

description du comportement des géomatériaux : pour une utilisation pratique dans les codes de calcul

F. Prunier

INSA-LGCIE

2018-2019

Plan de l'exposé

- 1 rappels pratiques sur les tenseurs
- 2 notion de loi de comportement
- 3 comportements élémentaires des matériaux solides
 - élasticité
 - élastoplasticité
 - visco-élasto-plasticité
- 4 quelques éléments sur le comportement des sols
 - compressibilité
 - résistance au cisaillement

Modalités d'évaluation

Modalités d'évaluation

une note sur 20 répartie comme suit

- examen écrit de 2h 70%
- un projet de 30%
- si rattrapage examen écrit de 2h 100%

But du cours

avertissement

Ce cours a pour but de donner les éléments théoriques nécessaires qui permettent une utilisation avertie des codes de calcul de type éléments finis (ou toute autre méthode numérique de résolution de problèmes continus) pour les problèmes de géomécanique. Le lecteur pourra avantageusement compléter ses compétences dans le domaine des lois comportement en se référant à l'ouvrage de (Lemaître et Chaboche). Enfin, si le lecteur souhaite développer sa propre loi de comportement, ou formulation physique, je le renvoie aux nombreux ouvrages de références sur ce vaste sujet. (Simo and Hugues, Zienkiewicz, R. de Borst ...).

But du cours : type d'approche

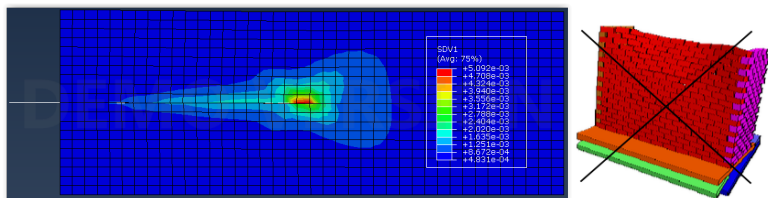
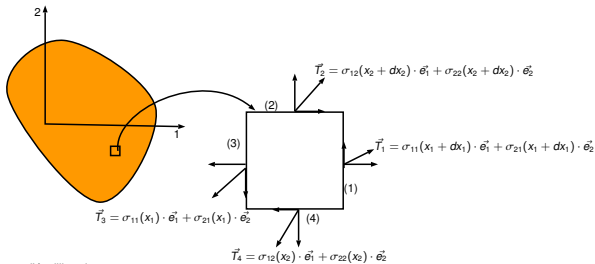


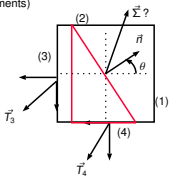
FIGURE – approches continues (MEF,diff. finies...) >> approches discrètes (MED, dyn. moléculaires...)

Tenseur de contraintes de Cauchy : construction "intuitive"



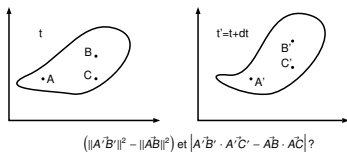
l'équilibre donne :

- 1) $\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0$ et $\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0$ (résultante)
- 2) $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ (moments)



en déduire l'existence d'un opérateur sous forme de matrice noté $\underline{\underline{\sigma}}$ tel que $\vec{\Sigma} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}$

Tenseur des déformations I



Soit la fonction vectorielle $\vec{\phi}$ dénommée fonction *placement* telle que :

$$\vec{OA}' = \vec{\phi}(A, t)$$

alors on a pour tout point B au voisinage de A :

$$\vec{OB}' = \vec{\phi}(B) \underset{A}{=} \vec{\phi}(A) + \nabla \vec{\phi}(A) \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) + o(\vec{OB} - \vec{OA})$$

d'où

$$\begin{cases} A'\vec{B}' & \underset{A}{=} \nabla \vec{\phi}(A) \cdot \vec{AB} + o(\vec{AB}) \\ A'\vec{B}' & \approx \nabla \vec{\phi}(A) \cdot \vec{AB} = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{AB} \end{cases}$$

Tenseur des déformations II

ainsi on a :

$$\begin{aligned}
 \|\vec{A}'\vec{B}'\|^2 - \|\vec{A}\vec{B}\|^2 &= (\underline{\underline{F}} \cdot \vec{A}\vec{B})^t \cdot (\underline{\underline{F}} \cdot \vec{A}\vec{B}) - \vec{A}\vec{B}^t \cdot \vec{A}\vec{B} \\
 &= \vec{A}\vec{B}^t \underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} \vec{A}\vec{B} - \vec{A}\vec{B}^t \cdot \vec{A}\vec{B} \\
 &= \vec{A}\vec{B}^t (\underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \vec{A}\vec{B}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 |A'\vec{B}' \cdot A'\vec{C}' - \vec{A}\vec{B} \cdot \vec{A}\vec{C}| &= (\underline{\underline{F}} \cdot \vec{A}\vec{B})^t \cdot (\underline{\underline{F}} \cdot \vec{A}\vec{C}) - \vec{A}\vec{B}^t \cdot \vec{A}\vec{C} \\
 &= \vec{A}\vec{B}^t \underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} \vec{A}\vec{C} - \vec{A}\vec{B}^t \cdot \vec{A}\vec{C} \\
 &= \vec{A}\vec{B}^t (\underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) \vec{A}\vec{C}
 \end{aligned}$$

Le tenseur $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$ est appelé tenseur de *Green-Lagrange*.

Tenseur des déformations III

On peut introduire le vecteur déplacement :

$$\vec{u} = A\vec{A}' = O\vec{A}' - O\vec{A} \Leftrightarrow O\vec{A}' = O\vec{A} + \vec{u}$$

$$\Rightarrow \underset{\text{par dérivation}}{\nabla\vec{\phi}} = \underline{\underline{1}} + \nabla\vec{u}$$

et

$$\underline{\underline{\underline{E}}} = \frac{1}{2} (\nabla\vec{u} + \nabla^t\vec{u} + \nabla^t\vec{u} \cdot \nabla\vec{u})$$

En négligeant les termes du second ordre, on obtient le tenseur des déformations linéarisé (petites déformations) :

$$\underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla^t u)$$

notations sur les tenseurs

Dans ce cours les notations d'Einstein sur les tenseurs seront utilisées. Voici quelques rappels succincts sur ces notations :

- indice répété : $a_i b_i = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$ ou encore $a_{ii} = \sum_{i=1}^3 a_{ii}$

- dérivée partielle spatiale : $a_j = \frac{\partial a}{\partial x_j}$

- dérivée temporelle : on conservera la notation classique du *point* : $\dot{a} = \frac{\partial a}{\partial t}$

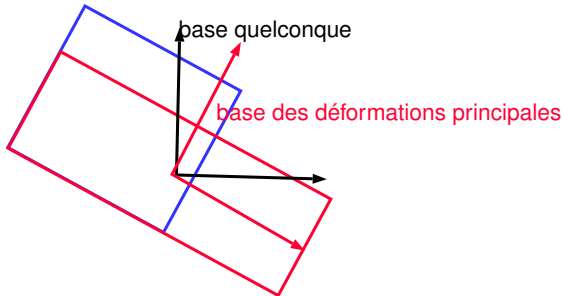
- symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- pseudo tenseur de permutation :

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i=j \text{ ou } j=k \text{ ou } k=i \\ 1 & \text{si } i,j,k \text{ dans le sens direct de la base} \\ -1 & \text{si } i,j,k \text{ dans le sens indirect de la base} \end{cases}$$

rappel sur les matrices de passage I

état initial de la matière



état déformée de la matière

FIGURE – motivation

rappel sur les matrices de passage II

Théorème

Si X_0 et X_1 sont les matrices colonnes des coordonnées d'un même vecteur u respectivement dans les bases B_0 et B_1 du \mathbb{K} – ev \mathcal{E} , on a :

$$X_0 = P_{B_0 \rightarrow B_1} X_1$$

avec $P_{B_0 \rightarrow B_1}$ la matrice de la famille de vecteurs de base de la base B_1 exprimé dans la base B_0 , rangés en colonne.

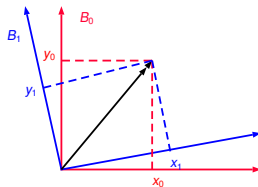


FIGURE – changement de base sur un vecteur

rappel sur les matrices de passage III

effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme

Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} deux \mathbb{K} -ev, B_{E0} et B_{E1} 2 bases de \mathcal{E} et B_{F0} et B_{F1} 2 bases de \mathcal{F} . On désigne par P la matrice de passage de B_{E0} à B_{E1} , et par Q celle de B_{F0} à B_{F1} . Soit K_0 la matrice d'une application linéaire de \mathcal{E} dans \mathcal{F} écrite dans les bases B_{E0} , B_{F0} (telle que $F_0 = K_0 X_0$ par exemple).

Montrer que K_1 la matrice de cette application linéaire écrite dans les bases B_{E1} , B_{F1} se calcule comme suit :

$$K_1 = Q^{-1} K_0 P$$

rappel sur la réduction des matrices symétriques

Théorème

Soit f un endomorphisme ($f : E \rightarrow E$) symétrique réel :

- f est diagonalisable sur \mathbb{R}
- toutes ses valeurs propres sont réelles
- ses sous espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux

ie : f se diagonalise dans \mathbb{R} sur une base orthonormale

Théorème

Soit M une matrice carrée symétrique réelle. Il existe :

- D une matrice diagonale à coefficients réels
- P une matrice orthogonale (ie de changement de base orthonormale)

telles que : $M = P \cdot D \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^t$

notion de scalaire

propriété fondamentale sur les tenseurs

Un tenseur d'ordre n est un objet mathématique (décrivant en général des quantités physiques) qui s'écrit dans différentes bases grâce à une formule de changement de base. exemple : $X = P \cdot \tilde{X}$, $\tilde{M} = P^{-1} \cdot M \cdot P$.

\tilde{X} et X représentent le même tenseur d'ordre 1 et \tilde{M} et M le même tenseur d'ordre 2. Mais les valeurs de leur composantes respectives sont différentes lorsqu'elles sont exprimées dans des bases différentes.

Définition

Un scalaire est un tenseur d'ordre 0. De ce fait un scalaire est invariant par changement de base.

exemples : la température, la pression, l'humidité relative ...

contre exemple : une composante d'un vecteur ou d'un tenseur

notion d'invariants d'une matrice de rang 3

Un *invariant* est une fonction scalaire d'un tenseur qui ne dépend pas de la base considérée. $\triangle!$ Il n'existe pas " les invariants" mais des familles d'invariants. Les plus utilisés sont :

- ceux relatifs au théorème de Cayley-Hamilton (coefficients du polynôme caractéristique)

$$\det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3$$

- $\hat{I}_1 = \text{trace}(\mathbf{M})$
- $\hat{I}_2 = \frac{1}{2} (\text{trace}(\mathbf{M})^2 - \text{trace}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}))$
- $\hat{I}_3 = \det(\mathbf{M})$

- ceux relatifs à la décomposition de Rivlin-Ericksen

- $\tilde{I}_1 = \text{trace}(\mathbf{M})$
- $\tilde{I}_2 = \frac{1}{2} \text{trace}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M})$
- $\tilde{I}_3 = \frac{1}{3} \text{trace}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{M})$

signification physique du premier invariant

■ expression :

$$\begin{cases} I_{1\sigma} = \text{tr}(\sigma) = \sigma_{kk} = 3 \cdot p \text{ (pression ou contrainte moyenne)} \\ I_{1\varepsilon} = \text{tr}(\varepsilon) = \varepsilon_{kk} = \frac{\Delta V}{V_0} \text{ (en petites déformations)} \end{cases}$$

■ représentation graphique :

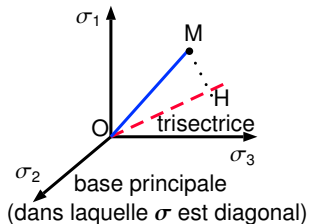


FIGURE – représentation graphique du tenseur de contraintes dans sa base principale

■ montrer que $OH = \frac{I_{1\sigma}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}p$

signification physique du second invariant I

- tenseur déviatorique :

$$\begin{cases} \mathbf{s}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_{1\sigma}}{3} \delta_{ij} \\ \mathbf{e}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{I_{1\varepsilon}}{3} \delta_{ij} \end{cases}$$

remarque : $\mathbf{s}_{kk} = \mathbf{e}_{kk} = 0$

ces tenseurs représentent uniquement les parties *cisaillement* des tenseurs de contrainte et déformation respectivement.

- expression :

$$\begin{cases} J_{2s} = \text{tr}(\mathbf{s}^2) = s_{ij}s_{ij} \\ J_{2e} = \text{tr}(\mathbf{e}^2) = e_{ij}e_{ij} \end{cases}$$

signification physique du second invariant II

- représentation graphique :

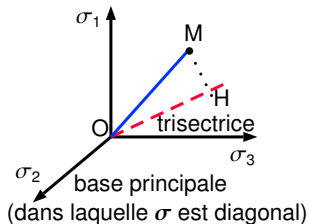


FIGURE – représentation graphique du tenseur de contraintes dans sa base principale

- montrer que $\sqrt{J_{2s}} = HM$

signification physique du troisième invariant I

Définition

On appelle plan déviatoire le plan \perp à la trisectrice passant par M considéré dans l'espace des contraintes principales.

Définition

On appelle angle de Lode l'angle formé par la projection dans le plan déviatoire de l'axe 1 et le vecteur \overrightarrow{HM}

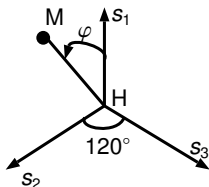


FIGURE – représentation graphique de l'angle de Lode

signification physique du troisième invariant II

- expression :

$$\begin{cases} J_{3s} = \text{tr}(\mathbf{s}^3) = s_{ij}s_{jk}s_{ki} \\ J_{3e} = \text{tr}(\mathbf{e}^3) = e_{ij}e_{jk}e_{kj} \end{cases}$$

- on montre que :

$$\cos(3\varphi_{\sigma}) = \frac{\sqrt{6}J_{3s}}{\sqrt{(J_{2s})^3}} \quad \cos(3\varphi_{\varepsilon}) = \frac{\sqrt{6}J_{3e}}{\sqrt{(J_{2e})^3}}$$

conclusion : $z = OH$, $r = MH$ et φ représentent les coordonnées cylindriques du tenseur exprimé dans sa base principale, en prenant comme axe la trisectrice.

démonstration I

(rien que pour vous : je ne l'ai trouvée nul part sur le net!!!)

1 préliminaire : opérateur de projection

Soit Π le sous espace sur lequel on projette, \vec{n} le vecteur unitaire indiquant la direction dans laquelle on projette, \vec{v} le vecteur à projeter, et \vec{v}_p le vecteur projeté.

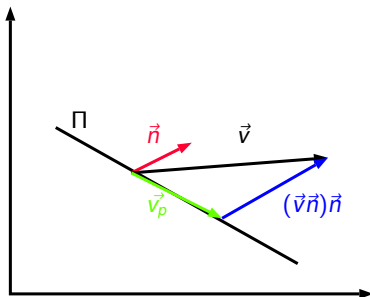


FIGURE – croquis projection

démonstration II

Le vecteur \vec{v}_p s'écrit donc :

$$\vec{v}_p = \vec{v} - (\vec{v}\vec{n})\vec{n} = \vec{v} - (\vec{n} \otimes \vec{n})\vec{v} = \left(\underline{\underline{I}} - \vec{n} \otimes \vec{n} \right) \vec{v}$$

De là on tire la matrice de projection. Dans le cas particulier où :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{1} \\ \frac{\sqrt{3}}{1} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

, on trouve :

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

démonstration III

2 angle de Lode

Soit $\vec{\pi}_1$ le projeté de \vec{e}_1 dans le plan de Rendulic, On a :

$$\vec{\pi}_1 = P\vec{e}_1 = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

et $\vec{\pi}_{1n}$ le projeté normé :

$$\vec{\pi}_{1n} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

Donc :

$$\vec{\pi}_{1n}H\vec{M} = \|H\vec{M}\| \cos \varphi$$

et

$$\cos \varphi = \frac{\vec{\pi}_{1n}H\vec{M}}{\|H\vec{M}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{2S_1 - S_2 - S_3}{\sqrt{J_2}}$$

démonstration IV

or par construction du tenseur déviatorique, on a :

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0 \Rightarrow 2S_1 - S_2 - S_3 = 3S_1$$

donc

$$\cos \varphi = \frac{\pi_{1n} \vec{HM}}{\|\vec{HM}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{S_1}{\sqrt{J_2}}$$

en posant $\beta = \varphi + 120^\circ$ et $\gamma = \varphi + 240^\circ$ on a :

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{S_3}{\sqrt{J_2}} \text{ et } \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{S_2}{\sqrt{J_2}}$$

en utilisant :

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

on a :

$$\begin{aligned} \cos^3(\varphi) + \cos^3(\beta) + \cos^3(\gamma) &= \\ \cos^3(\varphi) + \frac{1}{8} \left(\sqrt{3} \sin \varphi - \cos \varphi \right)^3 - \frac{1}{8} \left(\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi \right)^3 &= \dots \\ &= \frac{3}{4} \left(4 \cos^3(\varphi) - 3 \cos \varphi \right) \end{aligned}$$

démonstration V

or la linéarisation de $\cos^3 x$ donne :

$$\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

d'où

$$\cos^3(\varphi) + \cos^3(\beta) + \cos^3(\gamma) = \frac{3}{4} \cos(3\varphi)$$

d'autre part,

$$\cos^3(\varphi) + \cos^3(\beta) + \cos^3(\gamma) = \frac{27}{6 \sqrt{6} \sqrt{J_2^3}} (S_1^3 + S_2^3 + S_3^3) = \frac{9}{2 \sqrt{6}} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}}$$

d'où le résultat attendu !

$$\cos(3\varphi) = \sqrt{6} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}}$$

rappel : résolution de problème de mécanique de matériaux déformables

eqs générales	matériaux	eqs du problème	solution
conservation	comportement	C.L. et C.I.	
masse énergie qté de mvmt charge électrique ...	élasticité plasticité viscosité $pV = nRT$...	appuis simples bords frottants vitesse imposée ...	RdM méca des fluide thermodynamique méca des sols ...

notion de chemin de sollicitation I

remarque : σ : 6 variables et ε : 6 variables

Définition

chemin de sollicitation : c'est la courbe gradué en temps tracé dans l'espace à 6 dimensions des sollicitations bâti sur les variables imposées par l'expérimentateur sur l'échantillon.

Définition

chemin de réponse : c'est la courbe graduée en temps tracée dans l'espace des réponses bâti sur les variables mesurées par l'expérimentateur.

propriété

soient \vec{s} la sollicitation à 6 composantes et \vec{r} la réponse à 6 composantes. Ces variables doivent être conjuguée vis-à-vis de l'énergie volumique :

$$\vec{s} \cdot \vec{r} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

notion de chemin de sollicitation III

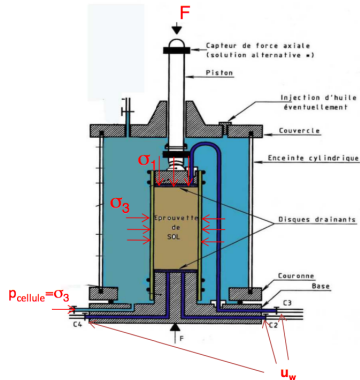


FIGURE – Essais triaxial : 3 grands types de sollicitations : CU, CU+u, UU

notion de chemin de sollicitation IV

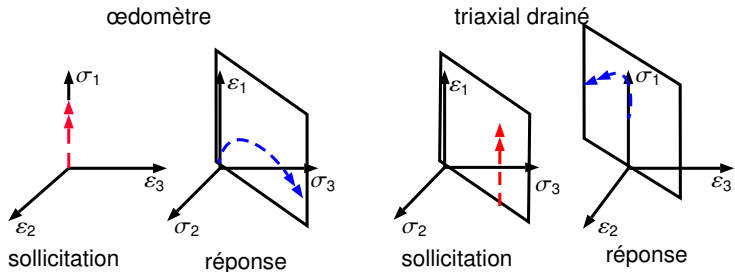


FIGURE – exemples de chemins de sollicitations et de leur chemins de réponse

principe de déterminisme

Si on applique à un échantillon un chemin de sollicitation donné, le chemin de réponse est déterminé unique

écriture incrémentale des lois de comportement

chemin de sollicitation \longrightarrow chemin de réponse

loi de comportement (=fonctionnelle)

fonctionnelle = fonction à qui on associe une autre fonction

ex : transformé de Laplace

- $\sigma(t) = \mathcal{F}_{-\infty < \tau \leq t} [\varepsilon(\tau)] \triangleq \sigma = F(\varepsilon)$ avec F fonction, en élasticité uniquement !
- mais $F(d\sigma, d\varepsilon, dt) = 0$ car écriture fonctionnelle inutilisable en EF. Dans certains cas comme en plasticité on peut être amené à devoir définir plusieurs fonctions F notées F_h en fonction de la direction de chargement par exemple (charge ou décharge,...).

principe de déterminisme incrémental

Si on applique à un échantillon une petite sollicitation pendant dt , la petite réponse est déterminée unique.

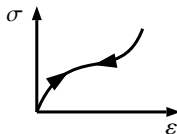
$$F_h(d\sigma, d\varepsilon, dt) = 0$$

élasticité linéaire isotrope I

Définition

Des déformations sont dites élastiques si elles sont entièrement réversibles ie si elles retrouvent leur valeur initiale quand on annule la charge. \Rightarrow relation bijective entre σ et ε .

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{kl})$$



élasticité linéaire isotrope II

Définition

l'élasticité est dite linéaire si cette relation est linéaire.

$$\sigma_{ij} = N_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Définition

une loi de comportement est dite hyperélastique s'il existe un potentiel élastique. On a un potentiel élastique V si

$$\delta W = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = dV$$

avec V fonction d'état.

élasticité linéaire isotrope III

rappel fonction d'état

Une fonction d'état est une fonction des variables d'état qui définissent l'état d'équilibre d'un système thermodynamique. Il ne s'agit là que d'une simple fonction, comme celles que l'on rencontre en mathématique. Sa valeur est calculable à partir de variables d'état : par exemple T, p, V . Une telle fonction possède donc la propriété de ne dépendre que de l'état d'équilibre dans lequel se trouve le système, quel que soit le chemin emprunté par le système pour arriver à cet état. En particulier, au cours d'une transformation entre deux états d'équilibre, la variation d'une fonction d'état ne dépend pas du chemin suivi par le système pendant la transformation, mais uniquement des états d'équilibre initial et final (que la transformation soit réversible ou non !).

élasticité linéaire isotrope IV

propriété fondamentale des fonctions d'état

La différentielle d'une fonction d'état, fonction de plusieurs variables indépendantes, est une différentielle totale exacte. Cela signifie qu'elle est égale à la somme de ses différentielles partielles par rapport à chaque variable.

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) dy$$

Remarque : L'ordre de variation des variables indépendantes x et y n'a aucune incidence sur le résultat. Cela se traduit mathématiquement par le fait que les dérivées secondes croisées de la fonction F par rapport à x et y sont égales.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

élasticité linéaire isotrope V

conclusion : en hyperélasticité on a $\sigma_{ij} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}}$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \Rightarrow N_{ijkl} = N_{klij}$$

remarque : Dans la pratique il vaut toujours mieux utiliser des lois hyperélastiques car on est sûr qu'il n'y aura pas de dissipations internes parasites. Une loi élastique, non hyperélastique est dite hypoélastique.

Définition

comportement isotrope : \mathbf{N} n'est fonction que de deux paramètres indépendants :

- { $\mathbf{N}(E, \nu)$ module d'Young et coefficient de Poisson
- { $\mathbf{N}(\lambda, \mu)$ coefficients de Lamé

élasticité linéaire isotrope VI

loi de Hooke

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \end{cases}$$

exercice : Donner les modules de compressibilités et de cisaillement en fonction des coefficients de Lamé, puis en fonction de E et ν (rappel : $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ avec $i \neq j$). Exprimer enfin les coefficients de Lamé en fonction de E et ν .

interprétation physique

montrer que :

$$E = \left(\frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \right)_{\sigma_{22}=\sigma_{33}=0}$$

$$\nu = - \left(\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \right)_{\sigma_{22}=\sigma_{33}=0}$$

exercice : Donner l'expression du module œdométrique en fonction de E et ν .

élasticité non linéaire isotrope

$$\begin{cases} E \rightarrow E^t(\sigma) \\ \nu \rightarrow \nu^t(\sigma) \end{cases}$$

représentation matricielle : passage d'écriture 3D tensorielle (σ, ε) à " 6D " vectorielle $(\vec{\sigma}, \vec{\varepsilon})$

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E^t} & -\frac{\nu^t}{E^t} & -\frac{\nu^t}{E^t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu^t}{E^t} & \frac{1}{E^t} & -\frac{\nu^t}{E^t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu^t}{E^t} & -\frac{\nu^t}{E^t} & \frac{1}{E^t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu^t}{E^t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu^t}{E^t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu^t}{E^t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ \sqrt{2}d\sigma_{23} \\ \sqrt{2}d\sigma_{31} \\ \sqrt{2}d\sigma_{12} \end{bmatrix}$$

remarque : On a toujours intérêt à faire jouer le même rôle aux σ_{ij} $i \neq j$ et ε_{ij} $i \neq j$ pour le transport de la norme entre les deux représentations.

élasticité non linéaire anisotrope

Définition

l'anisotropie correspond à la variation des propriétés mécaniques d'un matériau en un point avec les directions spatiales. On distingue deux types d'anisotropie :

- " inhérente " : initiale, due à la formation du matériau (ex : composites, béton armé ...)
- " induite " : produite par la déformation du matériaux (ex : compactage des sables ...)

orthotropie I

Définition

symétrie par rapport à un plan \mathcal{P} : On dit qu'une loi de comportement est symétrique par rapport à un plan \mathcal{P} si elle reste invariante dans toute symétrie par rapport à ce plan : si on transforme $d\sigma$ par symétrie par rapport à \mathcal{P} , alors $d\varepsilon$ est transformé par la même symétrie.

exercice : Donner la forme de la matrice d'élasticité tangente pour une loi symétrique par rapport au plan (1, 2). *indication* : on écrira d'abord la matrice de la transformation (symétrie), puis on appliquera cette transformation à $d\sigma$ pour connaître les composantes changées.

Définition

Un milieu est considéré orthotrope s'il possède 3 plans de symétrie orthogonaux. (Une loi de comportement symétrique par rapport à deux plans orthogonaux est symétrique par rapport au dernier plan orthogonal).

exercice : montrer que la loi de comportement possède 12 fonctions indépendantes en hypoélasticité et 9 fonctions indépendantes en hyperélasticité.

orthotropie II

in fine la forme de la loi de comportement dans les axes d'orthotropie est la suivante :

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^t} & -\frac{\nu_{12}^t}{E_2^t} & -\frac{\nu_{13}^t}{E_3^t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}^t}{E_1^t} & \frac{1}{E_2^t} & -\frac{\nu_{23}^t}{E_3^t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{31}^t}{E_1^t} & -\frac{\nu_{32}^t}{E_2^t} & \frac{1}{E_3^t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_1^t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_2^t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_3^t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ \sqrt{2}d\sigma_{23} \\ \sqrt{2}d\sigma_{31} \\ \sqrt{2}d\sigma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F & E & 0 & 0 & 0 \\ F' & B & D & 0 & 0 & 0 \\ E' & D' & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ \sqrt{2}d\sigma_{23} \\ \sqrt{2}d\sigma_{31} \\ \sqrt{2}d\sigma_{12} \end{bmatrix}$$

orthotropie de révolution ou isotropie transverse I

Définition

Une loi de comportement élastique est dite isotrope transverse si elle est invariante par toute rotation autour de l'axe i et symétrique par rapport au plan (j, k) .

on montre que la forme de la loi de comportement invariante autour de l'axe 1 s'écrit :

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & E & E & 0 & 0 & 0 \\ E' & B & D & 0 & 0 & 0 \\ E' & D & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B-D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ \sqrt{2}d\sigma_{23} \\ \sqrt{2}d\sigma_{31} \\ \sqrt{2}d\sigma_{12} \end{bmatrix}$$

orthotropie de révolution ou isotropie transverse II

soit avec les modules de Young et coefficients de Poisson :

$$\begin{bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{31} \\ \sqrt{2}d\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1^t} & -\frac{\nu_{12}^t}{E_2^t} & -\frac{\nu_{12}^t}{E_2^t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}^t}{E_1^t} & \frac{1}{E_2^t} & -\frac{\nu_{22}^t}{E_2^t} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}^t}{E_1^t} & -\frac{\nu_{22}^t}{E_2^t} & \frac{1}{E_2^t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu_{22}^t}{E_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_2^t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_2^t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \\ \sqrt{2}d\sigma_{23} \\ \sqrt{2}d\sigma_{31} \\ \sqrt{2}d\sigma_{12} \end{bmatrix}$$

orthotropie de révolution ou isotropie transverse III

remarque : en faisant jouer le même rôle aux axes 2 et 3 d'une loi orthotrope, on identifie aisément que $B = C$, $E = F$, $D' = D$, $E' = F'$ et $H = I$. Mais pour $2G = B - D$ il est nécessaire de faire l'identification "pénible". Principe : on calcul $\hat{\sigma}$ le transformé de σ par la rotation d'angle θ : $\hat{\sigma} = P^t \sigma P$ avec :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = P_{B \rightarrow \hat{B}} \quad \text{telle que} \quad \vec{\hat{X}} = P_{B \rightarrow \hat{B}} \vec{X}$$

On en déduit la matrice de passage T (6×6) telle que $\vec{\hat{\sigma}} = T \vec{\sigma}$, puis on calcul $\hat{N} = T^{-1} N T$ et on identifie les termes pour que $\hat{N} \equiv N$.

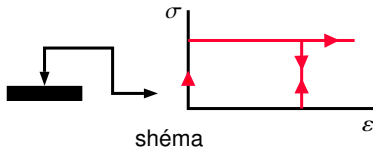
conclusion anisotropie

- une loi isotrope est invariante par toute rotation : les coordonnées de sa matrice sont identiques dans toute base.
- une loi orthotrope est invariante par symétrie suivant trois plans orthogonaux : ⚠ si la base choisie n'est pas orientée suivant les plans d'orthotropie, il faut effectuer un changement de base sur la forme de la matrice présentée.
- une loi isotrope transverse est invariante par rapport à un plan et toute rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. ⚠ si la base choisie ne contient pas l'axe de symétrie de révolution il faut effectuer un changement de base sur la forme de la matrice présentée.

notions élémentaires sur la plasticité I

Définition

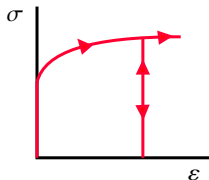
des déformations sont dites plastiques si elles sont irréversibles, permanentes et instantanées. On montre alors qu'elles sont indépendantes des vitesses de sollicitation.



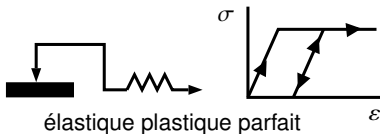
notions élémentaires sur la plasticité II

Définition

On appelle *écrouissage* la variation des propriétés mécaniques du matériau (par ex : seuil de rupture) avec les déformations plastiques

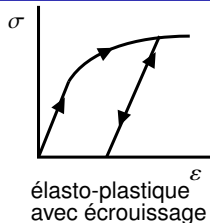


plasticité avec écrouissage



élastique plastique parfait

notions élémentaires sur la plasticité III



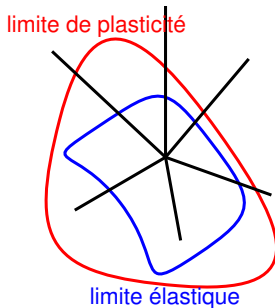
Définition

On appelle critère de plasticité limite (ou critère de rupture) la surface tracée dans l'espace à 6 dimensions des contraintes qui limitent les états de contraintes qui peuvent être atteints par le matériau.

notions élémentaires sur la plasticité IV

Définition

On appelle surface de limite élastique ou surface d'écoulement la surface tracée dans l'espace à 6 dimensions des contraintes qui limite les états de contraintes qui peuvent être atteints par des déformations entièrement réversibles. (Par écoulement la limite élastique se déforme et se déplace à l'intérieur du critère de plasticité).

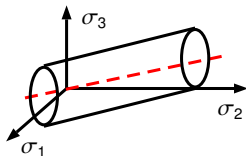


limites classiques I

Von-Mises

Un matériau est réputé se rompre quand le déviateur des contraintes atteint une valeur limite k .

$$J_{2s} - k^2 = 0 \quad \text{ou encore} \quad s_{ij}s_{ij} - k^2 = 0$$



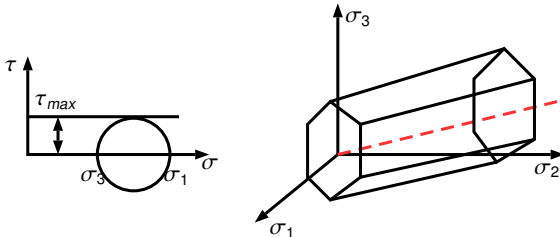
limites classiques II

Tresca

Un matériau est réputé se rompre quand la contrainte tangentielle maximale atteint une valeur limite k .

$$\sigma_1 - \sigma_3 - 2k = 0 \quad \text{avec} \quad \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$$

⚠ les indices ne sont pas associés aux axes



limites classiques III

Mohr-Coulomb

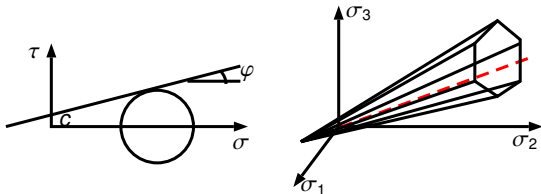
Un matériau est réputé se rompre lorsque la contrainte de cisaillement maximum vérifie le critère :

$$\tau = c + \sigma_n \tan(\varphi) \quad \text{avec} \quad \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$$

soit encore :

$$\sigma_1 = \frac{1 + \sin(\varphi)}{1 - \sin(\varphi)} \sigma_3 + 2c \frac{\cos(\varphi)}{1 - \sin(\varphi)}$$

⚠ les indices ne sont pas associés aux axes



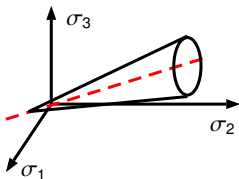
limites classiques IV

Drücker-Prager

Un matériau est réputé se rompre quand l'état de contrainte atteint la limite donnée par un cône circulaire d'axe la trisectrice dans l'espace des contraintes principales.

$$J_{1\sigma} + A \sqrt{J_{2s}} - B = 0$$

A et B sont fonctions de c et φ à déterminer en fonction d'une recherche d'un critère inscrit ou circonscrit à celui de Mohr-Coulomb.



élastoplasticité associée et non associée

Définition

règle d'écoulement : c'est la surface tracée dans l'espace à 6 dimensions des contraintes à laquelle est perpendiculaire le vecteur déformation plastique incrémental (quand ces déformations plastiques apparaissent : ie sur la surface de limite élastique).

Définition

On dit qu'un matériau élastoplastique est associé si la limite élastique et la règle d'écoulement sont confondues. Dans le cas contraire le matériau est dit non associé. (On parle aussi de matériaux standards et non standards et de règle de normalité).

exercice : montrer de manière géométrique qu' un matériau vérifiant le critère de Mohr-Coulomb ou Drücker-Prager associé est dilatant dans le régime plastique.

remarque : Tous les géomatériaux sont non associés. Les métaux vérifient généralement le critère de Tresca ou celui de Von-Mises. De plus on observe qu'ils se déforment à volume constant dans le régime plastique. Montrer alors que la règle d'écoulement est associée.

théorie classique de l'élastoplasticité I

notations

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{variables mémoires : } \vec{\alpha} = \vec{\alpha}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ \text{limite élastique : } f(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\alpha}) = 0 \\ \text{règle d'écoulement : } g(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\alpha}) = 0 \end{array} \right.$$

hypothèses

- hyp.1 : $d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p$
- Hyp.2 : $d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}) d\boldsymbol{\sigma}$ (en élasticité linéaire, \mathbf{H} est constant)
- Hyp.3 : $d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$
 λ est un scalaire à déterminer : cette équation traduit que la déformation plastique est perpendiculaire à la règle d'écoulement.

théorie classique de l'élastoplasticité II

équation de consistance

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \vec{\alpha}) = 0 \Rightarrow f(\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\sigma}, \vec{\alpha} + d\vec{\alpha}) = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{df = 0}$$

montrer que :

$$d\lambda = \frac{-1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : d\boldsymbol{\sigma} \right)$$

avec h appelé module d'écroûissage tel que :

$$h = \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

théorie classique de l'élastoplasticité III

opérateur élasto-plastique

$$d\varepsilon_{ij} = H_{ijkl} d\sigma_{kl} - \frac{a}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \right) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = N_{ijkl} d\sigma_{kl}$$

$$d\varepsilon = \mathbf{H} : d\sigma - \frac{a}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) : d\sigma = \mathbf{N} d\sigma$$

avec :

- $a = 0$ en élasticité, qui se traduit par les relations :

$$\begin{cases} f(\sigma, \vec{\alpha}) < 0 & \text{ou alors} \\ f(\sigma, \vec{\alpha}) = 0 & \text{et } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} < 0 \quad \text{décharge} \end{cases}$$

- $a = 1$ en plasticité, avec les relations :

$$f(\sigma, \vec{\alpha}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} > 0 \quad \text{charge}$$

théorie classique de l'élastoplasticité IV

remarque 1 : dans la pratique on écrit les équations précédentes en fonction de $d\varepsilon_{ij}$ et non de $d\sigma_{ij}$ car en plasticité parfaite, le module d'érouissage h est nul, alors que $d\lambda$ peut être déterminé si $d\varepsilon_{ij}$ est piloté. De plus tous les codes de calcul EF sont formulés en déplacement et non en force.

remarque 2 : *Chemin de chargement neutre*, ou chemin qui suit la surface de limite élastique. Il n'y a pas de problème de continuité car on a dans cette condition $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} = 0$ (qui définit le plan tangent à la surface). $\forall a$, $d\varepsilon$ reste identique.

remarque 3 : dans la pratique il est très rare que l'on fasse dépendre les variables mémoires du tenseur de déformation plastique en entier. De manière classique :

- pour les limites élastiques de Tresca ou Von-Mises, on fait dépendre le seuil élastique k de $\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{e_{ij}^p e_{ij}^p}$
- pour les limites élastiques de Mohr-Coulomb ou Drücker Prager, on fait dépendre les variables du seuil élastique c et φ de $\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{e_{ij}^p e_{ij}^p}$
- pour une limite élastique de type "cap" qui ferme un critère de Mohr-Coulomb ou Drücker Prager, on fait dépendre la contrainte de pré consolidation (contrainte isotrope située sur le seuil élastique) p_c de $\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{e_{ij}^p e_{ij}^p}$

théorie classique de l'élastoplasticité V

exemple de modèles d'écroissements

$$\varphi = \varphi_{ini} + \frac{(\varphi_{lim} - \varphi_{ini}) \varepsilon_{eq}^p}{B_p + \varepsilon_{eq}^p}$$

Le paramètre B_p est une constante de calibration.

Montrer que sur un essai de compression isotrope effectué sur un sol, on peut définir le modèle d'écroissage suivant :

$$p_c = p_{c0} \exp\left(\frac{-\varepsilon_v^p}{\lambda(1 - n_0)}\right)$$

théorie classique de l'élastoplasticité VII

les différents types d'écroûissage élémentaires

- écroûissage cinématique : la limite élastique se déplace en translation à l'intérieur de la limite de plasticité
- écroûissage isotrope : la limite élastique croît de manière homothétique jusqu'à épouser la limite de plasticité
- écroûissage rotationnel : la limite élastique se déplace en rotation à l'intérieur de la limite de plasticité (dans les modèles classiques ce type d'écroûissage n'est pas utilisé)

visco-élasto-plasticité

avertissement

Je serai assez bref sur ce type de comportements car les géomatériaux sont en général très peu visqueux. En présence d'eau (ou autres liquides) on observe une viscosité apparente globale, mais une formulation hydro-mécanique couplée permet une description plus pertinente de la physique mise en jeu, à mon sens. Par exemple, dans un sol saturé, la viscosité est déjà intégrée dans la loi de Darcy : elasto-plasticité pour les squelette granulaire + loi de Darcy non stationnaire pour l'écoulement du fluide + principe de contrainte effective de Terzaghi, permet la description des déformations différées dans le temps.

classes de lois de comportement

Dans la pratique, on distingue deux grandes classes de lois de comportement élasto-visco-plastiques :

$$\begin{cases} d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{instantanée}} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{différée}} \\ d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{réversible}} + d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{irréversible}} \end{cases}$$

déformation instantanée plus différée

$$\begin{cases} d\boldsymbol{\varepsilon}^{inst.} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{élastoplastique} \\ d\boldsymbol{\varepsilon}^{diff.} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{visqueuse} \end{cases}$$

soit

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{ep} + d\boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{N}_h(\mathbf{u})d\boldsymbol{\sigma} + d\boldsymbol{\varepsilon}^v$$

$$\text{avec } \mathbf{u} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{\|d\boldsymbol{\sigma}\|}$$

Si on considère la classe de sollicitation de fluage : $d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$
alors

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{C}dt$$

avec \mathbf{C}_k le tenseur de vitesse de fluage.

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{N}_h(\mathbf{u})d\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{C}dt$$

déformations réversibles plus irréversibles

$$\begin{cases} d\boldsymbol{\varepsilon}^{rev.} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{élastique} \\ d\boldsymbol{\varepsilon}^{irrev.} = d\boldsymbol{\varepsilon}^{visco-plastique} \end{cases}$$

soit

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^{vp}$$

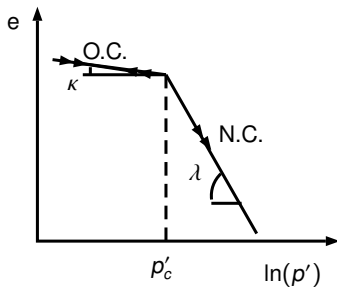
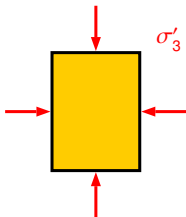
qui s'écrit sous forme très générale :

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma})d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

avec $g = 0$ un potentiel visco-plastique

remarque : \mathbf{H} est constant en élasticité linéaire et non constant en élasticité non linéaire.

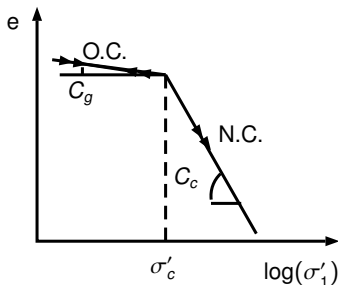
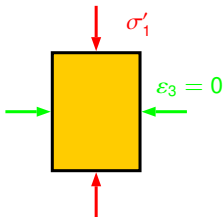
compressibilité isotrope



- $\lambda = -\frac{\Delta e}{\Delta (\ln(p'))}$ en charge vierge isotrope
- $\kappa = -\frac{\Delta e}{\Delta (\ln(p'))}$ en décharge recharge

exercice : montrer que $K^t = \frac{1+e}{\lambda} p'$ en charge vierge.

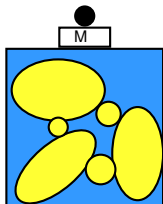
compressibilité œdométrique



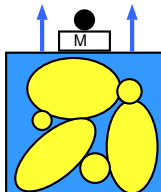
- $C_c = -\frac{\Delta e}{\Delta(\log(\sigma'_1))}$ en charge vierge œdométrique
- $C_g = -\frac{\Delta e}{\Delta(\log(\sigma'_1))}$ en décharge recharge

exercice : montrer que $E_{\text{œd}}^t = \frac{2.3(1+e)}{C_c} \sigma'_1$ en charge vierge.

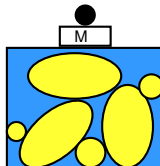
consolidation



état initial



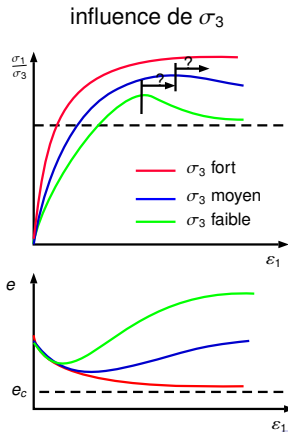
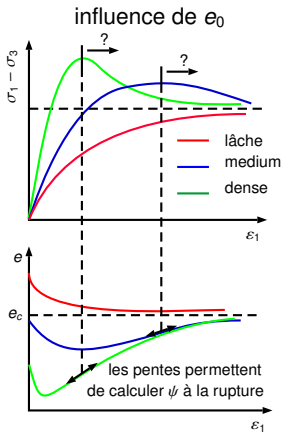
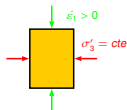
conso primaire

conso secondaire
si grains compressibles

Quelques rappels très succincts sur la consolidation. Vous êtes fortement invités à revoir votre cours de 3GCU, ou des cours élémentaires de mécanique de sols.

- consolidation primaire : c'est le tassement d'un sol dû au drainage de l'eau sous l'effet du gradient de pression interstitielle du fait d'une construction.
Ingrédients pour résoudre un problème de consolidation primaire :
 - modèle élasto-plastique pour le sol
 - loi de Darcy "non stationnaire" ($H = H(t)$)
- consolidation secondaire : c'est la déformation dû squelette granulaire (argileux) au cours du temps sous charge constante.
ingrédients : loi visqueuse pour le sol

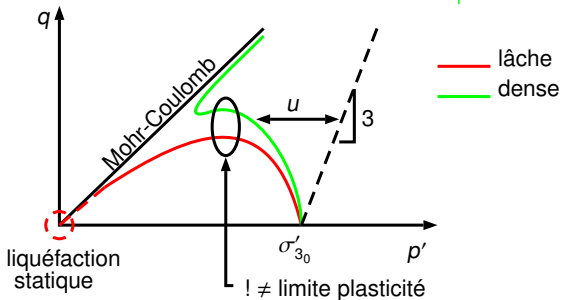
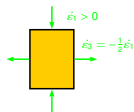
triaxiaux drainés sur sable



triaxiaux consolidés non drainés sur sable

chemin de sollicitation :

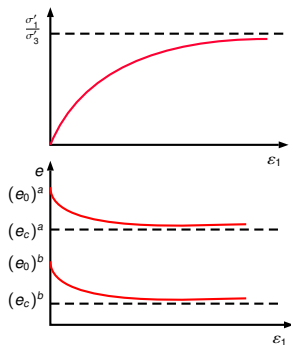
$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 > 0 \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \\ J_{1\varepsilon} = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 = 0 \end{cases}$$



exercice : donner qualitativement le chemin de réponse dans les plans : $(q - \varepsilon_1)$
et $(u - \varepsilon_1)$.

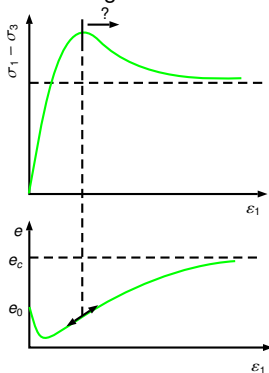
triaxiaux consolidés drainés sur argile I

argile N.C.



$$NC \Rightarrow C = 0$$

argile S.C.



triaxiaux consolidés drainés sur argile II

concept d'état critique

L'indice des vides critique correspond à l'état où le sol se déforme de manière isochore sous une contrainte de cisaillement constante en condition drainée. En toute rigueur, l'état critique est atteint lorsque de plus l'anisotropie du matériaux n'évolue plus. Néanmoins ce dernier point est souvent omis par les auteurs récents.

