n-1}}{\left(1+x^n\right)^2} \leq \frac{2nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{2n}{x^{n+1}} \leq \frac{2n}{a^{n+1}}.$$

La somme de la série est donc une fonction dérivable sur son domaine de convergence ponctuelle.

(QC-2) Montrer que la somme de la série est indéfiniment dérivable.

3) $\sum x(1-x)^n$.

Il s'agit, presque, de la série géométrique, on voit donc que cette série converge pour |1 – x| < 1, soit 0 < x < 2. On peut compléter par 0 en raison du facteur x. Le domaine de convergence ponctuelle est [0 , 2[.

Soit S3 la somme de cette série. On voit que S3(0) = 0.
De plus pour 0 < x < 2 on a :

$$S3(x) = \sum_{0}^{+\infty} x(1-x)^n = x\frac{1}{1-(1-x)} = 1.$$

Cette somme étant non continue en 0, la série ne converge uniformément sur aucun intervalle de la forme [0 , a], a < 2.

(QC-3) Etudier l'intégration terme à terme de cette série sur [0 , 1].

4) $\sum \frac{\sin^3(nx)}{n!}$.

Cette série est normalement convergente sur R :

$$\left|\frac{\sin^3(nx)}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!}.$$

La somme de la série est donc définie et continue sur R, on la note S4.
La dérivée du terme général de la série est :

$$\frac{3n\cos(nx)\sin^2(nx)}{n!} = \frac{3\cos(nx)\sin^2(nx)}{(n-1)!}.$$

Cette nouvelle série est également normalement convergente, donc S4 est dérivable sur R.

(QC-4) Chercher la somme S4 de la série.

---

exercice 9-C

1) **Fonction zéta**

La fonction définie par :

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x}$$

est indéfiniment dérivable, et :

$$u_n^{(p)}(x) = (-Log(n))^p \frac{1}{n^x}.$$

Soit a un réel supérieur à 1. On sait que la série numérique de terme général :

$$(Log(n))^p \frac{1}{n^a}$$

est convergente. Pour x ≥ a, on a :

$$\left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq (Log(n))^p \frac{1}{n^a}.$$

Il en résulte que pour tout p, la série dont le terme général est la dérivée p-ième du terme général de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ est normalement convergente sur [a , +∞[. La fonction zéta est donc indéfiniment dérivable sur un tel intervalle, pour tout a > 1. La fonction zéta est par conséquent indéfiniment dérivable sur l'intervalle ouvert]1 , +∞[.

Fonction zéta alternée

Par le critère des séries alternées, on voit que cette série converge simplement si et seulement si x est strictement positif.

Le reste de cette série est majoré :

$$\left|\sum_{n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^x}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$$

donc si x ≥ a > 0, on a :

$$\left|\sum_{n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^x}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^a}$$

donc la série converge uniformément sur tout intervalle [b , +∞[, b > 0.

La fonction zéta alternée est donc continue sur]0 , +∞[.

La dérivée d'ordre p du terme général v_n de cette série est :

$$v_n^{(p)}(x) = (-1)^{n-1}(-Log(n))^p \frac{1}{n^x}.$$

Il en résulte que la fonction zéta alternée est indéfiniment dérivable sur l'intervalle]0 , +∞[.

2) On obtient, pour x > 1 :

$$\zeta(x)-\zeta_a(x)=\sum\frac{1}{n^x}-\frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

$$=\sum\frac{2}{(2n)^x},$$

$$=2^{1-x}\sum\frac{1}{n^x},$$

$$\zeta(x)-\zeta_a(x)=2^{1-x}\zeta(x).$$

3) On observe d'abord, par l'encadrement usuel, pour x > 1 :

$$\frac{1}{(n+1)^x}\leq\int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x}\leq\frac{1}{(n)^x}$$

d'où :

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(p+1)^x}\leq\int_1^{n+1}\frac{dt}{t^x}\leq\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^x}$$

$$\zeta(x)-1\leq\frac{1}{x-1}\leq\zeta(x)$$

$$\frac{1}{x-1}\leq\zeta(x)\leq1+\frac{1}{x-1}.$$

On en déduit que le produit $(x-1)\zeta(x)$ tend vers 1, d'où le résultat.

4) D'après la question 2, on peut écrire :

$$\zeta_a(x)=\left(1-2^{1-x}\right)\zeta(x)=\left((x-1)Log(2)+(x-1)\varepsilon(x-1)\right)\zeta(x)$$

et compte-tenu de la question précédente, on voit que :

$$\zeta_a(x)\to Log(2).$$

(QC-1) Retrouver ainsi l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = Log(2).$$

---

exercice 10-C

1) $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

Si $|x| \geq 1$, le terme général ne tend pas vers 0. Il est donc nécessaire que R soit inférieur à 1.

Supposons donc $|x| < 1$, et étudions la convergence de la série :

$$\sum n^{(-1)^n} x^n = x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 4x^4 + \dots$$

La série de terme général $2px^{2p}$ a pour rayon de convergence 1.

De plus :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} 2px^{2p} = x\sum_{p=0}^{+\infty} 2px^{2p-1}$$

et $\sum_{p=0}^{+\infty} 2px^{2p-1}$ est la dérivée de $\sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p}$. On a donc :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} 2px^{2p} = x\left(\frac{1}{1-x^2}\right)' = \frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

La série de terme général $\frac{x^{2p+1}}{2p+1}$ a pour rayon de convergence 1.

Sa somme est une primitive de :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p} = \frac{1}{1-x^2}.$$

On a donc :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} = \frac{1}{2} Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C$$

et comme le premier membre s'annule pour x = 0, C = 0.

En conclusion, la série étudiée a pour rayon de convergence 1, et sa somme est :

$$\frac{1}{2} Log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}.$$

2) $\sum \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$.

Le rayon de convergence est 1. La décomposition :

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)$$

montre qu'il suffit de calculer les sommes des séries entières de rayon de convergence 1 :

$$f(x) = \sum \frac{x^n}{(n+1)}$$

$$g(x) = \sum \frac{x^n}{(n+3)}.$$

On écrit :

$$\left(xf(x)\right)' = \sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

donc :

$$xf(x) = C - Log(1-x)$$

et comme f(0) est défini, on trouve C = 0 :

$$f(x) = -\frac{Log(1-x)}{x}.$$

D'une manière analogue, on écrit :

$$\left(x^3 g(x)\right)' = \sum_{n\geq 2} x^n = \frac{x^2}{1-x}.$$

On obtient donc :

$$x^3 g(x) = C - \frac{x^2}{2} - x - Log(1-x),$$

et on doit choisir C = 0 puisque g est définie en 0 :

$$g(x) = \frac{-\frac{x^2}{2} - x - Log(1-x)}{x^3}.$$

En conclusion, le rayon de convergence de la série étudiée est 1, et sa somme est :

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{Log(1-x)}{x} - \frac{-\frac{x^2}{2} - x - Log(1-x)}{x^3}\right)$$

soit :

$$\frac{\frac{x^2}{2} + x + Log(1-x) - x^2 Log(1-x)}{2x^3},$$

prolongé en 0 par $\frac{1}{3}$.

3) $\sum_{n\geq 0} \frac{4^n (n!)^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Notons a_n le coefficient de x^n dans cette série ($n \geq 1$) :

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{4^n((n)!)^2}{(2n+1)!}\frac{(2n-1)!}{4^{n-1}((n-1)!)^2}\\ &= \frac{4(n)^2}{(2n+1)(2n)}\\ &= \frac{2n}{2n+1}.\end{aligned}$$

Le rayon de convergence de cette série est donc 1. Soit f(x) sa somme.
La dérivée est :

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1}(2n+1)a_n x^{2n} = \sum_{n\geq 1}(2n)a_{n-1}x^{2n}.$$

On obtient :

$$\sum_{n\geq 1}(2n)a_{n-1}x^{2n} = \sum_{n\geq 1}(2n-1)a_{n-1}x^{2n} + \sum_{n\geq 1}a_{n-1}x^{2n}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{n\geq 0}(2n+1)a_n x^{2n+2} + \sum_{n\geq 0}a_n x^{2n+2}\\ &= 1 + x^2 f'(x) + xf(x).\end{aligned}$$

Donc f est solution, sur]–1 , 1[, de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

Résolvons l'équation homogène :

$$(1-x^2)y' - xy = 0.$$

On écrit :

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1-x^2},$$

donc :

$$Log\left(\left|\frac{y}{C}\right|\right) = -\frac{1}{2}Log\left(1-x^2\right)$$

$$y = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La méthode de variation de la constante donne :

$$y' = \frac{C'}{\sqrt{1-x^2}} + C\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'$$

$$(1-x^2)y' - xy = C'\sqrt{1-x^2} = 1$$

$$C' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$C = Arc\sin(x),$$

d'où la solution générale de l'équation différentielle :

$$y = \frac{C + Arc\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La somme f(x) de la série vérifie f(0) = 0, d'où, pour –1 < x < 1 :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{4^n (n!)^2 x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{Arc\sin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(QC-1) En déduire l'égalité :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{2}.$$

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n + 3\sin(n)}$.

Le rayon de convergence est 1, puisque n + 3sin(n) ~ n, et que la série :

$$\sum \frac{x^n}{n}$$

a pour rayon de convergence 1.

Pour la même raison, la série diverge pour x = 1, puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Pour x = –1, on écrit :

$$\frac{(-1)^n}{n+3\sin(n)} - \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \frac{-3\sin(n)}{n(n+3\sin(n))},$$

$$\left|(-1)^n \frac{-3\sin(n)}{n(n+3\sin(n))}\right| = 3\frac{|\sin(n)|}{n(n+3\sin(n))} \sim \frac{3|\sin(n)|}{n^2}$$

$$\frac{3|\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{3}{n^2}.$$

On voit que dans ce cas, la série est somme d'une série alternée, convergente, et d'une série absolument convergente. Elle est donc convergente.

Plus généralement, sur [–1 , 0], la série est somme de deux séries convergentes :

$$\sum \frac{x^n}{n+3\sin(n)} = \sum \frac{x^n}{n} - \sum x^n \frac{3\sin(n)}{n(n+3\sin(n))},$$

on peut donc écrire, pour les restes :

$$\sum_{n\geq N} \frac{x^n}{n+3\sin(n)} = \sum_{n\geq N} \frac{x^n}{n} - \sum_{n\geq N} x^n \frac{3\sin(n)}{n(n+3\sin(n))},$$

et pour majorer le reste de la série étudiée, il suffit de majorer les restes de ces deux séries convergentes :

$$\left|\sum_{n\geq N} \frac{x^n}{n}\right| \leq \frac{|x|^N}{N} \leq \frac{1}{N},$$

$$\left|\sum_{n\geq N} x^n \frac{3\sin(n)}{n(n+3\sin(n))}\right| \leq \sum_{n\geq N} \frac{3}{n(n-3)}$$

et ce dernier reste tend vers 0, puisque la série $\sum_{n\geq 4} \frac{3}{n(n-3)}$ est convergente. En résumé, le reste de la série étudiée est majoré par une suite indépendante de x, tendant vers 0. La convergence est donc uniforme sur l'intervalle [–1 , 0].

exercice 11-C

1) $f(x) = (Arc\sin(x))^2$.

Les dérivées de f vérifient :

$$\sqrt{1-x^2}\, f'(x) - 2Arc\sin(x) = 0$$

$$\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, f'(x) + \sqrt{1-x^2}\, f''(x) - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$xf'(x) + \left(1-x^2\right) f''(x) + 2 = 0.$$

La fonction f est donc une solution de l'équation différentielle :

$$xy' - \left(1-x^2\right) y'' + 2 = 0.$$

C'est l'unique solution qui vérifie f(0) = f'(0) = 0.

La fonction f' est solution de :

$$xy - \left(1-x^2\right) y' + 2 = 0.$$

C'est l'unique solution qui vérifie y(0) = 0.

Soit :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

une série entière. Cherchons à quelle condition elle vérifie l'équation différentielle du premier ordre précédente. On doit avoir :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + 2 = 0.$$

Cette égalité est vérifiée si et seulement si les égalités sont vraies :

terme de degré 0, $-a_1 + 2 = 0$,

terme de degré 1, $a_0 - 2a_2 = 0$,

terme de degré p $\geq$ 1, $a_{p-1} - (p+1)a_{p+1} + (p-1)a_{p-1} = 0$, soit :

$$a_1 = 2,$$
$$pa_{p-1} = (p+1)a_{p+1},$$

on obtient :

$$a_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1}a_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1}\frac{2p-2}{2p-1}\frac{2p-4}{2p-3}\dots\frac{2}{3}(2)$$
$$a_{2p} = \frac{2p-1}{2p}a_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p}\frac{2p-3}{2p-2}\frac{2p-5}{2p-4}\dots\frac{1}{2}a_0,$$
$$a_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}a_0,$$
$$a_{2p+1} = 2\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

La série vérifiant u(0) = 0 correspond à $a_0 = 0$, il s'agit donc de :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

série dont il faut déterminer les conditions de convergence. On écrit :

$$\frac{a_{2p+1}}{a_{2p+3}} = \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+1)!}\frac{(2p+3)!}{2^{2p+3}((p+1)!)^2} = \frac{(2p+3)(2p+2)}{2^2(p+1)^2}$$
$$= \frac{2p+3}{2p+2}$$

Le rayon de convergence est donc égal à 1.

La fonction f(x) est donc la primitive de la série précédente qui s'annule en x = 0 :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+2)!}x^{2p+2}.$$

Le rayon de convergence est également 1.

2) g(x) = $\cos^3$(x).

On commence par linéariser cette expression :

$$g(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x).$$

On peut alors combiner les développements connus des fonctions cos(x) et cos(3x) :

$$\cos(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

$$\cos(3x) = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p 3^{2p} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

$$g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}\left(\frac{3^{2p}+3}{4}\right).$$

Le rayon de convergence est $+\infty$.

3) $h(x) = e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}.$

On obtient par dérivation :

$$h'(x) = -xe^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2} + e^{-x^2/2}e^{x^2/2} = 1 - xh(x).$$

La fonction h est donc l'unique solution de l'équation différentielle :

$$y' + xy = 1$$

vérifiant y(0) = 0.

Cherchons les solutions développables en série entière, s'il en existe.

Posons :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Cette fonction est solution de l'équation différentielle si ses coefficients vérifient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1$$

soit :

$$a_1 = 1$$
$$2a_2 + a_0 = 0$$
$$(p+1)a_{p+1} + a_{p-1} = 0$$

d'où :

$$a_n = \frac{-1}{n} a_{n-2} = \frac{-1}{n} . \frac{-1}{n-2} a_{n-4} \ldots$$
$$a_{2p} = (-1)^p \frac{1}{2p(2p-2)\ldots 2} a_0$$
$$a_{2p+1} = (-1)^p \frac{1}{(2p+1)(2p-1)\ldots 3}.$$

et pour avoir y(0) = 0, il faut choisir $a_0 = 0$.

La somme de la série suivante (lorsqu'elle converge) est donc une solution de l'équation différentielle nulle pour x = 0 :

$$y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{1}{(2p+1)(2p-1)\ldots 3} x^{2p+1}.$$

Les coefficients s'écrivent :

$$(-1)^p \frac{2^p p!}{(2p+1)!},$$

donc le rayon de convergence est infini. On conclut donc, pour tout x :

$$e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{2^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

4) $j(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$.

On connait le développement de sin(x) :

$$\sin(x)=\sum_{0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

d'où :

$$j(x)=\sum_{0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p+1)!}.$$

Le rayon de convergence est infini.

(QC-1) En déduire une expression sous forme de série de

$$\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}\,dt.$$

Donner une approximation à 0,001 près de $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

5) $k_\alpha(x)=(1-x)^\alpha$.

La dérivée est $k_\alpha'(x)=-\alpha(1-x)^{\alpha-1}$, donc :

$$\alpha.k_\alpha(x)+(1-x)k_\alpha'(x)=0.$$

Les solutions séries de l'équation :

$$\alpha y+(1-x)y'=0$$

vérifient :

$$\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^n=0.$$

Les coefficients doivent donc vérifier les relations :

$$\alpha a_0 + a_1 = 0$$
$$\alpha a_1 + 2a_2 - a_1 = 0$$
$$...$$
$$\alpha a_p + (p+1)a_{p+1} - pa_p = 0.$$

On déduit de ces relations :

$$-\alpha a_0 = a_1$$
$$-\frac{(\alpha-1)}{2}a_1 = a_2$$
$$...$$
$$-\frac{(\alpha-p)}{p+1}a_p = a_{p+1}.$$

Si α est entier, la fonction à développer est un polynome, il suffit d'appliquer la formule du binôme.

Dans le cas général, on obtient :

$$a_p = (-1)^p \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-p+1)}{p!}a_0.$$

La fonction à développer prend la valeur 1 pour x = 0, donc correspond à $a_0 = 1$:

$$(1-x)^\alpha = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-p+1)}{p!}x^p.$$

Supposons α non entier, le rapport :

$$\frac{a_{p+1}}{a_p} = -\frac{(\alpha-p)}{p+1}$$

tend vers 1. La série entière obtenue a pour rayon de convergence 1.

Pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, on obtient l'égalité, sur]–1 , 1[:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-p+1\right)}{p!} x^{2p}.$$

Or on a :

$$\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-p+1\right)}{p!} = \frac{-1(-1-2)(-1-4)\ldots(-1-2p+2)}{2^p\, p!}$$

$$= (-1)^p \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2^p\, p!}$$

$$= (-1)^p \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}.$$

On obtient enfin :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p}.$$

Par intégration, on écrit le développement en série de Arcsin(x), de rayon de convergence 1 :

$$Arc\sin(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2(2p+1)} x^{2p+1}.$$

Etudions enfin la convergence aux extrémités de]–1 , 1[.
On a l'équivalent suivant pour le terme général :

$$\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2(2p+1)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2p+1)\sqrt{p}},$$

ce qui montre que la série converge aux extrémités de l'intervalle.

(QC-2) En déduire une expression de $\dfrac{\pi}{2}$ *sous forme de série.*

exercice 12-C

1) On trouve facilement :

$$g_1(x) = x \text{ sur }]-\pi , 0]$$

$$g_2(x) = -x \text{ sur }]-\pi , 0].$$

On note que g_1 n'est pas continue, alors que g_2 l'est.

2) Ces deux fonctions sont de classe C^1 par morceaux.

Le développement de g_1 a été calculé dans l'exemple 92 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx) + \frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{-2(-1)^n}{n}.$$

Pour g_2, le calcul donne (les coefficients b_n sont nuls) :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

Pour la première série, on obtient, sur $]-\pi , \pi[$:

$$|x| = 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin(nx).$$

Cette égalité n'est pas vraie pour π, ou $-\pi$, où la somme de la série est 0.

Pour la seconde série, comme g_2 est continue, on a sur $[-\pi , \pi]$:

$$x = \pi + \sum_{n\geq 1}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nx).$$

3) Pour f, on dispose ainsi de deux développements en série de Fourier sur l'intervalle [0 , π[.

Il est clair que le second développement donne une meilleure approximation puisque le terme général est en $\frac{1}{n^2}$ alors que le premier est en $\frac{1}{n}$.

---

exercice 13-C

On note $\sum a_n x^n$ une solution série entière, s'il en existe une, et on cherche les relations que doivent vérifier les coefficients a_n.

1) La relation à vérifier s'écrit :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

Pour les coefficients :

$$\begin{aligned}
&a_1 = 0 \\
&2a_2 + 2a_2 + a_0 = 0 \\
&3.2.a_3 + 3.a_3 + a_1 = 0 \\
&\ldots \\
&(n+1)na_{n+1} + (n+1)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \\
&a_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)^2}\,a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Les coefficients d'indice impair sont donc nuls, et les autres s'écrivent :

$$a_{2p} = (-1)^p \frac{1}{2^{2p}(p!)^2}\,a_0.$$

Les solutions développables en série entière sont donc :

$$a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{2^{2p}(p!)^2}.$$

Pour le rayon de convergence, on écrit :

$$\frac{2^{2p}(p!)^2}{2^{2p+2}((p+1)!)^2} = \frac{1}{4(p+1)^2}$$

ce qui montre que le rayon de convergence est infini.
2) Ici la relation est :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 4n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Pour les coefficients :

$$\begin{aligned}
&2a_1 - a_0 = 0 \\
&8a_2 + 4a_2 - a_1 = 0 \\
&\dots \\
&4n(n-1)a_n + 2na_n - a_{n-1} = 0 \\
&a_n = \frac{1}{2n(2n-1)} a_{n-1}.
\end{aligned}$$

Une série solution de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n .$$

Le rayon de convergence est infini.

(QC-1) Ecrire la somme de cette série à l'aide des fonctions usuelles.

---

exercice 14-C

La fonction f peut être prolongée en 0, par f(0) = 1, en effet, on a un développement limité en 0 (pour x ≠ 0) :

$$Log(1+x) = x + x\varepsilon(x)$$
$$f(x) = 1 + \varepsilon(x).$$

La fonction ainsi prolongée est continue.

Sa dérivée, pour x ≠ 0 est :

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - Log(1+x)}{x^2} = \frac{x - (1+x)Log(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

Le numérateur admet un développement limité en 0 :

$$x - (1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right) = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).$$

donc f'(x) a bien une limite finie quand x tend vers 0.

Plus généralement, on peut voir que la fonction f, prolongée en 0, est la somme d'une série entière :

$$Log(1+x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$
$$f(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{n}.$$

La fonction prolongée est donc indéfiniment dérivable en 0. En dehors de 0, cette propriété est encore vraie, puisque f est alors produit de deux fonctions indéfiniment dérivables.

2) Le rayon de convergence de la série écrite ci-dessus est 1.

On peut intégrer terme à terme cette série sur tout segment contenu dans l'intervalle]–1 , 1[, donc pour x ∈ [0 , 1[:

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\int_0^x t^{n-1}dt = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}.$$

L'intégrale dépendant de la borne supérieure est continue, donc, pour x tendant vers 1 :

$$\lim\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Il reste à déterminer la limite en 1 de :

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}.$$

Or la série converge normalement sur [0 , 1], car on a la majoration :

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

La somme de la série est donc une fonction continue sur [0 , 1], la limite en 1 est donc égale à la valeur en 1, d'où :

$$\int_0^1 \frac{Log(1+t)}{t}dt = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}.$$

3) La fonction considérée est continue et de classe C^1 par morceaux.

Elle est donc développable en série de Fourier.

Comme elle est paire, les coefficients b_n sont nuls.

Sur [– π , π], on a donc :

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

En particulier, pour x = 0 :

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

d'où :

$$\int_0^1 \frac{Log(1+t)}{t}dt = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

3-3 Corrigés des questions complémentaires

exercice 1-QC

1) Par contraposition, si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge également.

2) Posons :

$$v_n(\gamma) = \frac{1}{n(Log(n))^{\gamma}}.$$

$$\frac{v_{n+1}(\gamma)}{v_n(\gamma)} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-\beta-\gamma}{n\log(n)} + \frac{\varepsilon(n)}{n\log(n)}.$$

On sait (exercice 3) que si $\gamma > 1$, la série $\sum v_n(\gamma)$ converge, et que, inversement, si $\gamma \leq 1$, elle diverge. On distingue donc trois cas pour β :

cas 1 : si $\beta < -1$, il existe $\gamma > 1$ tel que $\beta < -\gamma < -1$, donc :

$$\frac{v_{n+1}(\gamma)}{v_n(\gamma)} - \frac{u_{n+1}}{u_n} > 0$$

et donc $\sum u_n$ converge également.

cas 2 : si $\beta > -1$, un raisonnement analogue montre que $\sum u_n$ diverge.

cas 3 : si $\beta = -1$, on ne peut conclure.

3) Ecrivons :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+v_n}$$

et supposons que nv_n ait une limite finie, soit L.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un rang N à partir duquel :

$$L - \varepsilon < nv_n < L + \varepsilon.$$

Il en résulte que si L < 1, pour n assez grand on a $nv_n < 1$ donc la série diverge, et si L > 1, pour n assez grand on a $nv_n > 1$ donc la série converge.
Il reste donc le cas où L = 1, pour lequel on ne peut pas conclure, puisque cette hypothèse est vérifiée pour :

$$u_n = \frac{1}{n},\ v_n = \frac{1}{n}$$

qui correspond à une série divergente, et pour :

$$u_n = \frac{1}{n(Log(n))^2},\ v_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{Log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{Log(n)}\right)^2 - 1,$$

qui correspond à une série convergente.

---

exercice 3-QC

1) Le calcul d'intégrale est :

$$\int_2^X \frac{dx}{xLog(x)Log(Log(x))^\gamma} = \left[\frac{Log(Log(x))^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right]_2^X$$

pour $\gamma \neq 1$.
Cette intégrale converge si et seulement si $\gamma > 1$.
Si $\gamma = 1$, l'intégrale diverge :

$$\int_2^X \frac{dx}{xLog(x)Log(Log(x))} = [Log(Log(Log(x)))]_2^X.$$

---

exercice 6-QC

On écrit :

$$C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}}{2\pi\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Si on note a_n l'équivalent, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4\sqrt{\frac{n}{n+1}} \to 4.$$

Le rayon de convergence de la série est donc égal à $\frac{1}{4}$.

---

exercice 7-QC

On applique le résultat précédent. L'expression :

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}} - 2\sqrt{n}$$

a une limite finie, donc :

$$\frac{\sum_{1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}}{2\sqrt{n}} \to 1.$$

On conclut :

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}} \sim 2\sqrt{n}.$$

---

exercice 8-QC

1) Si la série convergeait normalement sur [0 , +∞[, il existerait une série numérique convergente , soit $\sum a_n$, telle que pour tout x ≥ 0 :

$$\frac{xe^{-nx}}{Log(n)} \leq a_n.$$

Or l'expression xe^{-nx} a pour maximum :

$$\frac{e^{-1}}{n}$$

donc on devrait avoir :

$$\frac{e^{-1}}{nLog(n)} \leq a_n.$$

Cela impliquerait que la série $\sum \frac{e^{-1}}{nLog(n)}$ converge, ce qui est faux.

La série étudiée ne converge pas normalement sur [0 , +∞[.

---

exercice 11-QC

1) La série converge uniformément sur [0 , x], donc :

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt = \sum_0^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)(2p+1)!}.$$

Pour x = π, sachant que le reste de cette série alternée est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé, il faut déterminer pour quel rang ce terme est inférieur à 0,001.

On obtient :

$$\frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)(2p+1)!} \leq 0{,}001.$$

Un calcul numérique donne p = 5. La valeur approchée de l'intégrale, calculée avec les 5 premiers termes de la série, est donc 1,852.

2) La somme de la série (qui est normalement convergente), et la fonction Arcsin, sont continues en 1, donc on peut prolonger l'égalité obtenue sur l'intervalle fermé [–1 , 1], d'où pour x = 1 :

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2(2p+1)}.$$

exercice 13-QC

Posons :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n .$$

Remplaçons x par x^2 :

$$u(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = ch(x).$$

Donc, si $x \geq 0$, on a l'égalité :

$$u(x) = ch\left(\sqrt{x}\right)$$

De même, en remplaçant x par $-x^2$:

$$u(-x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos\left(x^2\right).$$

Donc, si $x \leq 0$, on a l'égalité :

$$u(x) = \cos\left(\sqrt{-x}\right).$$

4 Pour Chercher

4-1 Indications pour les exercices (☺)

exercice 1-I

1) Procéder par récurrence.

2) Si $\alpha > 0$, se rappeler que pour qu'une série converge, il est nécessaire que le terme général tende vers 0.

Si $\alpha \leq 0$, comparer à n^{β}, $\beta < 0$. Pour $\alpha = -1$, chercher des exemples de séries convergentes et de séries divergentes vérifiant cette hypothèse (M).

3) Ecrire $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, pour $v_n = \frac{1}{n+t}$.

4) Poser k = 1 + h, exprimer :

$$nu_n - (n+1)u_{n+1}.$$

5) Cas 1 : le terme général tend-il vers 0 ?

Cas 2 : le terme général décroit en valeur absolue, et tend vers 0.

exercice 2-I

1) Par un DL (M), majorer u_n, et montrer que :

$$n^2u_n \text{ --. } 0.$$

exercice 3-I

1) Distinguer L = 0 et $L \neq 0$.

2) Comparer avec l'intégrale. Procéder comme en 1).

exercice 4-I

1) Discuter selon le signe de chaque paramètre non nul. Comparer à une série de Riemann.

2) S'assurer que le terme général tend vers 0. Comparer à une série de Riemann.

3) Examiner si les séries sont alternées, à partir du DL.

---

exercice 5-I

1) $n + (-1)^n \sim n$.

2) Remarque analogue : un des termes est négligeable devant l'autre (numérateur et dénominateur).

---

exercice 6-I

1) Chercher un DL de $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$. (M).

2) Calculer les intégrales. Observer que sur [k – 1 , k] on a :

$$0 \leq (k - t)(t - k + 1) \leq 1/4.$$

3) Ecrire d'abord le DL de Log(f(n)).

4) Intégrer I_{n+2} par parties. Comparer les $\sin^n(x)$ pour comparer les intégrales. Utiliser la formule de Stirling pour exprimer la limite de $\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ en fonction de K.

---

exercice 7-I

1) Encadrer l'intégrale.

---

exercice 8-I

1) Vérifier que le terme général tend vers 0. Poser :

$$u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{Log(n)},$$

et étudier $n^2u_n(x)$.

2) Vérifier que le terme général tend vers 0.

3) Séparer les cas x = 0 et x ≠ 0.

4) Majorer.

---

exercice 9-I

1) Pour la fonction zéta : calculer la dérivée p-ème du terme général et étudier sa convergence normale.

Pour la fonction zéta alternée : vérifier que le terme général tend vers 0.

La série est-elle alternée ? Pour la convergence uniforme, majorer le reste.

3) Encadrer l'intégrale :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$$

puis sommer.

4) Utiliser 2) et un DL au voisinage de 1.

---

exercice 10-I

1) Considérer la série comme somme de deux séries entières.

2) Décomposer le coefficient en éléments simples. Se ramener, par intégration ou dérivation, à des séries connues.

3) Calculer $\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Pour la somme, dériver et utiliser le calcul précédent pour établir une équation différentielle.

4) Utiliser la méthode de l'exercice 5.

Penser à la majoration du reste d'une série alternée.

---

exercice 11-I

1) Dériver deux fois pour obtenir une équation linéaire. penser aux conditions initiales.

2) Linéariser.

3) Dériver

4) Utiliser le développement de sin(x).

5) Pour Arcsin(x), dériver pour retrouver le cas étudié. Pour la limite en ±1, utiliser la formule de Stirling (exercice 6).

exercice 12-I

3) Comparer les ordres de grandeur des termes généraux.

exercice 13-I

1) et 2) Distinguer les coefficients de rang pair de ceux de rang impair.

exercice 14-I

1) Problème seulement en 0. Prolonger par continuité à partir d'un DL. Pour la dérivabilité, voir que f est la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.

2) Intégrer terme à terme sur [0 , x], en justifiant. Préciser la convergence sur [0 , 1].

3) Noter que f est continue et C^1 par morceaux.

4-2 Méthodes (🕯)

Mode d'emploi de cette partie : vous trouverez d'abord une liste de méthodes de résolution des types de questions présentées dans ce volume. S'agissant d'un discours sur les mathématiques, et non d'un discours mathématique, on trouvera naturel qu'il utilise les abus de langage usuels, les raccourcis allusifs, et de façon générale qu'il se rapproche d'un discours oral qui pourrait être tenu devant les étudiants.

1- **Pour établir une propriété d'une suite.** Il est souvent utile de faire un raisonnement par récurrence : la propriété est vraie pour $n = 0$ (ou 1 …), et on verifie que si elle vraie pour un entier elle est vraie pour le suivant.

2- **Pour étudier le signe d'une expression**. S'il s'agit d'un problème local (signe au voisinage d'une valeur de la variable), penser que le signe du premier terme non nul d'un développement limité (ou asymptotique) donne le signe de l'expression. Plus généralement on peut chercher un équivalent (🕯).

3- **Pour étudier la convergence d'une série.** Ne pas oublier que le terme général doit tendre vers 0 (mais que cela ne suffit pas !).

4- **Pour écrire la contraposée d'une implication.** La contraposée de l'implication "si P alors Q" est "si non Q alors non P". Ces deux propriétés sont équivalentes.

5- **Pour utiliser l'existence d'une limite.** Pour une suite par exemple, si (u_n) tend vers L, alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour n assez grand, on pourra écrire $L - \varepsilon < u_n < L + \varepsilon$. Par exemple, si $L > 0$, pour n assez grand, on a $L/2 < u_n < 3L/2$ (donc $u_n > 0$ …).

6- **Pour trouver un équivalent.** Revoir les méthodes concernant les études de limites. En particulier : équivalent d'un produit, d'un quotient (pas de difficulté), équivalent d'une somme (attention !), utilisation d'un DL (le premier terme non nul donne un équivalent). Si, au voisinage de l'infini, a_n est négligeable devant b_n, alors $a_n + b_n \sim b_n$. Penser également aux équivalents "classiques", comme $\sin(x) \sim x$ en 0 …

7- **Pour comparer deux expressions.** Voir ci-dessus (équivalents) mais aussi revoir les résultats de comparaison des puissances, des exponentielles, et des logarithmes.

8- **Pour étudier la continuité, la dérivabilité de la somme d'une série de fonctions.** Ces propriétés sont locales. On peut, pour les étudier, se restreindre à un intervalle borné, et fermé.

9- **Utiliser la contraposée.** Pour beaucoup de résultats classique, la contraposée ( ) donne également un résultat intéressant. Par exemple, si la limite d'une suite de fonctions continues n'est pas continue en un point, alors cette suite ne converge uniformément, ni normalement, sur aucun intervalle contenant ce point …

10- **Pour encadrer une somme partielle, ou un reste de série.** Si le terme général est défini par une fonction décroissante, penser à la comparaison série-intégrale.

11- **Pour calculer la somme d'une série entière (1).** Calculer signifie ici exprimer à l'aide des fonctions usuelles. Une méthode consiste à essayer de se ramener aux développements en série connus (exponentielle, sinus, cosinus, logarithme, série géométrique …).

12 **Pour calculer la somme d'une série entière (2).** Montrer que la somme vérifie une équation différentielle (simple !), résoudre cette équation, en tenant compte des conditions initiales (valeur de la somme en un point …).

4-3 Lexique (👓)

Convergente : une série de terme général a_n est convergente si la suite des sommes partielles converge.

Divergente : une série divergente est une série qui n'est pas convergente.

Equivalents : deux fonctions f et g de la variable x sont équivalentes au voisinage de a (ou de l'infini) s'il existe une fonction ε, tendant vers 0 en a, telle que $f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$.

Normalement : une série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge normalement sur une partie I de R s'il existe une série numérique convergente $\sum u_n$ telle que pour tout x de I, on ait $|f_n(x)| \leq u_n$.

Ponctuellement : une suite de fonctions (f_n) converge ponctuellement en a si la suite numérique $(f_n(a))$ converge.

Simplement : pour la convergence d'une suite de fonctions, synonyme de ponctuellement (👓).

Somme : la somme de la série convergente (👓) $\sum a_n$ est la limite des sommes partielles (👓) de cette série.

Somme partielle : la somme partielle de rang p de la série $\sum a_n$ est la somme $\sum_{n=0}^{n=p} a_n$.

Terme (général) : le terme général de la série $\sum a_n$ est donné par la suite (a_n) associée à la série. On désigne ainsi l'expression a_n.

Uniformément : une série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge normalement sur une partie I de R s'il existe une série numérique convergente $\sum u_n$ telle que pour tout x de I, on ait $|f_n(x)| \leq u_n$.