# 9. Développements limités

## 9.1. Comparaison locale des fonctions.

Dans ce paragraphe, on considère des fonctions définies dans un même voisinage $U$ de $x_0$ (fini ou infini). Lorsque $x_0$ est fini, tout ce qui suit s'applique également si $U$ est un voisinage à droite, un voisinage à gauche ou un voisinage privé de $x_0$, c'est-à-dire qu'on peut remplacer le voisinage $U$ par $U \cap [\, x_0, +\infty [$, $U \cap ]-\infty, x_0 [$ ou $U - \{x_0\}$

### 9.1.1. NOTATION $o$ DE LANDAU.

Si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage $V_\epsilon$ de $x_0$ tel que $|f(x)| \leqslant \epsilon \, |g(x)| \quad \forall x \in V_\epsilon$, on écrit $f = o(g)$ et on dit que $f$ **est négligeable devant** $g$ **au voisinage de** $x_0$.

Si $g(x)$ ne s'annule pas dans $U$, le rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $x_0$. Ainsi, $f = o(1)$ **signifie que** $f(x)$ **tend vers** 0 **quand** $x$ **tend vers** $x_0$.

Par abus de notation, commode lorsque les fonctions sont explicitées, on écrit aussi:

$$f(x) = o(g(x))$$

A partir de l'inégalité de définition, on obtient les propriétés suivantes :

– transitivité : $f = o(g) \;,\; g = o(h) \Rightarrow f = o(h)$

– somme : $f = o(h),\ g = o(h) \Rightarrow f + g = o(h)$

ce qu'on écrit $\quad o(h) + o(h) = o(h)$

– produit : $f = o(g),\ f_1 = o(g_1) \Rightarrow ff_1 = o(gg_1)$

$f = o(g) \;,\; f_1$ bornée $\Rightarrow ff_1 = o(g)$

Dans un voisinage de $x_0$ fini, on compare souvent la fonction $f$ à la fonction $x \longmapsto (x - x_0)^n$ avec $n \in \mathbf{N}$. Dans ce cas, les propriétés précédentes donnent (en prenant $x_0 = 0$ pour simplifier l'écriture):

$$\begin{aligned} o(x^n) + o(x^n) &= o(x^n) \\ o(x^n)\, o(x^p) &= o(x^{n+p}) \\ \lambda\, o(x^n) &= o(x^n) \qquad \lambda \in \mathbf{R}^* \end{aligned}$$

et on a en outre :

$$\begin{aligned} o(x^p) &= o(x^n) && \text{si } p \geqslant n \\ o(x^p) + o(x^n) &= o(x^n) && \text{si } p \geqslant n \\ o(\lambda x^n) &= o(x^n) && \lambda \in \mathbf{R}^* \\ x^n\, o(x^p) &= o(x^{n+p}) && \\ \frac{1}{x^n}\, o(x^p) &= o(x^{p-n}) && \text{si } p \geqslant n \end{aligned}$$

### 9.1.2. FONCTIONS EQUIVALENTES.

On dit que deux fonctions $f$ et $g$ définies dans un même voisinage $U$ de $x_0$ (fini ou infini) sont **équivalentes au voisinage de** $x_0$ s'il existe un voisinage $V$ de $x_0$ dans lequel

$$f(x) = g(x)\,[\,1 + \epsilon(x)\,] \quad \text{avec} \lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$$

On écrit alors : $\quad f \sim g$

ou, par abus de notation : $\quad f(x) \sim g(x)$

Notons que la relation de définition s'écrit aussi sous les deux formes suivantes

$$f(x) = \lambda(x)\, g(x) \qquad \text{avec} \lim_{x \to x_0} \lambda(x) = 1$$

$$f - g = o(g)$$

*Propriété 1.–* **La relation $f \sim g$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies dans un voisinage de $x_0$.**

car c'est une relation réflexive symétrique et transitive.

*Propriété 2.–* **Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de $x_0$, on a $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ et (si $f_2$ et $g_2$ ne s'annulent pas) :** $\dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$

On a en effet :

$$f_1(x) = \lambda_1(x)\, g_1(x)$$

$$f_2(x) = \lambda_2(x)\, g_2(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \lambda_2(x) = 1$

On en déduit :

$$f_1(x)\, f_2(x) = [\,\lambda_1(x)\,\lambda_2(x)\,]\, g_1(x)\, g_2(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda_1(x)\,\lambda_2(x) = 1$

Démonstration analogue pour le quotient.

*Remarque.–* Si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, on n'a pas en général $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$. Ainsi au voisinage de 0

$$1 + x \sim 1 \qquad -1 + x \sim -1$$

mais : $$(1+x) + (-1+x) \sim 2x$$

*Propriété 3.–* **Pour trouver la limite d'un produit ou d'un quotient, on peut remplacer chaque fonction par une fonction équivalente.**

En effet, si $f \sim g$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$, la relation $f(x) = \lambda(x)\, g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda(x) = 1$ entraine $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda f(x) = l$

### 9.1.3. EQUIVALENCES USUELLES.

Soit $f^{(p)}$, avec $p \geqslant 0$, la première dérivée de $f$ non nulle au point $x_0$. Si on peut appliquer à $f$ la formule de Taylor – Young d'ordre $p$ au point $x_0$, on a :

$$f(x) = \frac{(x - x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + o\,[\,(x - x_0)^p\,]$$

c'est-à-dire :

$$f(x) \sim \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0)$$

On obtient ainsi les résultats suivants :

| au voisinage de $x_0 = 0$ | |
|---|---|
| $\sin x \sim x$ , | $sh\, x \sim x$ |
| $tg\, x \sim x$ , | $th\, x \sim x$ |
| $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ , | $ch\, x - 1 \sim \dfrac{x^2}{2}$ |
| $\text{Arc}\sin x \sim x$ , | $\text{Arc}\, tg\, x \sim x$ |
| $e^x - 1 \sim x$ , | $\text{Log}\,(1 + x) \sim x$ |

*Propriété.–* **Un polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré au voisinage de l'infini et à son terme de plus bas degré au voisinage de 0.**

On le vérifie en mettant en facteur selon le cas le terme de plus haut degré ou le terme de plus bas degré.

### 9.1.4. INFINIMENT PETITS ET INFINIMENT GRANDS.

On introduit dans ce paragraphe une autre terminologie souvent employée en physique.

On dit que $f(x)$ est au voisinage de $x_0$ (fini ou infini) un **infiniment petit** si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ et un **infiniment grand** si $\lim\limits_{x \to x_0} |\, f(x)\,| = +\infty$

On utilise en général un infiniment petit (resp. infiniment grand) de référence $u$ appelé **infiniment petit principal** (resp. **infiniment grand principal**). Par exemple , on prend pour infiniment petit principal :

$u = x - x_0$ quand $x$ tend vers $x_0$ fini

$u = \dfrac{1}{x}$ quand $x$ tend vers l'infini

et dans les mêmes conditions, on prend pour infiniment grand principal $u = \dfrac{1}{x - x_0}$ ou $u = x$.

On dit que $f(x)$ est au voisinage de $x_0$ un **infiniment petit** (resp. **infiniment grand**) **d'ordre** $p > 0$ par rapport à l'infiniment petit principal (resp. infiniment grand principal) $u$ s'il existe un nombre $a \neq 0$ tel que $f(x) \sim a\, u^p$

$a\, u^p$ est appelé **partie principale de** $f(x)$.

Par exemple, au voisinage de 0 , $1 - \cos x$ est un infiniment petit d'ordre 2 par rapport à l'infiniment petit principal $x$ et sa partie principale est $\dfrac{1}{2} x^2$. De même, au voisinage de 0, $\dfrac{1}{\sin x}$ est un infiniment grand d'ordre 1 par rapport à l'infiniment grand principal $\dfrac{1}{x}$ et sa partie principale est $\dfrac{1}{x}$

*Remarque.–* Il n'est pas toujours possible de définir l'ordre d'un infiniment petit ou d'un infiniment grand. Ainsi $f(x) = x\,\text{Log}\, x$ est un infiniment petit dans un voisinage à droite de 0 mais son ordre par rapport à l'infiniment petit principal $x$ n'est pas défini car

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^p} = \begin{cases} -\infty \text{ si } p \geqslant 1 \\ 0 \text{ si } p < 1 \end{cases}$$

*Remarque 2.–* Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux infiniment petits d'ordres respectifs $p$ et $q$ par rapport à l'infiniment petit principal $u$ : si $p > q$, on a $f = o(g)$
De même, si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux infiniment grands d'ordres respectifs $p$ et $q$ par rapport à l'infiniment grand principal $u$ : si $p < q$, on a $f = o(g)$

*Propriété 1.–* **La partie principale d'un produit (ou quotient) d'infiniment petits (resp. infiniment grands) ayant chacun une partie principale est le produit (ou quotient) des parties principales.**

Ceci résulte de la propriété 2 du § 9-1-2. Par suite, pour trouver la limite d'un produit (ou quotient) d'infiniment petits ou infiniment grands, on peut remplacer chaque terme par sa partie principale.

*Propriété 2.–* **La partie principale d'une somme d'infiniment petits ayant chacun une partie principale est la somme des parties principales des infiniment petits d'ordre minimum si cette somme est non nulle.**

Soit $u$ l'infiniment petit principal. Supposons $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ d'ordre minimum $p$ et $f_{k+1}(x), \ldots f_n(x)$ d'ordre supérieur à $p$. On a :

$$f_i(x) = a_i u^p + o(u^p) \qquad i = 1, \ldots, k$$
$$f_i(x) = o(u^p) \qquad i = k+1, \ldots, n$$

On en déduit :

$$\sum_1^n f_i(x) = (a_1 + \ldots + a_k) u^p + o(u^p)$$

ce qui, si $a_1 + \cdots + a_k \neq 0$, donne la partie principale.

*Remarque.–* Si $a_1 + \ldots + a_k = 0$, on a $\sum_1^n f_i(x) = o(u^p)$. Pour trouver la partie principale, on pourra utiliser les développements limités (§ 9-3).

*Propriété 3.–* **La partie principale d'une somme d'infiniment grands ayant chacun une partie principale est la somme des parties principales des infiniment grands d'ordre maximum si cette somme est non nulle.**

La démonstration est analogue à celle de la propriété 2. Lorsque la somme des parties principales des infiniment grands d'ordre maximum est nulle, on obtient un infiniment grand d'ordre inférieur ou une quantité bornée quand $x$ tend vers $x_0$.

**Exercices – Exemples.**

$\boxed{E_1}$ Etudier la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad x \in \mathrm{R}$$

*On a une forme indéterminée $1^\infty$. Quand n tend vers l'infini, $\frac{x}{n}$ tend vers 0 et on a :*

$$\mathrm{Log}\, u_n = n \,\mathrm{Log}\left(1 + \frac{x}{n}\right) \sim n\left(\frac{x}{n}\right) = x$$

*Donc :*

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{Log}\, u_n = x$$

*et par suite :*

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x}$$

$\boxed{E_2}$ Montrer qu'au voisinage de 0, on a :

$$\mathrm{Arc\,tg}(1+x) - \frac{\pi}{4} \sim \frac{x}{2}$$

En déduire la limite quand $x$ tend vers 0 de la fonction :

$$g : x \longmapsto \frac{\left[\mathrm{Arc\,tg}(1+x) - \frac{\pi}{4}\right] \mathrm{Log}(1 + x^2)}{2x \sin^2 x}$$

*La fonction $f : x \longmapsto \mathrm{Arc\,tg}(1+x) - \frac{\pi}{4}$ est dérivable sur R et :*

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (1+x)^2}$$

*En appliquant la formule de Mac Laurin d'ordre 1, on obtient :*

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + o(x) = \frac{x}{2} + o(x)$$

*Donc au voisinage de 0 :* $f(x) \sim \frac{x}{2}$

*On en déduit :* $f(x) \operatorname{Log}(1 + x^2) \sim \frac{x}{2} x^2 = \frac{x^3}{2}$

*On a d'autre part :* $2x \sin^2 x \sim 2x\, x^2 = 2x^3$

*D'où :*

$$g(x) \sim \frac{x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}$$

*et :*

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \frac{1}{4}$$

$\boxed{E_3}$ Déterminer quand $x$ tend vers $+\infty$ la partie principale de :

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} - 2 \operatorname{Arc\,tg}\frac{2}{x} + \frac{ax+1}{2x^2+x+3}$$

l'infiniment petit principal étant $\frac{1}{x}$.

*On a au voisinage de* $+\infty$ *:*

$$\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \quad , \quad -2 \operatorname{Arc\,tg}\frac{2}{x} \sim \frac{-4}{x}$$

$$\frac{ax+1}{2x^2+x+3} \sim \begin{cases} \dfrac{a}{2x} & \text{si } a \neq 0 \\[2mm] \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

*La somme des parties principales des infiniment petits d'ordre minimum est :*

$$\frac{a-6}{2x} \quad \text{si } a \neq 0 \quad , \quad \frac{-3}{x} \quad \text{si } a = 0$$

*Donc si* $a \neq 6$ *, la partie principale de* $f(x)$ *est*

$$\frac{a-6}{2x}$$

*Si* $a = 6$ *, on peut seulement dire pour l'instant que* $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$

$\boxed{E_4}$ Déterminer quand $x$ tend vers $+\infty$ la partie principale de :

$$f(x) = x^2 e^{1/x} + \frac{ax^3-1}{2x+1} + \operatorname{Log} x$$

l'infiniment grand principal étant $x$.

*Posons* $f(x) = f_1(x) + \operatorname{Log} x$ *et cherchons la partie principale de* $f_1(x)$ *quand* $x$ *tend vers* $+\infty$

$$x^2 e^{1/x} \sim x^2 \quad , \quad \frac{ax^3-1}{2x+1} \sim \begin{cases} \dfrac{a}{2} x^2 & \text{si } a \neq 0 \\[2mm] \dfrac{-1}{2x} & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

*La somme des parties principales des infiniment grands d'ordre maximum est :*

$$\frac{a+2}{2} x^2 \quad \text{si } a \neq 0 \quad , \quad x^2 \quad \text{si } a = 0$$

*Donc pour* $a \neq -2$*, la partie principale de* $f_1(x)$ *est*

$$\frac{a+2}{2} \, x^2$$

*Pour* $a = -2$*, on obtient :*

$$f_1(x) = \frac{2x^3(e^{1/x} - 1) + x^2 e^{1/x} - 1}{2x+1}$$

*Or :* $e^{1/x} - 1 \sim \frac{1}{x}$ *ce qui donne :*

$$f_1(x) \sim \frac{2x^2 + x^2}{2x} = \frac{3x}{2}$$

*Pour trouver la partie principale de* $f(x)$*, on ne peut pas appliquer la propriété 3 du § 9.1.4 car* $\operatorname{Log} x$ *n'a pas de partie principale quand* $x$ *tend vers* $+\infty$.
*Mais on a :* $\operatorname{Log} x = o(x)$ *et donc quand* $x$ *tend vers* $+\infty$, $f(x)$ *a pour partie principale :*

$$\frac{a+2}{2} x^2 \quad \text{si } a \neq -2 \quad , \quad \frac{3x}{2} \quad \text{si } a = -2$$

**TESTS**

$\boxed{T_1}$ Montrer que pour tout $s > 0$, on a dans un voisinage à droite de 0 :

$$\operatorname{Log} x = o\left(\frac{1}{x^s}\right)$$

**T₂** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^3 \sin x}$

**T₃** Déterminer la limite quand $x$ tend vers 0 de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 + 1 - \cos x}{x(e^x - 1)}$

**T₄** Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - Log\, x}{(2x + \cos x)^3}$

**T₅** Déterminer $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} (\pi + 2x)\, tg\, x$

**T₆** Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{tg\, x}{tg\, 3x}$

**T₇** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - 1}{\sin(\cos x - 1)}$

**T₈** Montrer qu'au voisinage de 1 : $Log\, x \sim x - 1$

En déduire $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{\frac{1}{x-1}}$

**T₉** Déterminer quand $x$ tend vers $0^+$ la partie principale de :

$f(x) = \sqrt{x^5 \cos x} + Log(1 + x^2) + \lambda x\, Arc\, tg\, x$ ,

l'infiniment petit principal étant $x$.

**T₁₀** Déterminer un infiniment grand équivalent à $e^{1/x} + \dfrac{1}{\sin x}$ et en déduire la limite de la fonction $f : x \longrightarrow \dfrac{e^{1/x} + \dfrac{1}{\sin x}}{Log\, |x|}$

a) quand $x$ tend vers 0 par valeurs supérieures.

b) quand $x$ tend vers 0 par valeurs inférieures.

**T₁₁** Déterminer la partie principale de

$$f(x) = \frac{\lambda x + 1}{(x-1)^2 (x-2)^2} + cotg(x - 1)$$

quand $x$ tend vers $1$, l'infiniment grand principal étant $\dfrac{1}{x - 1}$

**Réponses**

**T₁** *Dans un voisinage à droite de* 0, *on a*

$$Log\, x = o\left(\frac{1}{x^s}\right) \text{ car } \lim_{x \to 0^+} \frac{Log\, x}{1 / x^s} = 0$$

**T₂** *Au voisinage de* 0 :

$$1 - \cos x^2 \sim \frac{x^4}{2} \ , \quad x^3 \sin x \sim x^4$$

*D'où* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x^2}{x^3 \sin x} = \dfrac{1}{2}$

**T₃** *Au voisinage de* 0 : $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ ,

$$x^2 + 1 - \cos x \sim \frac{3x^2}{2} \ , \quad x(e^x - 1) \sim x^2$$

*D'où* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{3}{2}$

**T₄** *Au voisinage de* $+\infty$ : $Log\, x = o(x^3)$ ,

$$x^3 - Log\, x \sim x^3 \ , \quad \cos x = o(x) \ ,$$

$2x + \cos x \sim 2x$

*D'où* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - Log\, x}{(2x + \cos x)^3} = \dfrac{1}{8}$

**T₅** *On pose* $x = -\dfrac{\pi}{2} + h$ :

$$(\pi + 2x)\, tg\, x = \frac{-2h}{tg\, h} \sim \frac{-2h}{h}$$

*D'où* $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} (\pi + 2x)\, tg\, x = -2$

**T₆** *On pose* $x = \dfrac{\pi}{2} + h$ : $\dfrac{tg\, x}{tg\, 3x} = \dfrac{tg\, 3h}{tg\, h} \sim \dfrac{3h}{h}$

*D'où* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{tg\, x}{tg\, 3x} = 3$

$T_7$ *Au voisinage de* 0 :

$$\cos u - 1 \sim -\frac{u^2}{2} \ , \sin\ u \sim u$$

*D'où au voisinage de* $x_0 = 0$ :

$$\cos(\sin x) - 1 \sim -\frac{\sin^2 x}{2} \sim \frac{-x^2}{2}$$

$$\sin(\cos x - 1) \sim \cos x - 1 \sim \frac{-x^2}{2}$$

*D'où* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - 1}{\sin(\cos x - 1)} = 1$

$T_8$ *Au voisinage de 1 :*

$$\mathrm{Log}\, x = \mathrm{Log}\,[\, 1 + (x-1)\,] \sim (x-1)$$

$$\lim_{x \to 1} (x)^{1/(x-1)} = \lim_{x \to 1} e^{\mathrm{Log}\, x/(x-1)} = e$$

$T_9$ *Dans un voisinage à droite de* 0 :

$\sqrt{x^5 \cos x} \sim x^{5/2}$ , $\mathrm{Log}(1 + x^2) \sim x^2$ ,

$x\ \mathrm{Arc\,tg}\, x \sim x^2$

*Si* $\lambda \neq -1$ , $f(x)$ *a pour partie principale* $(\lambda + 1)\, x^2$

*Si* $\lambda = -1 : f(x) = o\,(x^2)$

$T_{10}$ *Au voisinage de* 0 : $\dfrac{1}{\sin x} \sim \dfrac{1}{x}$

*a) Quand x tend vers* $0^+$ : $e^{1/x} + \dfrac{1}{\sin x} \sim e^{1/x}$

$f(x) \sim \dfrac{e^{1/x}}{\mathrm{Log}\, x} = \dfrac{-e^{1/x}}{\mathrm{Log}\, \frac{1}{x}}$ *Donc* $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

*b) Quand x tend vers* $0^-$ : $e^{1/x}$ *est un infiniment petit*

$$e^{1/x} + \frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x},\ f(x) \sim \frac{1}{x\ \mathrm{Log}\, |\, x\, |}$$

*Donc* $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

$T_{11}$ *Au voisinage de 1 :* $\mathrm{cotg}\,(x-1) \sim \dfrac{1}{x-1}$

$$\frac{\lambda x + 1}{(x-1)^2\,(x-2)^2} \sim \begin{cases} \dfrac{\lambda + 1}{(x-1)^2} & si\ \lambda \neq -1 \\[2ex] \dfrac{-1}{x-1} & si\ \lambda = -1 \end{cases}$$

*Si* $\lambda \neq -1$ , $f(x)$ *a pour partie principale* $\dfrac{\lambda + 1}{(x-1)^2}$

*Si* $\lambda = -1$ *, on ne peut pas conclure.*

## 9.2. Développements limités

### 9.2.1. DEFINITION DES DEVELOPPEMENTS LIMITES

On dit qu'une fonction $f$ définie dans un voisinage de $x_0$ (fini) sauf peut être en $x_0$, admet un **développement limité d'ordre** $n$ $(n \geqslant 0)$ **au voisinage de** $x_0$ s'il existe un intervalle $]\, x_0 - \alpha\ ,\ x_0 + \alpha\, [$ dans lequel

$$f(x) = a_0 + a_1\,(x-x_0) + \ldots + a_n\,(x-x_0)^n + \epsilon(x)\,(x-x_0)^n$$
$$\forall x \neq x_0$$

où $\epsilon$ est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to x_0} \epsilon\,(x) = 0$

Le polynôme :

$P\,(x) = a_0 + a_1\,(x-x_0) + \ldots + a_n\,(x-x_0)^n$ est appelé **partie régulière** du développement limité. Le terme $\epsilon\,(x)\,(x-x_0)^n$ est appelé **reste** ou **terme complémentaire.**

On a :

$\epsilon\,(x)\,(x-x_0)^n = o\,(1)\,(x-x_0)^n = o\,[\,(x-x_0)^n\,]$
et on peut donc écrire

$$\boxed{f(x) = a_0 + a_1\,(x-x_0) + \ldots + a_n\,(x-x_0)^n + o\,[\,(x-x_0)^n\,]}$$

*Remarque 1.–* Si $f$ admet un développement limité au voisinage de $x_0$, on a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a_0$. Si $f$ est définie et continue en $x_0$ et admet au voisinage de $x_0$ un développement limité d'ordre $n \geqslant 1$, alors $f$ est dérivable en $x_0$ car on a :

$$f(x_0)=a_0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a_1$$

*Remarque 2.* – On peut toujours se ramener à un développement limité au voisinage de 0. En effet, si $g$ est la fonction $h \longmapsto f(x_0+h)$, on a :

$$g(h)=f(x_0+h)=a_0+a_1h+\ldots+a_nh^n+o(h^n)$$

Donc le développement limité de $f$ au voisinage de $x_0$ s'obtient en remplaçant $h$ par $(x-x_0)$ dans le développement limité de $g$ au voisinage de 0.

*Remarque 3.* – Si la partie régulière d'un développement limité de $f$ au voisinage de $x_0$ n'est pas identiquement nulle, son terme de plus bas degré est la partie principale de $f(x)$ quand $x$ tend vers $x_0$. On a en effet, si $a_k \neq 0$ :

$$f(x)=a_k(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^k]$$

*Remarque 4.* – Du développement limité d'ordre $n$ de $f$ au voisinage de 0, on en déduit pour $p \in \mathbf{N}^*$ le développement limité d'ordre $np$ au voisnage de 0 de la fonction $x \longmapsto f(\lambda x^p)$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+o(x^n)$$

donne :

$$f(\lambda x^p)=a_0+a_1\lambda x^p+\ldots+a_n\lambda^n x^{np} + o(x^{np})$$

### 9.2.2. PROPRIETES DES DEVELOPPEMENTS LIMITES

*Propriété 1.* – **Si $f$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de $x_0$, ce développement est unique.**

Supposons que $f$ admette deux développements distincts

$$f(x)=a_0+\ldots+a_n(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$$

$$f(x)=b_0+\ldots+b_n(x-x_0)^n+o[(x-x_0)^n]$$

Soit $p \geqslant 0$ le plus petit indice pour lequel $a_p \neq b_p$ (les développements étant distincts, on a $p<n$). En soustrayant membre à membre et en divisant par $(x-x_0)^p$, on obtient pour $x \neq x_0$ :

$$0=(a_p-b_p)+\ldots+(a_n-b_n)(x-x_0)^{n-p} + o[(x-x_0)^{n-p}]$$

Quand $x$ tend vers $x_0$, on en déduit $a_p=b_p$, en contradiction avec l'hypothèse. Il y a donc unicité du développement.

*Propriété 2.* – **Si une fonction paire (resp. impaire) admet un développement limité au voisinage de 0, la partie régulière de ce développement limité ne contient que des puissances paires (resp. impaires) de $x$.**

En effet, la relation $f(x)=P(x)+o(x^n)$ donne :

$$f(-x)=P(-x)+o(x^n)$$

D'après l'unicité du développement limité, on a donc $P(-x)=P(x)$ si $f$ est paire et $P(-x)=-P(x)$ si $f$ est impaire.

*Propriété 3.* – **Si $f$ admet au voisinage de $x_0$ un développement limité d'ordre $n$ :**

$$a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)+o[(x-x_0)^n]$$

**$f$ admet pour $p<n$ un développement limité d'ordre $p$ dont la partie régulière est :**

$$a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_p(x-x_0)^p$$

En effet, pour $k>p$, on a :

$$a_k(x-x_0)^k=o[(x-x_0)^p]$$

et donc :

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_p(x-x_0)^p + o[(x-x_0)^p]$$

*Corollaire.* – **Pour une fonction paire, les développements limités d'ordres $2n$ et $2n+1$ au voisinage de 0 ont même partie régulière** car le développement limité ne contient que des puissances paires de $x$. On peut alors écrire

$$f(x)=a_0+a_2x^2+\ldots+a_{2n}x^{2n}+o(x^{2n+1})$$

De même, **pour une fonction impaire, les développements limités d'ordres $2n-1$ et $2n$ au voisinage de 0 ont même partie régulière** et on a :

$$f(x)=a_1x+a_3x^3+\ldots+a_{2n-1}x^{2n-1}+o(x^{2n})$$

### 9.2.3. DEVELOPPEMENTS LIMITES DEDUITS DE LA FORMULE DE TAYLOR

Si $f$ est une fonction de classe $C^{n-1}$ au voisinage de $x_0$ (fini) et si $f^{(n)}(x_0)$ existe, la formule de

Taylor – Young (§ 8.1.2) d'ordre $n$ s'écrit

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\dots$$
$$+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+o\,[(x-x_0)^n]$$

On obtient donc le développement limité d'ordre $n$ au voisinage de $x_0$.

On a ainsi au voisinage de 0 :

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$ch\, x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

$$sh\, x = x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$Log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

On en déduit :

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\dots+(-1)^n x^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+o(x^n)$$

*Remarque.*– Le développement limité peut exister sans que la formule de Taylor soit applicable. C'est le cas pour la fonction $f$ définie par :

$$f(x)=a_0+\dots+a_n(x-x_0)^n+g(x)(x-x_0)^n$$

où $g$ est une fonction non dérivable telle que

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=0$$

**Exercice – Exemple**

$\boxed{E_5}$ Déterminer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction

$$f: x \longmapsto \sqrt{2+2e^x}$$

*La fonction $f$ est indéfiniment dérivable sur* R *et donc tout développement limité de $f$ peut s'obtenir par la formule de Taylor. On a successivement :*

$$f'(x)=\frac{e^x}{\sqrt{2+2e^x}}\quad,\quad f''(x)=\frac{e^{2x}+2e^x}{(2+2e^x)^{3/2}}$$

$$f'''(x)=\frac{e^{3x}+2e^{2x}+4e^x}{(2+2e^x)^{5/2}}$$

*D'où :*

$$f(0)=2\ ,\ f'(0)=\frac{1}{2}\ ,\ f''(0)=\frac{3}{8}\ ,\ f'''(0)=\frac{7}{32}$$

*Le développement limité d'ordre 3 s'écrit donc :*

$$f(x)=2+\frac{x}{2}+\frac{3}{16}x^2+\frac{7}{192}x^3+o(x^3)$$

**TESTS**

Déterminer les développements limités d'ordre $n$ des fonctions suivantes au voisinage de $x_0$ :

$\boxed{T_{12}}$ $f: x \longmapsto e^{\sin x}\quad,\quad n=4\quad,\quad x_0=0$

$\boxed{T_{13}}$ $g: x \longmapsto \sqrt{\cos x}\quad,\quad n=2\quad,\quad x_0=0$

$\boxed{T_{14}}$ $h: x \longmapsto \sin(2\, tg\, x)\ ,$

$n=3$ puis $n=4\ ,\ x_0=\pi$

**Réponses**

$T_{12}$ $f(0)=1\ ,\ f'(0)=1\ ,\ f''(0)=1\ ,$

$f'''(0)=0\ ,\ f^{(4)}(0)=-3$

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$$

$\boxed{T_{13}}$ $g(0)=1$ , $g'(0)=0$ , $g''(0)=-\dfrac{1}{2}$

$$g(x)=1-\frac{x^2}{4}+o(x^2)$$

*La fonction étant paire, on a aussi :*

$$g(x)=1-\frac{x^2}{4}+o(x^3)$$

$\boxed{T_{14}}$ $h(\pi)=0$ , $h'(\pi)=2$ ,

$h''(\pi)=0$ , $h'''(\pi)=-4$

$$h(x)=2(x-\pi)-\frac{2}{3}(x-\pi)^3+o\,[(x-\pi)^3]$$

*h est une fonction impaire de* $x-\pi$ *car* $h(x)=\sin\,[\,2\,\mathrm{tg}\,(x-\pi)\,]$. *Les développements limités d'ordres 3 et 4 ont donc même partie régulière :* $h(x)=2(x-\pi)-\frac{2}{3}(x-\pi)^3+o\,[(x-\pi)^4]$

9.2.4. GENERALISATION DES DEVELOPPEMENTS LIMITES

a) On peut considérer une fonction définie sur un intervalle ouvert dont une extrémité est $x_0$ (au lieu d'un voisinage de $x_0$). On a alors le **développement limité à droite de** $x_0$ *(si* $x > x_0$*)* ou **à gauche de** $x_0$ (si $x < x_0$)

b) On dit qu'une fonction $f$ définie dans un voisinage de $+\infty$ admet un **développement limité d'ordre** $n$ **au voisinage de** $+\infty$ si la fonction $h : u \longmapsto f(\frac{1}{u})$ admet un développement limité d'ordre $n$ à droite de 0 :

$$h(u)=a_0+a_1u+\ldots+a_nu^n+o(u^n)$$

ce qui donne pour $f$ :

$$f(x)=a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

En pratique, on exprime $f(x)$ à l'aide de $\frac{1}{x}=u$ et on a alors :

$$f(x)=h\left(\frac{1}{x}\right)=h(u)$$

On définit de même le développement limité au voisinage de $-\infty$ en considérant le développement limité de $h$ à gauche de 0. Quand $h$ admet un développement limité au voisinage de 0, les développements limités de $f$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ coïncident et on dit alors que l'on a le **développement limité de** $f$ **au voisinage de l'infini.**

c) Si $f$ n'admet pas de développement limité au voisinage de $x_0$, il peut exister un équivalent $g(x)$ de $f(x)$ tel que $\frac{f}{g}$ admette un développement limité au voisinage de $x_0$. On a alors :

$$f(x)=g(x)\,[\,1+a_1(x-x_0)+\ldots$$
$$+a_n(x-x_0)^n+o\,[(x-x_0)^n\,]\,]$$

L'expression ainsi obtenue est appelée **développement limité généralisé d'ordre** $n$ **de** $f$ **au voisinage de** $x_0$.

Par exemple :

$$\frac{e^x}{x}=\frac{1}{x}\left[\,1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\,\right]$$

On peut définir de même un développement limité généralisé à droite de $x_0$ . Par exemple, à droite de 0 :

$$\frac{\mathrm{Log}\,x}{1+x}=\mathrm{Log}\,x\,[\,1-x+x^2+o(x^2)\,]$$

d) Si $f$ n'admet pas de développement limité au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$) mais si $f(x)\sim g(x)$ et si $\frac{f}{g}$ admet un développement limité au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$), on a :

$$f(x)=g(x)\left[\,1+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}+o\left(\frac{1}{x^n}\right)\right]$$

C'est le **développement limité généralisé d'ordre** $n$ **de** $f$ **au voisinage de** $+\infty$ (ou $-\infty$).

**Exercices – Exemples**

$\boxed{E_6}$ Déterminer le développement limité d'ordre $n$ au voisinage de l'infini de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+a}{x^2+bx}$ $(b \neq 0\ ,\ b^2+a \neq 0)$

*On a :* $f(x)=\dfrac{x^2+a}{x^2+bx}=\dfrac{1+a/x^2}{1+b/x}$

*En posant* $u = \dfrac{1}{x}$ *on obtient :*

$$f(x) = h(u) = \frac{1 + a\,u^2}{1 + b\,u}$$

*La fonction h admet au voisinage de 0 un développement limité d'ordre n donné par la formule de Taylor. On obtient :*

$$h'(u) = \frac{a\,b\,u^2 + 2a\,u - b}{(1 + b\,u)^2} \qquad h''(u) = \frac{2\,(b^2+a)}{(1+bu)^3}$$

$$h^{(n)}(u) = \frac{(-1)^n\; n!\; b^{n-2}\,(b^2+a)}{(1 + b\,u)^{n+1}} \quad \text{si} \quad n \geqslant 3$$

*On en déduit :* $h(0) = 1$ , $h'(0) = -b$

$h^{(n)}(0) = (-1)^n\; n!\; b^{n-2}\,(b^2 + a)$ *si* $n \geqslant 2$

*D'où :*

$$h(u) = 1 - b\,u + (b^2 + a)u^2 - \ldots + (-1)^n\; b^{n-2}\,(b^2 + a)u^n + o\,(u^n)$$

*Le développement limité d'ordre n de f au voisinage de l'infini est donc :*

$$f(x) = 1 - \frac{b}{x} + \frac{b^2 + a}{x^2} - \ldots + \frac{(-1)^n\; b^{n-2}\,(b^2+a)}{x^n} + o\,(\frac{1}{x^n})$$

$\boxed{E_7}$ Déterminer le développement limité généralisé d'ordre 2 au voisinage de $+\infty$ de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$

*Au voisinage de* $+\infty$, *on a* $f(x) \sim g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

*Cherchons le développement limité au voisinage de* $+\infty$ *de la fonction :*

$$\frac{f}{g} : x \longmapsto \frac{\sqrt{x\,(x+2)}}{x-1}$$

*On a :* $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\sqrt{1 + 2/x}}{1 - 1/x}$

*et, en posant* $u = \dfrac{1}{x}$ :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(u) = \frac{\sqrt{1 + 2u}}{1 - u} \quad \text{avec} \quad u > 0$$

*h indéfiniment dérivable sur* $]\dfrac{-1}{2}, +1[$ *admet un développement limité en 0 donné par la formule de Taylor et donc un développement limité à droite de 0.*

$$h'(u) = \frac{u + 2}{(1-u)^2\,\sqrt{1+2u}} \quad ,$$

$$h''(u) = \frac{3\,(u^2 + 4u + 1)}{(1-u)^3\,\sqrt{(1+2u)^3}}$$

*On en déduit :* $h(0) = 1$ , $h'(0) = 2$ , $h''(0) = 3$

$$h(u) = 1 + 2u + \frac{3}{2}\,u^2 + o\,(u^2)$$

*Le développement limité d'ordre 2 de* $\dfrac{f}{g}$ *au voisinage de* $+\infty$ *est alors :*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} + o\,(\frac{1}{x^2})$$

*ce qui donne :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\;[\,1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{2x^2} + o\,(\frac{1}{x^2})\,]$$

**TESTS**

$\boxed{T_{15}}$ Déterminer le développement limité d'ordre $n$ au voisinage de l'infini de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 2}{x\,(x-1)}$

$\boxed{T_{16}}$ Déterminer le développement limité généralisé d'ordre $n$ à droite de 0 de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x + x^2}$

$\boxed{T_{17}}$ Déterminer le développement limité généralisé d'ordre $n$ au voisinage de l'infini de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3 + 4}{x - 1}$

**Réponses**

$T_{15}$ $f(x) = h(u) = \dfrac{1 - 2u^2}{1 - u}$

$$h'(u) = \frac{2u^2 - 4u + 1}{(1 - u)^2}$$

$$h^{(n)}(u) = \frac{-n!}{(1-u)^{n+1}} \qquad si\ n \geqslant 2$$

$$h(u) = 1 + u - u^2 - u^3 - \dots - u^n + o(u^n)$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \dots - \frac{1}{x^n} + o(\frac{1}{x^n})$$

$T_{16}$ $f(x) \sim \sqrt{x} \qquad \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} = (1+x)^{1/2}$

$$f(x) = \sqrt{x}\,[\,1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^2\,2!}x^2 + \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2^n\, n\,!} x^n + o(x^n)\,]$$

$T_{17}$ $f(x) \sim x^2 \qquad \dfrac{f(x)}{x^2} = h(u) = \dfrac{1 + 4u^3}{1 - u}$

$$h'(u) = \frac{1 + 12u^2 - 8u^3}{(1-u)^2}$$

$$h''(u) = \frac{2 + 24u - 24u^2 + 8u^3}{(1-u)^3}$$

$$h^{(n)}(u) = \frac{5\,(n!)}{(1-u)^{n+1}} \qquad si\ n \geqslant 3$$

$$h(u) = 1 + u + u^2 + 5\,(u^3 + \dots + u^n) + o(u^n)$$

$$f(x) = x^2\,[\,1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 5\,(\frac{1}{x^3} + \dots + \frac{1}{x^n})$$

$$+ o(\frac{1}{x^n})\,]$$

## 9.3. Opérations sur les développements limités

### 9.3.1. DEVELOPPEMENT LIMITE D'UNE SOMME, D'UN PRODUIT, D'UN QUOTIENT

Soient $f$ et $g$ deux fonctions admettant des développements limités d'ordre $n$ au voisinage de $x_0$. Pour simplifier l'écriture nous prendrons $x_0 = 0$ dans les démonstrations :

$$f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n + o(x^n) = A(x) + o(x^n)$$

$$g(x) = b_0 + \dots + b_n x^n + o(x^n) = B(x) + o(x^n)$$

*Propriété 1.–* **Si $f$ et $g$ admettent au voisinage de $x_0$ des développements limités d'ordre $n$, la fonction $f + g$ admet au voisinage de $x_0$ un développement limité d'ordre $n$ dont la partie régulière est la somme des parties régulières des développements limités de $f$ et $g$**

car on a : $f(x) + g(x) = A(x) + B(x) + o(x^n)$

*Remarque :* Si les développements limités de $f$ et $g$ sont d'ordres respectifs $n$ et $p$, on en déduit pour $f + g$ un développement limité d'ordre égal à min $(n,p)$.

*Propriété 2.–* **Si $f$ et $g$ admettent au voisinage de $x_0$ des développements limités d'ordre $n$, la fonction $fg$ admet au voisinage de $x_0$ un développement limité d'ordre $n$ dont la partie régulière est la som-**

me des termes de degré inférieur ou égal à $n$ dans le produit des parties régulières des développements limités de $f$ et $g$.

Soit $P$ la somme des termes de degré au plus égal à $n$ dans le produit $AB$. On a alors :

$$A(x)B(x) = P(x) + x^{n+1}\ P_1(x) = P(x) + o(x^n)$$

On en déduit :

$$f(x)g(x) = [A(x) + o(x^n)]\,[B(x) + o(x^n)]$$

$$= A(x)B(x) + o(x^n) = P(x) + o(x^n)$$

ce qui démontre la propriété.

*Remarque.–* Si les développements limités de $f$ et $g$ sont d'ordres respectifs $n$ et $p$, on en déduit pour $f\,g$ un développement limité d'ordre au moins égal à min $(n,p)$. Plus précisément, si :

$$f(x) = x^r\ [a_r + \dots + a_n\ x^{n-r} + o(x^{n-r})]$$

$$g(x) = x^s\ [b_s + \dots + b_p\ x^{p-s} + o(x^{p-s})]$$

avec $a_r \neq 0$ , $b_s \neq 0$ on obtient :

$$f(x)g(x) = x^{r+s}\ [c_0 + \dots + c_m\ x^m + o(x^m)]$$

avec $m = \min(n-r\ ,\ p-s)$. On a donc le développement limité d'ordre $m+r+s = \min(n+s\ ,\ p+r)$

Par exemple, des deux développements limités :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\operatorname{ch} x - 1 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

On déduit : $\sin x\,(\operatorname{ch} x - 1) =$

$$= x^3\ [1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)]\,[\frac{1}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^3)]$$

$$= x^3\ [\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^3)] = \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{24} + o(x^6)$$

*Propriété 3.–* **Si $f$ et $g$ admettent au voisinage de $x_0$ des développements limités d'ordre $n$ et si $g(x_0) \neq 0$, la fonction $\frac{f}{g}$ admet au voisinage de $x_0$ un développement limité d'ordre $n$ dont la partie régulière est le quotient à l'ordre $n$ dans la division suivant les puissances croissantes de $(x-x_0)$ de la partie régulière du développement limité de $f$ par la partie régulière du développement limité de $g$.**

Soit $Q$ le quotient à l'ordre $n$ dans la division suivant les puissances croissantes de $A$ par $B$ .

$$A(x) = B(x)Q(x) + x^{n+1}\ R(x)$$

$$= B(x)Q(x) + o_1(x^n)$$

Comme $g(x_0) \neq 0$, il existe d'après la continuité de $g$ un voisinage de $x_0$ dans lequel $g(x) \neq 0$ et on a alors :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B(x)Q(x) + o_1(x^n)}{B(x) + o_2(x^n)}$$

$$= \frac{Q(x)\,[B(x) + o_2(x^n)] + o(x^n)}{B(x) + o_2(x^n)}$$

$$= Q(x) + o(x^n)$$

On a donc le développement limité d'ordre $n$.

*Remarque 1.–* Si les développements limités de $f$ et $g$ sont d'ordres respectifs $n$ et $p$ et s'écrivent :

$$f(x) = x^r\ [a_r + \dots + a_n\ x^{n-r} + o(x^{n-r})]$$

$$g(x) = x^s\ [b_s + \dots + b_p\ x^{p-s} + o(x^{p-s})]$$

on obtient :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^{r-s}\ [c_0 + \dots + c_m\ x^m + o(x^m)]$$

avec $m = \min(n-r\ ,\ p-s)$

Si $r \geqslant s$, on obtient ainsi le développement limité de $\frac{f}{g}$ d'ordre $m + r - s = \min(n-s\ ,\ p + r - 2s)$

Si $r < s$, on obtient le développement limité généralisé de $\frac{f}{g}$ d'ordre $m = \min(n-r\ ,\ p-s)$

*Exemple :* au voisinage de 0, on a :

$$\frac{\sin x}{\cos x} = x\ \frac{1 - x^2/6 + x^4/120 + o(x^5)}{1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^5)} = x\,g(x)$$

La division suivant les puissances croissantes fournit le développement limité d'ordre 5 de g. D'où :

$$tg\,x = x\,[\,1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + o\,(x^5)\,]$$

$$\boxed{tg\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\,(x^6)}$$

Un calcul analogue donne :

$$\boxed{th\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o\,(x^6)}$$

*Remarque 2.*– Les propriétés précédentes s'étendent au cas d'une somme ou d'un produit de plus de deux fonctions ainsi qu'aux développements limités au voisinage de l'infini (en considérant alors les puissances de $\frac{1}{x}$ au lieu de $x$)

**Exercices – Exemples**

$\boxed{E_8}$ Déterminer le développement limité d'ordre 6 au voisinage de 0 de la fonction

$$f : x \longmapsto e^x \sin x$$

$$\text{on a : } \sin x = x\,[\,1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o\,(x^5)\,]$$

*x étant en facteur, il suffit pour obtenir le développement limité d'ordre 6 de f d'utiliser le développement limité d'ordre 5 de la fonction exponentielle :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o\,(x^5)$$

*En faisant le produit et en ne conservant que les puissances de x au plus égales à 6, on obtient :*

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + o\,(x^6)$$

$\boxed{E_9}$ Déterminer le développement limité d'ordre 6 au voisinage de 0 de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1 - \cos 2x}{sh\,x}$$

*Le développement limité de $1 - \cos 2x$ contient en facteur $x^2$ et celui de $sh\,x$ contient $x$. On a donc*

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \cdot \frac{(1 - \cos 2x)/x^2}{sh\,x\,/\,x} = x\,g(x)$$

*Pour obtenir le développement limité d'ordre 6 de f il suffit de trouver le développement limité d'ordre 5 de g, ce qui nécessite les développements limités d'ordre 5 de $\frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ et $\frac{sh\,x}{x}$. On obtient :*

$$g(x) = \frac{2 - 2x^2/3 + 4x^4/45 + o\,(x^5)}{1 + x^2/3 + x^4/120 + o\,(x^5)}$$

*La fonction g étant paire, les développements limités d'ordre 4 et 5 ont même partie régulière. En calculant le quotient à l'ordre 4 suivant les puissances croissantes de x, on en déduit :*

$$f(x) = 2x - x^3 + \frac{43\,x^5}{180} + o\,(x^6)$$

$\boxed{E_{10}}$ Déterminer le développement limité généralisé d'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de

la fonction $\quad f : x \longmapsto \dfrac{x^2 - 1}{x + 2 + e^{-x}}$

*Au voisinage de $+\infty$, on a $f(x) \sim g(x) = x$*

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - 1/x^2}{1 + 2/x + e^{-x}/x} = h(u) = \frac{1 - u^2}{1 + 2u + ue^{-1/u}}$$

*Pour déterminer le développement limité d'ordre 3 de $\frac{f}{g}$ au voisinage de $+\infty$, on détermine le développement limité d'ordre 3 de h à droite de 0. Or à droite de 0, on a*

$$u\,e^{-1/u} = o\,(u^n) \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

*et donc :* $h(u) = \dfrac{1 - u^2}{1 + 2u + o\,(u^3)}$

*En faisant le quotient à l'ordre 3 suivant les puissances croissantes de u, on obtient :*

$$h(u) = 1 - 2u + 3\,u^2 - 6\,u^3 + o\,(u^3)$$

*D'où :*

$$f(x) = x\left[1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right]$$

**TESTS**

Déterminer les développements limités d'ordre $n$ des fonctions suivantes au voisinage de $x_0$.

$\boxed{T_{18}}$ $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$ , $n = 3$ , $x_0 = 0$

$\boxed{T_{19}}$ $f\ x \longmapsto \dfrac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$ , $n = 4$ , $x_0 = 0$

$\boxed{T_{20}}$ $f : x \longmapsto \sin x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cos x$ , $n = 7$ , $x_0 = 0$

$\boxed{T_{21}}$ $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(1/x)}{x+1}$ , $n = 6$ , $x_0 = \infty$

$\boxed{T_{22}}$ $f : x \longmapsto \dfrac{\operatorname{Log} x}{x}$ , $n = 4$ , $x_0 = 1$

$\boxed{T_{23}}$ $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\cos x}$ , $n = 6$ , $x_0 = 0$

En déduire le développement limité d'ordre 7 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \operatorname{tg} x$

$\boxed{T_{24}}$ $f : x \longmapsto \dfrac{e^x}{\sin x}$ , $n = 4$ , $x_0 = 0$

(développement limité généralisé).

$\boxed{T_{25}}$ $f : x \longmapsto 3(\operatorname{tg}^2 x - x^2)$ , $n = 7$ , $x_0 = 0$

En déduire le développement limité d'ordre le plus élevé possible de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{e^x - 1}$ au voisinage de 0.

**Réponses**

$T_{18}$ $f(x) = e^x (1+x)^{-1/2}$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)$$

$T_{19}$ *On utilise les développements limités d'ordre 5 pour les deux fonctions*

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{18} + o(x^5)$$

$T_{20}$ *On utilise les développements limités d'ordre 6 pour cos et ch, d'ordre 7 pour sin et sh*

$$f(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{x^7}{315} + o(x^7)$$

$T_{21}$ $f(x) = g(u) = u \sin u \cdot \dfrac{1}{1+u}$

*On utilise les développements limités d'ordre 5 pour sin u et 4 pour* $\dfrac{1}{1+u}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{6x^4} - \frac{5}{6x^5} + \frac{101}{120x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right)$$

$T_{22}$ *On pose* $x = 1 + h$

$$\operatorname{Log} x = \operatorname{Log}(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + o(h^4)$$

*Par division, on obtient :*

$$\frac{\operatorname{Log} x}{x} = (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 - \frac{25}{12}(x-1)^4 + o\left[(x-1)^4\right]$$

$T_{23}$ $$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^6)$$

$$\operatorname{tg} x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$$

$T_{24}$ $\dfrac{e^x}{\sin x} \sim \dfrac{1}{x}$ *on utilise les développements* *limités d'ordre 4 pour $e^x$ et 5 pour sin x*

$$f(x) = \frac{1}{x}\left[1 + x + \frac{2x^2}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{13x^4}{90} + o(x^4)\right]$$

(T25) *On utilise le développement limité d'ordre 6 pour tg :*

$$f(x) = 2x^4 + \frac{17}{15}x^6 + o(x^7)$$

$$= x^4\left[2 + \frac{17}{15}x^2 + o(x^3)\right]$$

*Le développement limité de $e^x - 1$ contient x en facteur. En utilisant le développement limité d'ordre 4, on obtient pour g le développement limité d'ordre 6 :*

$$g(x) = 2x^3 - x^4 + \frac{13x^5}{10} - \frac{17}{30}x^6 + o(x^6)$$

### 9.3.2. DEVELOPPEMENT LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSEE

**Propriété.– Si $f$ admet au voisinage de $x_0$ un développement limité d'ordre $n$ et si $g$ admet au voisinage de $u_0 = f(x_0)$ un développement limité d'ordre $n$, la fonction $g \circ f$ admet au voisinage de $x_0$ un développement limité d'ordre $n$. La partie régulière s'obtient en substituant la partie régulière du développement limité de $f$ dans la partie régulière du développement limité de $g$ et en ne conservant que les termes de degré au plus égal à $n$.**

On a :

$$g(u) = a_0 + \dots + a_n(u-u_0)^n + o[(u-u_0)^n]$$

$$= Q(u-u_0) + o[(u-u_0)^n]$$

$$f(x) = u_0 + \dots + b_n(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n]$$

$$= P(x-x_0) + o[(x-x_0)^n]$$

ce qui donne

$$g[f(x)] = a_0 + a_1[f(x) - u_0] + \dots$$

$$+ a_n[f(x) - u_0]^n + o[(f(x) - u_0)^n]$$

$f(x) - u_0$ est par rapport à $x - x_0$ un infiniment petit d'ordre au moins égal à $1$ et donc :

$$o[(f(x) - u_0)^n] = o[(x-x_0)^n]$$

On a d'autre part pour $k \geqslant 1$ :

$$[f(x) - u_0]^k = \left[P(x-x_0) - u_0 + o[(x-x_0)^n]\right]^k$$

$$= [P(x-x_0) - u_0]^k + o[(x-x_0)^n]$$

D'où en reportant :

$$g[f(x)] = Q[P(x-x_0) - u_0] + o[(x-x_0)^n]$$

Si $R$ est le polynôme obtenu en ne retenant que les puissances de $x - x_0$ au plus égales à $n$, on a

$$Q[P(x-x_0) - u_0] = R(x-x_0) + o[(x-x_0)^n]$$

ce qui démontre la propriété.

*Remarque.–* Supposons que

$$g(u) = a_0 + a_p(u-u_0)^p + \dots$$

$$+ a_n(u-u_0)^n + o[(u-u_0)^n]$$

$$f(x) = u_0 + b_q(x-x_0)^q + \dots$$

$$+ b_n(x-x_0)^n + o[(x-x_0)^n]$$

avec $a_p \neq 0$, $b_q \neq 0$, $1 \leqslant p \leqslant n$,

$1 \leqslant q \leqslant n$

**Pour obtenir le développement limité d'ordre $n$ de $g \circ f$, il suffit d'utiliser pour $g$ le développement limité d'ordre $E(\frac{n}{q})$ où $E$ est la fonction partie entière.**

En effet, on a : $f(x) - u_0 \sim b_q(x-x_0)^q$

D'où : $[f(x) - u_0]^r = o[(x-x_0)^n]$ dès que

$qr > n$ ou $r > \frac{n}{q}$

**De même, il suffit d'utiliser pour $f$ le développement limité d'ordre $n - (p-1)q$.**

En effet, dans $[f(x) - u_0]^r$, le terme de plus bas degré contenant $b_k$ s'écrit :

$$r[b_q(x-x_0)^q]^{r-1}[b_k(x-x_0)^k] =$$

$$= o[(x-x_0)^n] \text{ dès que } k + q(r-1) > n$$

comme $r \geqslant p$, il suffit de prendre $k + (p-1)q \leqslant n$ ou $k \leqslant n - (p-1)q$.

**E₁₁** Déterminer le développement limité d'ordre 6 au voisinage de 0 de la fonction

$$f : x \longmapsto e^{\cos x}$$

*On a :* $\cos x = 1 + u(x)$ avec $u(x) \sim \frac{-x^2}{2}$

$$f(x) = e^{1+u(x)} = e\, e^{u(x)}$$

*Comme* $u(x) \sim -\frac{x^2}{2}$ *(c'est-à-dire $q = 2$), pour obtenir le développement limité d'ordre 6 de la fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$, il suffit d'utiliser le développement limité d'ordre 3 de la fonction exponentielle:*

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$$

*La première puissance non nulle de u dans ce développement étant $p = 1$, il faut utiliser le développement limité d'ordre 6 pour la fonction u :*

$$u(x) = \cos x - 1 = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6)$$

*En reportant, on obtient*

$$e^{u(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k!} \left[ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} \right]^k + o(x^6)$$

*En ne conservant que les puissances de x au plus égales à 6, il reste*

$$e^{u(x)} = 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24}\right) + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^6}{8}\right) + o(x^6)$$

*D'où :*

$$f(x) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 - \frac{31\,e}{720}\,x^6 + o(x^6)$$

**E₁₂** Déterminer le développement limité d'ordre *8* au voisinage de 0 de la fonction

$$f : x \longmapsto ch\, \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

*On a $f(x) = ch\, u(x)$ avec $u(x) \sim x^2$ (c'est-à-dire $q = 2$). Il suffit donc d'utiliser le développement limité d'ordre 4 pour la fonction $u \longmapsto ch\, u$ au voisinage de* 0.

$$ch\, u = 1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o(u^4)$$

*On a ensuite :*

$$u(x) = x^2\, \varphi(x) \;,\; u^2(x) = x^4\, \varphi^2(x)$$

*Pour obtenir le développement limité d'ordre 8 de $u^2$, il suffit de prendre le développement limité d'ordre 4 de $\varphi$ c'est-à-dire le développement limité d'ordre 6 de u*

$$u(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

$$= x^2\,[\,1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4\,] + o(x^6)$$

*En reportant, on en déduit :*

$$f(x) = 1 + \frac{x^4}{2}\,[\,1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4\,]^2$$

$$+ \frac{x^8}{24}\,[\,1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4\,]^4$$

$$+ o(x^8)$$

*et en ne conservant que les puissances de x au plus égales à 8 :*

$$f(x) = 1 + \frac{x^4}{2} - 2x^5 + 5x^6 - 10x^7 + \frac{421}{24}x^8$$

$$+ o(x^8)$$

## TESTS

Déterminer les développements limités d'ordre $n$ des fonctions suivantes au voisinage de $x_0$:

**T₂₆** $f : x \longmapsto \sqrt{\cos x}\;,\; n = 6\;,\; x_0 = 0$

**T₂₇** $f : x \longmapsto \cos(\pi \sin x)\;,\; n = 8\;,\; x_0 = \frac{\pi}{2}$

**T₂₈** $f : x \longmapsto Log(1 + x\, sh\, x)\;,\; n = 6\;,\; x_0 = 0$

**T₂₉** $f : x \longmapsto \exp\left(\frac{x+4}{x+2}\right)\;,\; n = 4\;,\; x_0 = \infty$

$\boxed{T_{30}}$ $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2-\sqrt{1-x}}}{2}}$, $n=3$,

$x_0 = 0$

$\boxed{T_{31}}$ $f : x \longmapsto (1-x)^{\sin x}$, $n=4$, $x_0=0$

**Réponses**

$T_{26}$ $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + o(x^6)$

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)$$

$$f(x) = \sqrt{1+(\cos x - 1)} = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{96} - \frac{19\,x^6}{5760} + o(x^6)$$

$T_{27}$ $\sin x = 1 - \dfrac{1}{2}(x-\dfrac{\pi}{2})^2 + \dfrac{1}{24}(x-\dfrac{\pi}{2})^4 - \dfrac{1}{720}(x-\dfrac{\pi}{2})^6 + o\,[(x-\dfrac{\pi}{2})^6]$

$$\cos u = -1 + \frac{1}{2}(u-\pi)^2 - \frac{1}{24}(u-\pi)^4 + o\,[(u-\pi)^4]$$

$$f(x) = -1 + \frac{\pi^2}{8}(x-\frac{\pi}{2})^4 - \frac{\pi^2}{48}(x-\frac{\pi}{2})^6 + (\frac{\pi^2}{640} - \frac{\pi^4}{384})(x-\frac{\pi}{2})^8 + o\,[(x-\frac{\pi}{2})^8]$$

$T_{28}$ $1 + x\,\mathrm{sh}\,x = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{x^6}{120} + o(x^6)$

$$\mathrm{Log}(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

$$f(x) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{7x^6}{40} + o(x^6)$$

$T_{29}$ $\dfrac{x+4}{x+2} = 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{8}{x^3} - \dfrac{16}{x^4} + o(\dfrac{1}{x^4})$

$$e^u = e\,[1 + (u-1) + \frac{1}{2}(u-1)^2 + \frac{1}{6}(u-1)^3 + \frac{1}{24}(u-1)^4] + o\,[(u-1)^4]$$

$$f(x) = e + \frac{2e}{x} - \frac{2e}{x^2} + \frac{4e}{3x^3} + \frac{2e}{3x^4} + o(\frac{1}{x^4})$$

$T_{30}$ $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} + o(x^3)$

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(u^3)$$

$$g(x) = \sqrt{2-\sqrt{1-x}} = \sqrt{1 + [1 - \sqrt{1-x}]}$$

$$= 1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{32} + \frac{3x^3}{128} + o(x^3)$$

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{g(x)-1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{x}{16} + \frac{3x^2}{512} + \frac{45x^3}{8192} + o(x^3)$$

$T_{31}$ $f(x) = e^{\sin x\ \mathrm{Log}\,(1-x)}$

$\sin x\ \mathrm{Log}(1-x) =$

$$= [x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)]\,[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)]$$

$$= -x^2 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$f(x) = 1 - x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

### 9.3.3. INTEGRATION DES DEVELOPPEMENTS LIMITES

*Propriété.–* **Si $f$ est continue dans un intervalle I contenant $x_0$ et admet au voisinage de $x_0$ un développement limité d'ordre $n$**

$$f(x) = a_0 + \dots + a_n(x-x_0)^n + o\,[(x-x_0)^n]$$

**toute primitive $F$ de $f$ dans I admet un développement limité d'ordre $n+1$ :**

$$F(x) = F(x_0) + a_0(x-x_0) + \dots + a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + o\,[(x-x_0)^{n+1}]$$

On dit que **le développement limité de $F$ s'obtient en intégrant terme à terme le développement limité de $f$.**

$f$ continue sur I admet (§ 4.4) des primitives. Si $F$ est l'une d'entre elles, considérons la fonction :

$$u : x \longmapsto F(x) - \left[ F(x_0) + a_0 (x-x_0) + \dots + a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \right]$$

$u$ est dérivable sur I et $u(x_0) = 0$. La formule des accroissements finis s'écrit :

$$u(x) - u(x_0) = (x-x_0)\, u' [ x_0 + \theta (x-x_0) ] \qquad 0 < \theta < 1$$

avec : $u'(x) = f(x) - [ a_0 + \dots + a_n (x-x_0)^n ]$

$$= o [ (x-x_0)^n ]$$

ce qui donne :

$$u(x) = (x-x_0)\, o [ \theta^n (x-x_0)^n ]$$
$$= o [ (x-x_0)^{n+1} ]$$

ce qui démontre la propriété .

*Corollaire :* Le développement limité d'ordre $2n$ de la fonction *Arc tg* au voisinage de 0 s'écrit :

$$\boxed{\mathrm{Arc\ tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})}$$

En effet, la dérivée a pour développement limité d'ordre $2n-1$ au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} + o(x^{2n-1})$$

Il suffit d'intégrer terme à terme et d'utiliser l'égalité $\mathrm{Arc\ tg}\, 0 = 0$.

*Remarque.*– On ne peut pas dériver terme à terme un développement limité quelconque :

$$f(x) = a_0 + \dots + a_n (x-x_0)^n + \epsilon(x)(x-x_0)^n$$

car l'existence du développement limité ne suppose pas la fonction $\epsilon$ dérivable.

**Mais on peut dériver terme à terme un développement limité obtenu par la formule de Taylor.** En effet, si $f$ est de classe $C^{n-1}$ au voisinage de $x_0$ et si $f^{(n)}(x_0)$ existe, la fonction $g = f'$ est de classe $C^{n-2}$ au voisinage de $x_0$ et $g^{(n-1)}(x_0)$ existe.

On a donc (§ 9.2.3) :

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o [ (x-x_0)^n ]$$

$$g(x) = g(x_0) + (x-x_0) g'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(x_0) + o [ (x-x_0)^{n-1} ]$$

C'est-à-dire :

$$f'(x) = f'(x_0) + (x-x_0) f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0) + o [ (x-x_0)^{n-1} ]$$

et on constate que la partie régulière du développement limité d'ordre $n-1$ de $f'$ est la dérivée de la partie régulière du développement limité d'ordre $n$ de $f$.

**Exercice – Exemple**

$\boxed{E_{13}}$ Déterminer le développement limité d'ordre $2n$ au voisinage de 0 de la fonction

$$f : x \longmapsto \mathrm{Arc\ sin}\, x$$

*On a* $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$

*Le développement limité d'ordre $(2n-1)$ de $f'$ au voisinage de 0 s'écrit :*

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{(-x^2)^2}{2!} - \dots$$
$$- \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{1}{2} - n + 2\right) \frac{(-x^2)^{n-1}}{(n-1)!} + o(x^{2n-1})$$
$$= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^2\, 2!} x^4 + \dots$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots (2n-3)}{2^{n-1} (n-1)!} x^{2n-2} + o(x^{2n-1})$$

*D'où en intégrant terme à terme et en utilisant* $Arc\sin 0 = 0$

$$Arc\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2^2\,2!}\frac{x^5}{5} + \ldots$$

$$+ \frac{1\,.\,3\,.\ldots(2n-3)}{2^{n-1}\,(n-1)\,!}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o\,(x^{2n})$$

**TESTS**

Déterminer les développements limités d'ordre $n$ des fonctions suivantes au voisinage de $x_0$ :

$\boxed{T_{32}}$ $f : x \longmapsto Arg\,th\,x\ ,\ n = 2p\ ,\ x_0 = 0$

$\boxed{T_{33}}$ $f : x \longmapsto Arg\,sh\,x\ ,\ n = 2p\ ,\ x_o = 0$

$\boxed{T_{34}}$ $f : x \longmapsto Log\,(\cos x)\ ,\ n = 8\ ,\ x_0 = 0$ *(utiliser* $T_{23}$*)*

$\boxed{T_{35}}$ $f : x \longmapsto Arc\,tg\sqrt{x}\ ,\ n = 4\ ,\ x_0 = 1$

**Réponses**

$T_{32}$ *On intègre le développement limité d'ordre* $2p-1$ *de la fonction* $x \longmapsto \frac{1}{1-x^2}$

$$Arg\,th\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2p-1}}{2p-1} + o\,(x^{2p})$$

*On peut aussi utiliser la relation*

$$2\,Arg\,th\,x = Log\,(1+x) - Log\,(1-x)$$

$T_{33}$ $$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\,.\,3}{2^2\,2\,!}x^4 + \ldots$$

$$+ (-1)^{p-1}\frac{1\,.\,3\ldots(2p-3)}{2^{p-1}\,(p-1)\,!}x^{2p-2} + o\,(x^{2p-1})$$

*Par intégration :*

$$Arg\,sh\,x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2^2\,2!}\frac{x^5}{5} + \ldots$$

$$+ (-1)^{p-1}\frac{1\,.\,3\ldots(2p-3)}{2^{p-1}\,(p-1)\,!}\frac{x^{2p-1}}{2p-1} + o\,(x^{2p})$$

$T_{34}$ *On a :*

$$\frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o\,(x^7)$$

*Par intégration*

$$Log\,(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17}{2520}x^8 + o\,(x^8)$$

$T_{35}$ $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

*ou en posant* $x = 1 + h$ :

$$f'(x) = \frac{1}{4}(1+h)^{-1/2}\,(1+\frac{h}{2})^{-1}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{h}{4} + \frac{7}{32}h^2 - \frac{3}{16}h^3 + o\,(h^3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{7}{32}(x-1)^2 - \frac{3}{16}(x-1)^3 + o\,[\,x-1)^3\,]$$

*Par intégration :*

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{7}{96}(x-1)^3 - \frac{3}{64}(x-1)^4 + o\,[\,(x-1)^4\,]$$

### 9.4. Application aux problèmes de limites.

Au voisinage de $x_0$, le premier terme non nul du développement limité (ou du développement limité généralisé) de $f$ fournit un équivalent de $f(x)$, ce qui permet de trouver la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $x_0$.

Dans le cas des formes indéterminées $1^\infty$, $0^0$ ou $\infty^0$, on a

$$f(x) = [\,u\,(x)\,]^{v(x)} = e^{v(x)\,Log\ u(x)}.$$

Pour trouver la limite de $f(x)$ quand $x$ tend vers $x_0$ il suffit donc d'étudier la limite de :

$$Log\,f(x) = v\,(x)\,Log\,u\,(x)$$

$\boxed{E_{14}}$ Etudier la suite $(u_n)$ définie par

$$u_n = n\,[\,e^a - (1+\frac{a}{n})^n\,] \qquad a \in \mathbf{R}$$

*On a une forme indéterminée* $\infty \times 0$ *car* ($\mathbf{E}_1$, § 9.1)

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{a}{n})^n = e^a$$

*Cherchons un développement limité au voisinage de l'infini de* $V_n = (1+\frac{a}{n})^n$ *On a :*

$$\text{Log}\, V_n = n\, \text{Log}\,(1+\frac{a}{n})$$

$$= n\,[\frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\,]$$

$$= a - \frac{a^2}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

*D'où :*

$$V_n = e^a \;\exp\;[-\frac{a^2}{2n} + o(\frac{1}{n})\,]$$

$$= e^a\,[1 - \frac{a^2}{2n} + o(\frac{1}{n})\,]$$

*On en déduit*

$$u_n = \frac{a^2\,e^a}{2} + o(1)$$

*c'est-à-dire*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{a^2\,e^a}{2}$$

$\boxed{E_{15}}$ Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

avec $f : x \longmapsto \dfrac{\text{sh}\,x - x\cos x}{x\,(1-\text{ch}\,x)}$

$g : x \longmapsto \sqrt[2]{x^4+\lambda x^3+2} - \sqrt[3]{x^6+6x^4+1}$

*Pour la fonction f, on a une forme indéterminée* $\frac{0}{0}$. *En utilisant les développements limités au voisinage de 0, on a :*

$$\text{sh}\,x - x\cos x = [\,x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\,]$$

$$- x\,[\,1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\,]$$

$$= \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

$$x\,(1-\text{ch}\,x) = x\,[-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\,] = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\text{D'où : } f(x) \sim \frac{2\,x^3}{3(-\frac{x^3}{2})} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{C'est-à-dire : } \lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{4}{3}$$

*Pour la fonction g, on a une forme indéterminée* $\infty - \infty$. *En utilisant les développements limités généralisés au voisinage de* $+\infty$, *on a :*

$$\sqrt[2]{x^4+\lambda x^3+2} = x^2\,(1 + \frac{\lambda}{x} + \frac{2}{x^4})^{1/2}$$

$$= x^2\,[\,1 + \frac{\lambda}{2x} - \frac{\lambda^2}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2})\,]$$

$$\sqrt[3]{x^6+6x^4+1} = x^2\,(1 + \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^6})^{1/3}$$

$$= x^2\,[\,1 + \frac{2}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})\,]$$

*D'où :*

$$g(x) = \frac{\lambda x}{2} - (\frac{\lambda^2}{8} + 2) + o(1)\,.$$

*ce qui donne*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty & si \quad \lambda > 0 \\ -\infty & si \quad \lambda < 0 \\ -2 & si \quad \lambda = 0 \end{cases}$$

**TESTS**

Déterminer les limites suivantes :

$\boxed{T_{36}}$ $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+2x}}{\cos x - \operatorname{ch} x}$$

$\boxed{T_{37}}$ $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\lambda x + 1 + \sqrt{x^2+2x}}{\lambda x + 2 + \sqrt{x^2+4x+1}}$$

$\boxed{T_{38}}$ $$\lim_{x\to 0} (\operatorname{ch} x - \cos x)^{x\cos x - \sin x}$$

$\boxed{T_{39}}$ $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$$

$\boxed{T_{40}}$ Etudier la suite $u_n$ définie par

$$u_n = n^2 e^{\frac{2n+1}{n^2}} - n(n+2)$$

$\boxed{T_{41}}$ Déterminer le développement limité généralisé d'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto \operatorname{cotg} x$. En déduire la limite quand $x$ tend vers $1$ de la fonction :

$$g : x \longmapsto \operatorname{cotg}(x-1) - \frac{1}{(x-1)(x-2)^2}$$

**Réponses**

$T_{36}$ $e^{\sin x} - \sqrt{1+2x} = x^2 + o(x^2)$ ,

$\cos x - \operatorname{ch} x = -x^2 + o(x^2)$

*limite* $= -1$

$T_{37}$ *on a :*

$$\lambda x + 1 + \sqrt{x^2+2x} = \lambda x + 1 - x\left(1+\frac{2}{x}\right)^{1/2}$$

$$= (\lambda - 1)x + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lambda x + 2 + \sqrt{x^2+4x+1} = (\lambda-1)x + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

*limite* $= 1$ *si* $\lambda \neq 1$ , $\frac{1}{3}$ *si* $\lambda = 1$

$T_{38}$ $$\operatorname{Log}(\operatorname{ch} x - \cos x)^{x\cos x - \sin x}$$

$$= (x\cos x - \sin x)\operatorname{Log}(\operatorname{ch} x - \cos x)$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right]\operatorname{Log}\left[x^2 + o(x^2)\right]$$

*limite* $= 1$

$T_{39}$ $$\operatorname{Log}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \frac{1}{x^2}\operatorname{Log}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\operatorname{Log}\left[1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right] = -\frac{1}{6} + o(1)$$

*limite* $= \dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$

$T_{40}$ $$e^{2n+1/n^2} = e^{2/n + 1/n^2}$$

$$= 1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$u_n = 3 + o(1)\ ,\quad \lim_{n\to\infty} u_n = 3$$

$T_{41}$ $\operatorname{cotg} x \sim \frac{1}{x}$. *On utilise les développements limités d'ordre 4 pour cos et 5 pour sin :*

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x}\left[1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + o(x^4)\right]$$

*En posant* $x = 1 + h$ , *on a :*

$$g(x) = \operatorname{cotg} h - \frac{1}{h(1-h)^2}$$

$$= \frac{1}{h}\left[1 - \frac{h^2}{3} + o(h^2)\right] - \frac{1}{h}\left[1 + 2h + o(h)\right]$$

$\lim_{x\to 1} g(x) = -2$ *(ce qui dans* $T_{11}$ , § 9.1 , *permet de conclure lorsque* $\lambda = -1$*)*.