7. Suites de nombres réels

7.1. Définitions générales

On appelle **suite de nombres réels** une application $n \longmapsto u(n)$ de l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels dans $\mathbf{R}$. Le nombre $u(n)$ est noté u_n et appelé **terme de rang** n **de la suite**. La suite est notée $(u_n)_{n \geqslant 0}$ ou simplement (u_n).

Remarque. – L'application $n \longmapsto u(n)$ peut n'être définie que sur une partie infinie I de $\mathbf{N}$ par exemple $\{n \in \mathbf{N} \mid n \geqslant n_0\}$ ou $\{n \in \mathbf{N} \mid n \text{ impair}\}$. On énoncera les résultats en supposant $I = \mathbf{N}$, l'adaptation aux autres cas se faisant sans difficulté.

Pour définir une suite, on utilise principalement :

a) Une définition explicite : on donne l'expression de u_n en fonction de n. Par exemple :

$$u_n = 2 + \frac{1}{n+1}$$

b) Une définition par récurrence : u_n se calcule à partir du terme précédent (ou des k termes précédents), le premier terme (ou les k premiers) de la suite étant donné. Par exemple :

$$u_n = u_{n-1} + \sqrt{u_{n-1}} \qquad \text{avec} \qquad u_0 = 1$$

$$u_n = u_{n-1} + 3\,u_{n-2} \qquad \text{avec} \qquad u_0 = 2, u_1 = -1$$

On peut aussi définir une suite de manière différente. Par exemple en définissant u_n comme la $n^{ème}$ racine positive de l'équation $tg\, x = x$.

On dit que la suite (u_n) est une **suite stationnaire** s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que :

$$u_n = u_k \qquad \forall n \geqslant k$$

En particulier, une **suite constante** $(u_n = u_0 \quad \forall n)$ est une suite stationnaire.

On dit que la suite (u_n) est une **suite croissante** (resp. **strictement croissante**) si :

$$n > p \Rightarrow u_n \geqslant u_p \qquad (\text{resp.} \quad u_n > u_p)$$

On dit que la suite (u_n) est une **suite décroissante** (resp. **strictement décroissante**) si :

$$n > p \Rightarrow u_n \leqslant u_p \qquad (\text{resp.} \quad u_n < u_p)$$

Les suites croissantes et les suites décroissantes sont appelées **suites monotones.**

On dit que la **suite** (u_n) est **majorée** (resp. **minorée**) s'il existe une constante M (resp. m) telle que :

$$u_n \leqslant M \qquad \forall n \in \mathbf{N} \qquad (\text{resp.} \quad m \leqslant u_n)$$

On appelle **suite bornée** une suite à la fois majorée et minorée. Pour une telle suite, il existe une constante A telle que :

$$|u_n| \leqslant A \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

On appelle **suite extraite** d'une suite (u_n) toute suite (v_n) définie par $v_n = u_{f(n)}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ où f est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même.

7.2. Limite d'une suite

7.2.1. Définition

La limite d'une suite est le cas particulier de la limite d'une fonction quand x tend vers x_0 dans X obtenu pour $x_0 = +\infty$ et $X = \mathbf{N}$. Donc d'après § 1.3.3. :

La **suite** (u_n) est **convergente** et admet pour **limite** le nombre réel ℓ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N_ϵ tel que :

$$n > N_\epsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$$

On écrit alors : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell$ et on dit aussi que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Une **suite** non convergente est dite **divergente.** Un cas important de suites divergentes est celui des **suites ayant une limite infinie** : la suite (u_n) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout $A > 0$, il existe un entier N_A tel que :

$$n > N_A \Rightarrow u_n > A \qquad (\text{resp.} \quad u_n < -A)$$

On écrit alors : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$)

Exemples. –

– Une suite constante est convergente et admet pour limite u_0.

– La suite (u_n) définie par $u_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$ est convergente et a pour limite 2 car :

$$|u_n - 2| = \frac{1}{n+1} < \epsilon \quad \text{dès que} \quad n > \frac{1}{\epsilon} - 1$$

– La suite (v_n) définie par $v_n = (-1)^n$ est divergente.
– La suite (w_n) définie par $w_n = n$ tend vers $+\infty$.

Propriété 1. – **On ne change pas la nature d'une suite (convergence ou divergence) en modifiant ou en supprimant un nombre fini de termes de la suite.**

En effet, dans les définitions précédentes n'interviennent que les termes de rang supérieur à N_ϵ ou N_A.

Propriété 2. – **Pour que la suite (u_n) converge vers ℓ, il suffit que $|u_n - \ell| \leqslant v_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$ et que la suite (v_n) converge vers 0**

car $\quad n > N_\epsilon \Rightarrow v_n < \epsilon \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$

Propriété 3. – **Pour que la suite (u_n) tende vers $+\infty$, il suffit que $u_n \geqslant v_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$ et que la suite (v_n) tende vers $+\infty$**

car : $\quad n > N_A \Rightarrow v_n > A \Rightarrow u_n > A$

7.2.2. Propriétés des suites convergentes

Propriété 1. – **Si la suite (u_n) est convergente, la limite ℓ est unique**

d'après l'unicité de la limite d'une fonction (§ 1.3.4)

Propriété 2. – **Si la suite (u_n) est convergente de limite ℓ, on a pour tout k entier fixé :**

$$\lim_{n\to\infty} u_{n-k} = \ell$$

car l'inégalité $|u_n - \ell| < \epsilon$ pour $n > N$ entraîne :

$$|u_{n-k} - \ell| < \epsilon \quad \text{pour} \quad n > N+k$$

Propriété 3. – **Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et a même limite.**

Soit (u_n) une suite convergente de limite ℓ. On a :

$$|u_n - \ell| < \epsilon \quad \text{dès que} \quad n > N$$

Si (v_n) est une suite extraite définie par $v_n = u_{f(n)}$, on a : $f(n) \geqslant n$ car f est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même. Par suite :

$$|v_n - \ell| = |u_{f(n)} - \ell| < \epsilon \text{ dès que } n > N$$

La suite (v_n) est donc convergente et a pour limite ℓ.

Propriété 4. – **Si f est une fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, la suite (u_n) définie par $u_n = f(n) \quad \forall n \in \mathbf{N}$ est convergente et a pour limite ℓ.**

Ceci résulte de la définition de la limite d'une fonction quand x tend vers $+\infty$.

Remarque. – Les propriétés 1 à 4 restent valables pour une suite ayant une limite infinie.

Propriété 5. – **Toute suite convergente est bornée.**

On a en effet : $\ell - \epsilon < u_n < \ell + \epsilon$ dès que $n > N$

D'où : $\quad |u_n| \leqslant M \qquad \forall n \in \mathbf{N}$

en notant M le plus grand des nombres $|u_1|$, $|u_2|, \dots, |u_N|$, $|\ell - \epsilon|$ et $|\ell + \epsilon|$.

Exercices - Exemples

$\boxed{E_1}$ On considère les suites définies pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \frac{Log(1+e^n)}{2n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n} \cos\frac{n\pi}{4}$$

Montrer que la suite (u_n) et la suite (v_n) ont pour limites respectives 1/2 et 0.

On a :

$$|u_n - \frac{1}{2}| = \left| \frac{Log\, e^n + Log(e^{-n}+1)}{2n} - \frac{1}{2} \right|$$
$$= \frac{Log(e^{-n}+1)}{2n} < \frac{Log\, 2}{2n}$$

Quand n tend vers l'infini, $\frac{Log\, 2}{2n}$ tend vers 0 et donc (propriété 2, § 7.1.1) : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$

La suite (v_n) converge vers 0 car :

$$|v_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \cos\frac{n\pi}{4} \right| \leqslant \frac{1}{n}$$

$\boxed{E_2}$ Montrer que la suite définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = (-1)^n$ est divergente.

Si la suite (u_n) avait une limite ℓ, la suite extraite (u_{2n}) convergerait vers ℓ, ce qui donne $\ell = 1$. De même, la suite extraite (u_{2n+1}) convergerait vers ℓ, ce qui donne $\ell = -1$. C'est impossible d'après l'unicité de la limite et donc la suite (u_n) est divergente.

$\boxed{E_3}$ On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 2$ par : $u_n = u_{n-1} + 3\, u_{n-2}$ avec

u_0 et u_1 nombres réels donnés tels que $u_0 > 0$ et $4u_1 + 3u_0 > 0$.

1) Montrer que $u_n > 0 \quad \forall n \geqslant 2$ et que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est croissante.

2) Montrer que $u_n \geqslant (3n - 11)\, u_3 \quad \forall n \geqslant 5$ et en déduire que : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$

1) On a : $\quad u_2 = \frac{1}{4}(4u_1 + 3u_0) + \frac{9}{4}u_0 > 0$

$$u_3 = 4u_1 + 3u_0 > 0$$

On en déduit par récurrence sur n : $u_n > 0 \quad \forall n \geqslant 2$

La suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ *est croissante car :*

$$u_n - u_{n-1} = 3u_{n-2} \geqslant 0 \qquad \forall n \geqslant 4$$

2) On a successivement (en supposant $n \geqslant 5$*) :*

$$\begin{aligned} u_4 - u_3 &= 3u_2 > 0 \\ u_5 - u_4 &= 3u_3 \geqslant 3u_3 \\ u_6 - u_5 &= 3u_4 \geqslant 3u_3 \\ &\dots\dots\dots \\ u_n - u_{n-1} &= 3u_{n-2} \geqslant 3u_3 \end{aligned}$$

D'où, en ajoutant membre à membre ces inégalités :

$$u_n - u_3 \geqslant 3(n-4)\, u_3$$

ou : $\quad u_n \geqslant (3n-11)\, u_3 \qquad \forall n \geqslant 5$

Comme $u_3 > 0$*, on a :* $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x-11)\, u_3 = +\infty$

et donc : $\quad \lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$

TESTS

T1 Montrer que la suite définie par :

$$u_n = \frac{2\, Log\,(n+1)}{Log\; n}$$

a pour limite 2.

T2 Etudier la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \sin \frac{(n+1)\pi}{2n}$$

T3 Montrer que la suite définie par $v_n = \sqrt[n]{n}$ est convergente.

T4 Montrer que la suite définie par : $w_n = n^2 - n \sin n\theta$ est divergente.

T5 Etudier la suite (u_n) définie par :

$$u_{2k} = \frac{2k+2}{2k+1} \quad , \quad u_{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+2}$$

Réponses

T1 *On a :*

$$|u_n - 2| = \left| \frac{2\, Log\, n + 2\, Log\,(1+1/n)}{Log\, n} - 2 \right| = \frac{2\, Log\,(1+1/n)}{Log\, n} \leqslant \frac{2\, Log\, 2}{Log\, n}$$

D'où : $\quad \lim\limits_{n \to \infty} u_n = 2$

T2 $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1 \quad$ *car* $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$

T3 *On a :* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{1/x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{Log\, x/x} = 1$

D'où : $\quad \lim\limits_{n \to \infty} v_n = 1$

T4 $w_n \geqslant (n - \frac{1}{2})^2$. *D'où :* $\lim\limits_{n \to \infty} w_n = +\infty$

T5 $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 1 \quad$ *car* $\quad \lim\limits_{k \to \infty} u_{2k} = 1 \quad$ *et* $\quad \lim\limits_{k \to \infty} u_{2k+1} = 1$

7.3. Opérations sur les limites

Les propriétés ci-dessous se déduisent de celles du § 1.4 en considérant $\lim\limits_{x \to x_0, x \in X} f(x)$ avec $x_0 = +\infty$ et $X = \mathbf{N}$.

7.3.1. Cas des suites convergentes

Propriété 1. — **Si les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers u et v, la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $u + v$ et la suite $(u_n v_n)$ converge vers $u\, v$.**

En particulier pour toute constante λ, la suite (λu_n) converge vers λu.

Propriété 2. — **Si la suite (u_n) converge vers u et si la suite (v_n) converge vers $v \neq 0$, la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ (si $v_n \neq 0$) et w_n arbitraire (si $v_n = 0$) converge vers $\frac{u}{v}$.**

Propriété 3. – **Si les suites (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers u et v et si $u_n \geqslant v_n$ pour tout n, on a $u \geqslant v$.**

En particulier, si $u_n \geqslant 0$ pour tout n, on a $u \geqslant 0$.

Remarque. – S'il y a inégalité stricte $u_n > v_n$, on peut seulement écrire $u \geqslant v$. Par exemple :

$$u_n = \frac{1}{n} > 0 \qquad \text{mais} \qquad \lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

Donc seules les inégalités au sens large se conservent par « passage à la limite ».

Propriété 4. – **Si (u_n) est une suite convergente de limite u et si f est une fonction, définie dans un intervalle contenant u et tous les u_n, telle que : $\lim_{x \to u} f(x) = \ell$, la suite $(f(u_n))$ est convergente de limite ℓ.**

En effet, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|x - u| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

D'après la convergence de la suite (u_n), il existe N tel que :

$$n > N \Rightarrow |u_n - u| < \eta \Rightarrow |f(u_n) - \ell| < \epsilon$$

ce qui montre la convergence de la suite $(f(u_n))$.

Corollaire. – **Soit f une application continue d'un intervalle I dans lui-même. Si la suite (u_n) définie par $u_n = f(u_{n-1})$ avec $u_0 \in I$ converge vers ℓ, on a $f(\ell) = \ell$**

car : $$\lim_{n \to \infty} u_{n-1} = \lim_{n \to \infty} u_n = \ell$$

7.3.2. Cas des limites infinies

La propriété 4 (§ 7.3.1) s'étend au cas où l'une au moins des deux limites u et ℓ est infinie.

Les propriétés 1 et 2 (§ 7.3.1) s'étendent dans certains cas aux limites infinies. On a ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n \to \infty} u_n = +\infty \\ \lim_{n \to \infty} v_n = \ell \text{ (fini ou } +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (u_n + v_n) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n \to \infty} u_n = +\infty \\ \lim_{n \to \infty} v_n = \ell > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} (u_n v_n) = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n \to \infty} u_n = +\infty \\ \lim_{n \to \infty} v_n = \ell > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n \to \infty} u_n = \ell \\ \lim_{n \to \infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Par contre, dans d'autres cas, on ne peut pas conclure sans une étude complémentaire. Comme au § 1.4.2, on dit qu'il y a **forme indéterminée.**

Exercices - Exemples

$\boxed{E_4}$ Etudier pour $a \in \mathbf{R}$ la suite de terme général $u_n = a^n$ (suite géométrique).

Pour $a = 0$, la suite est stationnaire ($a^n = 0$ $\forall n \geqslant 1$).

Pour $a > 0$, on a : $\qquad a^n = e^{n \,\mathrm{Log}\, a}$

Or : $$\lim_{x \to +\infty} x \,\mathrm{Log}\, a = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a > 1 \\ -\infty & \text{si} \quad 1 > a > 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\lim a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a > 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 > a > 0 \end{cases}$$

Pour $a = 1$, la suite est constante ($a^n = 1$ $\forall n \in \mathbf{N}$)

Pour $a < 0$, on a : $a^n = (-1)^n \, |a|^n$. En utilisant les résultats précédents, on obtient :

$$\lim_{n \to \infty} a^n = 0 \qquad \text{si} \quad -1 < a < 0$$

Pour $a = -1$, la suite diverge car $u_n = (-1)^n$ et pour $a < -1$, la suite diverge ($|u_n|$ tend vers $+\infty$ et u_n n'a pas un signe constant).
En conclusion :

La suite géométrique (a^n) converge vers 0 pour $|a| < 1$ et diverge pour $|a| > 1$.

$\boxed{E_5}$ Etudier la suite (u_n) définie par :

$$u_n = 1 + \sin u_{n-1} \quad \text{avec} \quad u_0 \in \mathbf{R}$$

On a : $u_0 \in \mathbf{R}$, $u_1 \in [0, 2]$, $u_n \in [1, 2]$ $\forall n \geqslant 2$

Pour étudier la suite (u_n), négligeons u_0 et u_1. On a alors une suite vérifiant $u_n = f(u_{n-1})$ où la fonction $f : x \longmapsto 1 + \sin x$ est une application continue de $[1, 2]$ dans $[1, 2]$. S'il y a une limite ℓ, on a donc :

$$\ell = 1 + \sin \ell$$

La fonction $g : x \longmapsto x - 1 - \sin x$ est croissante sur $[1, 2]$ car $g'(x) \geqslant 0$ et $g(1)\, g(2) = -\sin 1\,(1 - \sin 2) < 0$. Il existe donc $\ell \in [1, 2]$

unique vérifiant $\ell = 1 + \sin \ell$ *(une valeur approchée est 1,93 radian).*

Cherchons si la suite (u_n) *converge vers* ℓ. *En utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient :*

$$u_n - \ell = \sin u_{n-1} - \sin \ell = (u_{n-1} - \ell) \cos v_n$$

Comme $v_n \in [1, 2]$, *on a :*

$$|\cos v_n| \leqslant \max(\cos 1, |\cos 2|) = K$$

avec $0 < K < 1$ *(valeur approchée* $K \cong 0{,}54$*).*

On en déduit :

$$|u_n - \ell| \leqslant K |u_{n-1} - \ell| \leqslant K^2 |u_{n-2} - \ell| \leqslant \ldots \leqslant K^{n-2} |u_2 - \ell|$$

Quand n tend vers l'infini, K^{n-2} *tend vers 0 et donc la suite* (u_n) *converge vers* ℓ.

E$_6$ Etudier selon les valeurs du paramètre $s \in \mathbf{R}_+^*$ la suite de terme général :

$$u_n = \frac{(2n+1)\sqrt{3n^4 + 2n}}{2n^s + 3}$$

Quand n tend vers l'infini, on a une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. *Mettons en facteur* n^3 *au numérateur et* n^s *au dénominateur.*

$$u_n = n^{3-s} \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)\sqrt{3 + \frac{2}{n^3}}}{2 + \frac{3}{n^s}} = n^{3-s} v_n$$

En utilisant les propriétés sur la limite d'un produit et d'un quotient, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

On en déduit :

$$\lim u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad 0 < s < 3 \\ \sqrt{3} & \text{si} \quad s = 3 \\ 0 & \text{si} \quad s > 3 \end{cases}$$

TESTS

Etudier les suites définies par :

T$_6$ $u_n = \dfrac{n^2 - 5\sin n}{(2n+3)\sqrt{n^2 + 2n}}$

T$_7$ $u_n = (n+2)\left[\sqrt{n^4 + an^2 + bn + 1} - n^2\right]$ où a et b sont deux paramètres réels positifs.

T$_8$ $u_n = \dfrac{a^n - 2b^n}{a^n + b^n}$ où $a > 0$ et $b > 0$

T$_9$ $u_n = \sqrt{u_{n-1}^2 - 2u_{n-1} + 4}$ avec u_0 donné dans $[0, 2]$.

T$_{10}$ $u_n = e^{-u_{n-1}}$ avec u_0 donné.

Réponses

T$_6$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{2}$ *en mettant* n^2 *en facteur au numérateur et au dénominateur.*

T$_7$ $$u_n = \frac{(n+2)(an^2 + bn + 1)}{\sqrt{n^4 + an^2 + bn + 1} + n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a \neq 0 \\ b/2 & \text{si} \quad a = 0 \end{cases}$$

T$_8$ $$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a > b \\ -2 & \text{si} \quad a < b \end{cases}$$

Si $a = b$, *suite constante :* $u_n = -\frac{1}{2} \quad \forall n$

T$_9$ $u_n \in [\sqrt{3}, 2] \quad \forall n \geqslant 1$ *car :*

$$u_n^2 = (u_{n-1} - 1)^2 + 3$$

S'il y a une limite ℓ, *on a :* $\ell = \sqrt{\ell^2 - 2\ell + 4}$. *D'où* $\ell = 2$

$$|u_n - 2| = \left|\frac{u_{n-1}(u_{n-1} - 2)}{u_n + 2}\right|$$

$$\leqslant \frac{2}{2+\sqrt{3}} |u_{n-1} - 2| \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1} |u_1 - 2|$$

D'où : $$\lim_{n\to\infty} u_n = 2$$

T$_{10}$ $u_n \in [\frac{1}{e}, 1] \quad \forall n \geqslant 3$

S'il y a une limite ℓ, *on a :* $\ell = e^{-\ell}$. *Il existe* ℓ *unique* ($\ell \cong 0{,}567$) *car la fonction* $g : x \longmapsto x - e^{-x}$ *est croissante sur* $\mathbf{R}$ *et* $g(1)\, g(1/e) < 0$.

$$|u_n - \ell| = |e^{-u_{n-1}} - e^{-\ell}|$$

$$= |u_{n-1} - \ell|\, e^{-\theta_n} \quad \text{avec} \quad \theta_n \in [\tfrac{1}{e}, 1]$$

$$|u_n - \ell| \leqslant e^{-1/e} |u_{n-1} - \ell|$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \quad \text{car} \quad e^{-1/e} < 1$$