

	Chapitre	
Action du sol sur un écran	2	

1 GENERALITES

2 EQUILIBRES LIMITES DE POUSSEE ET BUTEE

2.1 ETAT INITIAL

2.2 MOBILISATIONS DES EQUILIBRES DE POUSSEE ET DE BUTEE

2.1.1 *Equilibre de poussée*

2.1.2 *Equilibre de butée*

2.3 CALCULS DES COEFFICIENTS DE POUSSEE ET DE BUTEE D'UN SOL PESANT

2.3.1 *Théorie de COULOMB*

2.3.2 *Méthode de RANKINE*

2.3.2.1 Cas général

2.3.2.2 Cas particulier : écran vertical, surface libre horizontale

2.3.3 *Méthode de BOUSSINESQ*

CALCULS DES COEFFICIENTS DE POUSSEE ET BUTEE D'UN SOL NON PESANT

2.4.1 *Méthode de RANKINE*

2.4.2 *Equilibre généralisé de Prandtl*

2.5 CALCULS PRATIQUES DES COEFFICIENTS DE POUSSEE ET DE BUTEE

2.6 CALCULS DE LA POUSSEE ET DE LA BUTEE POUR UN SOL FROTTANT ET COHERENT

2.7 CHOIX DE L'ANGLE DE FROTTEMENT SOL-ECRAN δ

2.8 CALCULS DE LA POUSSEE ET DE LA BUTEE POUR UN TALUS DE GEOMETRIE QUELCONQUE

2.8.1 *Cas simples*

2.8.2 *Cas complexes*

2.9 DISPOSITIONS PARTICULIERES DE SURCHARGES

2.10 CAS D'UN MULTICOUCHE

2.11 INFLUENCE DE LA PRESSION INTERSTITIELLE

1 GENERALITES

Tous les ouvrages de soutènement qui doivent résister à la pression latérale des terres nécessitent la détermination de la répartition des contraintes auxquelles ils sont soumis ou qu'ils mobilisent.

Ces ouvrages de soutènement concernent les murs (mur-poids, murs cantilevers, murs cellulaires..) et les écrans (parois moulées, parois berlinoises et dérivées, rideaux de palplanches...).

Suivant le problème traité, on fera un calcul à la rupture (sol dans un comportement rigide-plastique) ou un calcul en déplacement (sol dans un comportement élasto-plastique, ou autre...).

Les méthodes de calcul des murs de soutènement sont du type calcul à la rupture en adoptant une loi de comportement rigide-plastique.

Les méthodes de calcul des écrans sont globalement, actuellement, de trois types :

- sans interaction avec la structure, le sol est considéré à l'état d'équilibre limite. Ces méthodes supposent un comportement rigide-plastique, du sol. Ce sont les plus anciennes, elles s'appliquent assez bien aux calculs des rideaux de palplanches. Elles ont une solution analytique dans les cas simples.
- avec interaction avec la paroi et les tirants ou butons. Le sol est alors modélisé, à l'interface du sol et de l'écran par des ressorts et des patins (méthodes aux coefficients de réaction). Cette méthode a été particulièrement développée en France, parallèlement au pressiomètre. Elle est encore beaucoup utilisée pour le calcul des parois, mais nécessite l'emploi d'un logiciel et d'un micro-ordinateur.
- La méthode des éléments finis permet d'étudier la paroi comme une partie de l'ensemble constitué par le sol, la paroi et les tirants d'ancrage ou les butons. Si le problème est bien résolu mathématiquement, l'état des connaissances est moins avancé concernant les lois de comportement du sol et surtout les éléments d'interface entre les tirants d'ancrage et le sol. Le calcul est généralement effectué en déformation plane, ce qui suppose de trouver une équivalence entre les nappes de tirants et des plaques continues. Cette méthode complète est de plus en plus utilisée dans les grands projets. Elle nécessite évidemment l'emploi d'un micro-ordinateur. Le calage des paramètres des lois de comportement nécessite encore un étalonnage à partir des retours de chantier (mesures de déplacement et de sollicitations dans les ouvrages).

2 EQUILIBRES LIMITES DE POUSSEE ET BUTEE

On détermine les actions du sol sur un écran quand le sol est à la rupture. Suivant les déplacements relatifs entre le sol et l'écran, le sol se trouvera en équilibre de poussée (état actif) ou de butée (état passif).

2.1 Etat initial

Avant de subir des déplacements le sol se trouve dans un état initial qui dépend de son histoire géologique. On nomme cet état : poussée des terres au repos (sans déplacement). Pour le définir, on relie la contrainte effective horizontale à la contrainte effective verticale par le coefficient des terres au repos K_0 (Fig.1).

$$\sigma'_{h_0} = K_0 \sigma'_{v_0} \quad (1)$$

La valeur de K_0 , *délicate à mesurer*, peut être obtenue à l'appareil triaxial au laboratoire et au pressiomètre ou au dilatomètre (Marchetti) sur le chantier.

La détermination de cette valeur est très importante puisqu'elle conditionne le calcul des écrans, des tunnels. A défaut de mesure du coefficient K_0 on peut l'estimer. Si le sol avait un comportement élastique

linéaire, K_0 serait égal à $K_0 = \frac{\nu}{1-\nu}$. Cette valeur théorique s'éloigne trop de la réalité pour être utilisée

pratiquement.

Pour les sols pulvérulents et les sols fins **normalement consolidés** on pourra utiliser la formule simplifiée de **JAKY** : $K_0 = 1 - \sin \phi'$, si le terre-plein est horizontal.

S'il existe un talus de pente β , la valeur du coefficient des terres au repos, avec la même définition sera $K_{0\beta} = K_0(1 + \sin \beta)$.

Par rapport aux sols normalement consolidés la valeur de K_o augmente pour les sols surconsolidés, d'autant plus que le coefficient de surconsolidation R_{oc} est important.
On pourra utiliser la relation suivante :

$$K_o = (1 - \sin \varphi') R_{oc}^{1/2} \quad (2)$$

pour un sol moyennement surconsolidé avec $R_{oc} = \sigma'_p / \sigma'_{vo}$

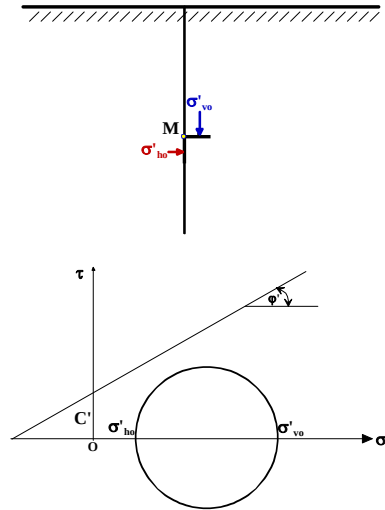


Fig.1 Etat initial du sol au repos (sans talus, $\beta=0$)

2.2 Mobilisations des équilibres de poussée et de butée

Pour qu'il y ait équilibre de poussée ou de butée, il faut qu'il y ait déplacements (Fig.2), grossièrement de l'ordre de $\frac{H}{1000}$ pour mobiliser la poussée et supérieur à $\frac{H}{100}$ pour mobiliser la butée.

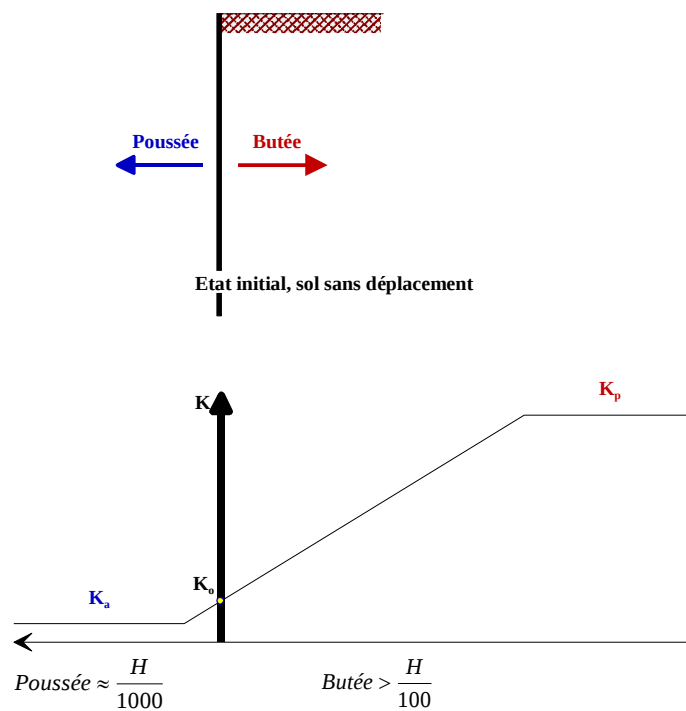


Fig.2 Déplacements nécessaires à la mobilisation des états limites de poussée et butée

2.1.1 Equilibre de poussée

Le sol pousse *sur* l'écran et le met en poussée. Le sol se déplacera jusqu'à ce que la contrainte initiale σ'_{ho} diminue, le sol se décomprime, pour atteindre une valeur limite σ'_a (équilibre actif ou inférieur) inférieure à σ'_{ho} . Par rapport à l'état initial, la contrainte σ'_{vo} étant constante, la contrainte horizontale σ'_{ho} diminue jusqu'à ce que le cercle de Mohr devienne tangent à la droite de Mohr-Coulomb pour une valeur de $\sigma'_h = \sigma'_a$ (Fig.3). Le sol est à l'état de poussée ; la contrainte de poussée est liée à la contrainte verticale σ'_{vo} , dans le cas d'un écran vertical sans frottement sol-écran, par le coefficient de poussée K_a (a comme actif).

$$\sigma'_a = K_a \sigma'_{vo} \quad (3)$$

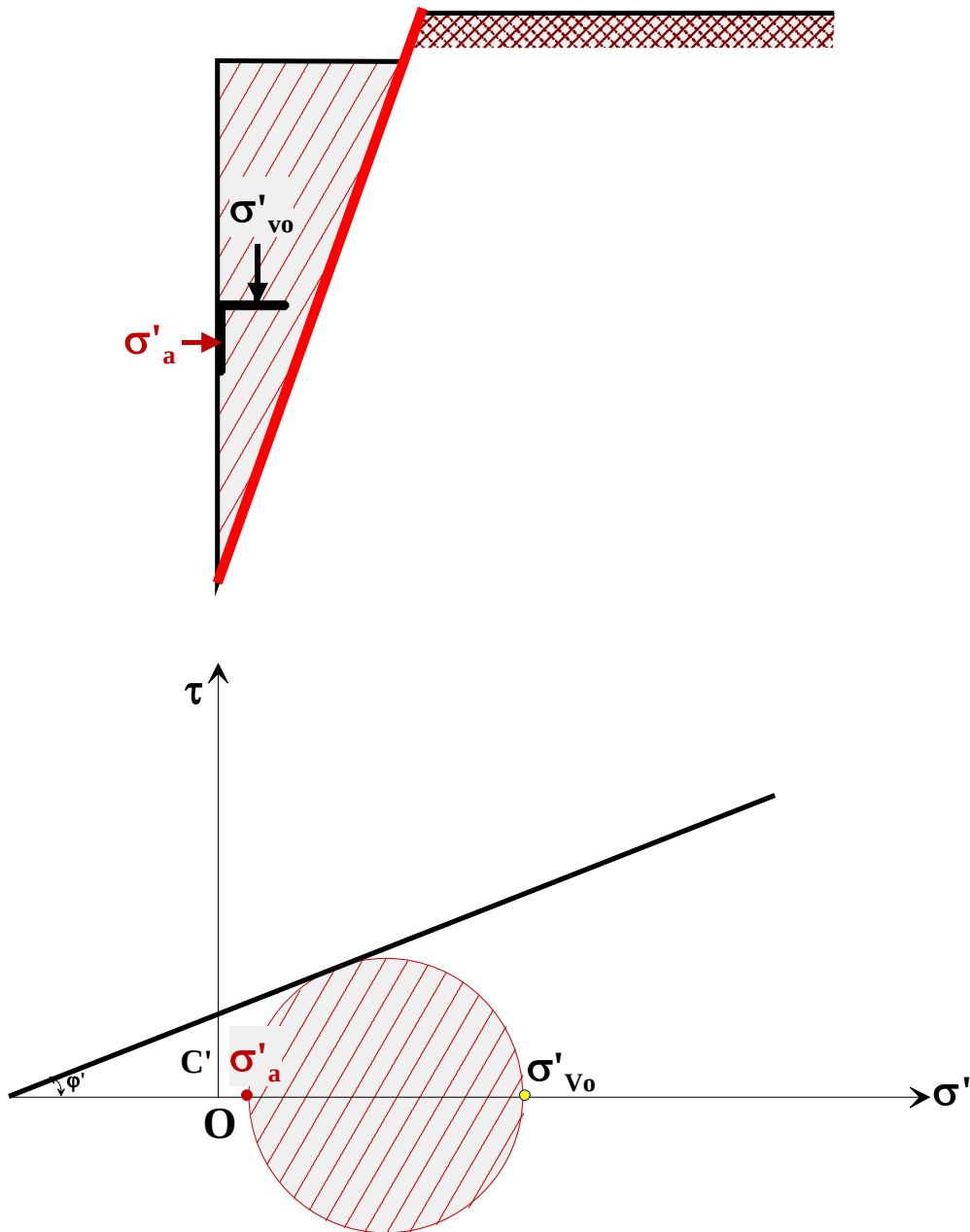


Fig.3 Etat limite de poussée du sol
(sans talus $\beta = 0$, et sans frottement sol-écran $\delta = 0$)

2.1.2 Equilibre de butée

L'**écran** pousse *sur* le **sol** et le met en **butée**. Le sol se déplacera jusqu'à ce que la contrainte initiale σ'_{ho} augmente, le sol se comprime, pour atteindre une valeur limite σ'_p (équilibre **passif** ou supérieur) supérieure à σ'_{ho} . Par rapport à l'état initial, la contrainte σ'_{v0} étant constante, la contrainte horizontale σ'_{ho} augmente jusqu'à ce que le cercle de Mohr devienne tangent à la droite de Mohr-Coulomb pour une valeur de $\sigma'_h = \sigma'_p$ (Fig.4). Le sol est à l'état de butée la contrainte de butée est reliée à la contrainte verticale σ'_{v0} , dans le cas d'un écran vertical sans frottement sol-écran, par le coefficient de butée K_p (**p** comme passif).

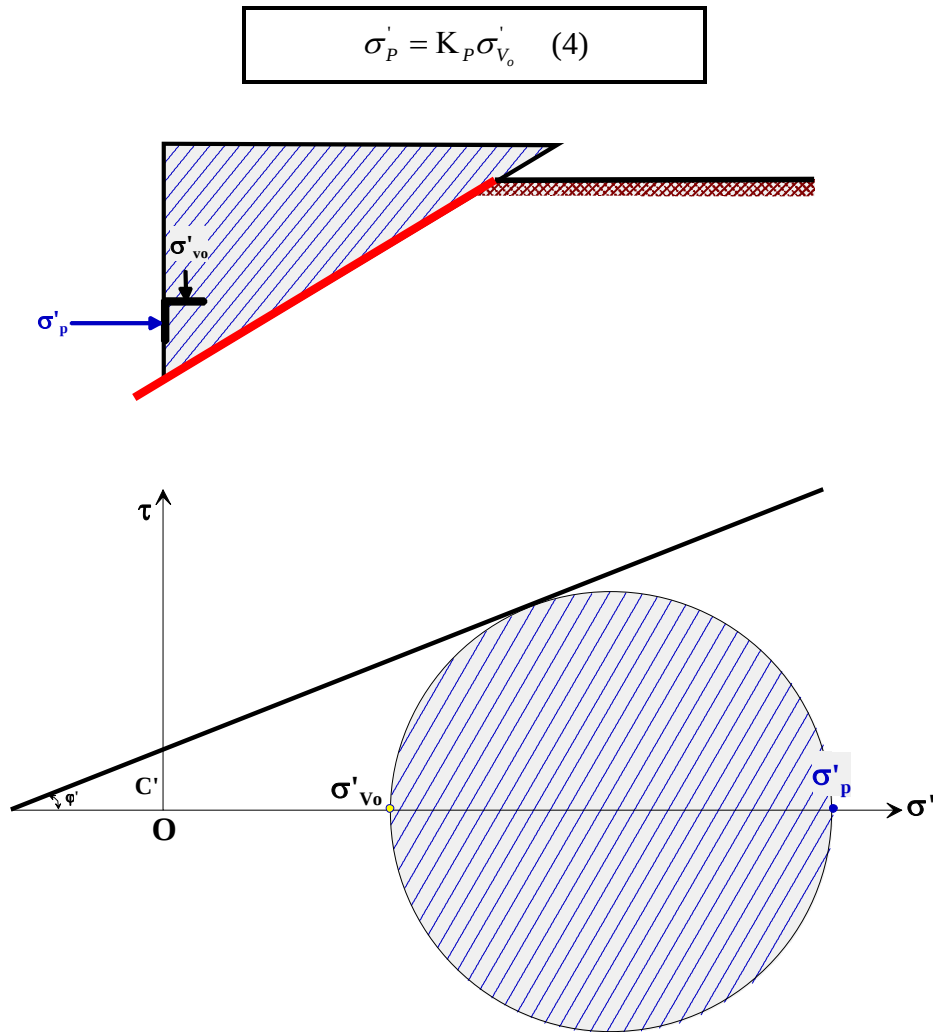


Fig.4 Etat limite de butée du sol
(sans talus $\beta = 0$, et sans frottement sol-écran $\delta = 0$)

2.3 Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

Plusieurs théories permettent de calculer les coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant, c'est à dire du sol lui-même. On mentionne les principales par ordre chronologique. S'agissant de l'action des grains ou particules de terrain les coefficients de poussée et butée s'appliquent aux contraintes effectives. Il est donc indispensable de déterminer les contraintes effectives $\sigma' = \sigma - u$ (Terzaghi) avant de calculer les poussées et butées. La valeur de la pression interstitielle aura été déterminée auparavant, en hydrostatique, en hydrodynamique, en cours de consolidation, suivant les projets.

2.1.3 2.3.1 Théorie de COULOMB

Charles Augustin Coulomb (1736 - 1806) a été d'abord un ingénieur du génie militaire avant de devenir plus tard un physicien encore plus célèbre par ses mémoires sur l'électricité et le magnétisme entre 1785 et 1791.

Son premier ouvrage important fut, en tant que « Lieutenant en Premier du Génie », la construction de 1764 à 1772 à la Martinique du fort Bourbon. A son retour en métropole en 1773 il publie à l'Académie des Sciences un important mémoire de mécanique appliquée intitulé :

Sur une application des règles de Maximis & Minimis à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture. (Par M. COULOMB, Ingénieur du Roi).

Ce mémoire est destiné à déterminer, autant que le mélange du Calcul & de la Physique peut le permettre, l'influence du frottement & de la cohésion, dans quelques problèmes de Statique.

Après avoir expérimenté la résistance des piliers de maçonnerie en pierres, il étudie la pression des terres et des revêtements.

COULOMB suppose que la surface de rupture est plane (coin de Coulomb), mais souligne bien *la simplicité des résultats que donne cette supposition, la facilité de leur application à la pratique, le désir d'être utile & entendu des Artistes, font les raisons qui nous ont décidé.*

Coulomb calcule la poussée P par rapport à un plan quelconque et détermine par les règles de *maximis & de minimis* sa valeur maximum P_a .

Soit un écran vertical soutenant un massif de sol sans cohésion avec un terre-plein horizontal (Fig.5)

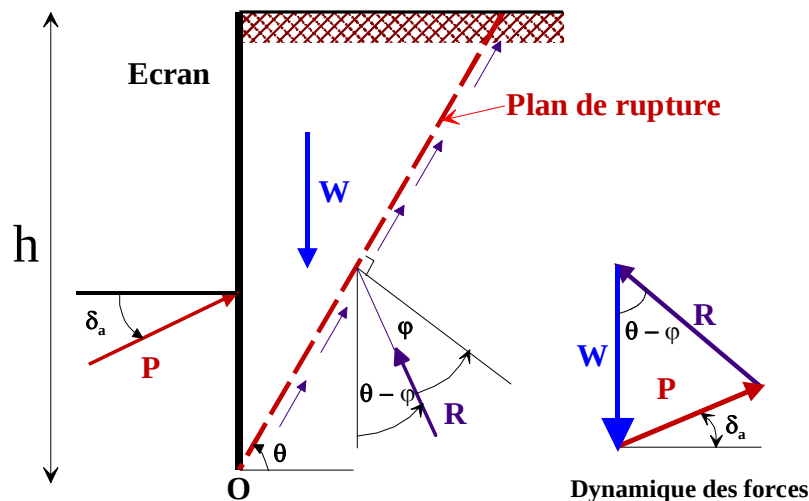


Fig.5 Equilibre du coin de Coulomb

On suppose que la **surface de rupture** potentielle est un **plan (coin de Coulomb)** passant par le pied de l'écran et faisant un angle θ avec l'horizontale.

On fait l'hypothèse que la contrainte de cisaillement $\tau = \sigma' \tan \phi'$ est complètement mobilisée le long de ce plan. Le coin de Coulomb se comporte de façon rigide-plastique, ce qui n'est pas le cas généralement surtout si l'écran est de grande hauteur.

La réaction totale du sol $\vec{R}$ sur lequel frotte le coin de Coulomb est donc inclinée de l'angle ϕ' sur la normale au plan de rupture.

Le principe consiste simplement à écrire l'équilibre des forces en présence $\vec{R}$, $\vec{W}$ et $\vec{P}$; $\vec{W}$ étant le poids du mur et $\vec{P}$ la poussée du sol inclinée de δ_a sur la normale à l'écran (Fig.5).

On détermine ainsi $\vec{P}$ en fonction de l'angle θ . La méthode de Coulomb consiste à prendre le maximum de $P(\theta)$ (Maximis) pour calculer la poussée $\vec{P}_a$, ce serait le contraire pour la butée (Minimis).

En application de la méthode de Coulomb, on calcule la poussée en supposant, pour cette démonstration, que $\delta_a = 0$.

$$P = W \frac{\sin(\theta - \phi)}{\cos(\theta - \phi)} = W \tan(\theta - \phi)$$

$$P = \frac{1}{2} \gamma h^2 \cot \theta \operatorname{tg}(\theta - \varphi)$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{2} \gamma h^2 \left[-\frac{\operatorname{tg}(\theta - \varphi)}{\sin^2 \theta} + \frac{\cot \theta}{\cos^2(\theta - \varphi)} \right]$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{4} \gamma h^2 \left[\frac{\sin 2\theta - \sin 2(\theta - \varphi)}{\sin^2 \theta \cos^2(\theta - \varphi)} \right] = 0$$

$\sin 2\theta - \sin 2(\theta - \varphi)$ s'annule pour

$$\theta_a = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \quad (5)$$

d'où

$$K_a = \cot g \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (6)$$

et

$$P_a = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \times \gamma \frac{h^2}{2} \quad (7)$$

Poncelet a généralisé la méthode de Coulomb à un écran incliné de λ et à un sol surmonté d'un talus d'angle β (Fig.6). Par la même procédure, on détermine le coefficient de poussée K_a .

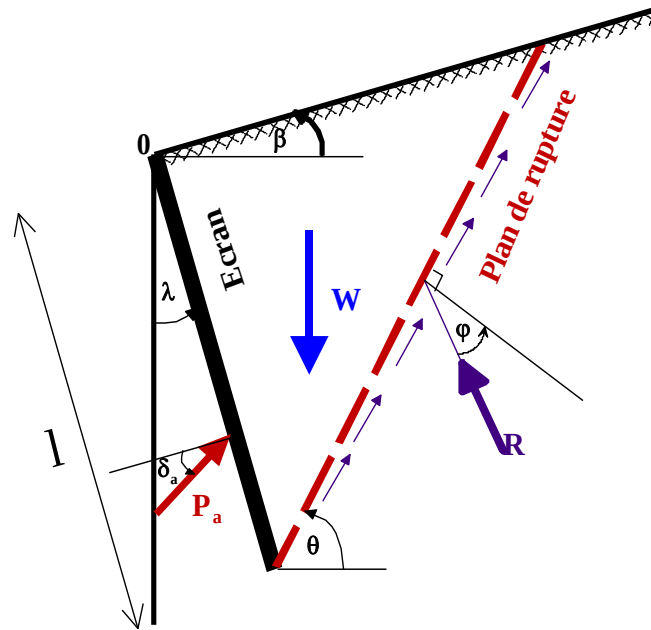


Fig.6 Equilibre d'un coin quelconque

avec δ , λ et β positifs dans le sens trigonométrique.

$$K_a = \frac{\cos^2(\varphi - \lambda)}{\cos(\lambda + \delta_a) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta_a) \sin(\varphi - \beta)}{\cos(\lambda + \delta_a) \cos(\beta - \lambda)}} \right]^2} \quad (8)$$

$$P_a = \frac{1}{2} K_a \times \gamma \times l^2 \quad (9)$$

$$\theta_a = \varphi + \operatorname{arccot} g \left[\operatorname{tg}(\varphi - \lambda) + \frac{1}{\cos(\varphi - \lambda)} \sqrt{\frac{\sin(\delta_a + \varphi) \cos(\beta - \lambda)}{\sin(\varphi - \beta) \cos(\delta_a + \lambda)}} \right] \quad (10)$$

La méthode de Coulomb, qui suppose des plans de rupture, n'est **pas applicable dans le cas de la butée** pour laquelle les surfaces de rupture ne peuvent être assimilées à des plans.

La méthode de Coulomb donne des résultats acceptables pour le calcul de la poussée de sols sans cohésion, spécialement si δ , λ et β sont positifs. Par contre elle n'indique pas la répartition des contraintes le long de l'écran.

2.1.4 2.3.2 Méthode de RANKINE

En plus des hypothèses suivantes :

- sol semi-infini, homogène, isotrope,
- condition de déformation plane,
- critère de rupture de MOHR-COULOMB
- massif à surface libre plane,

RANKINE (1857) avait rajouté l'hypothèse que la présence d'un écran ne modifie pas la répartition des contraintes dans le massif.

2.3.2.1 Cas général

Avec cette hypothèse, on peut déterminer la répartition des contraintes de poussée (ou de butée) le long d'un plan OD représentant l'écran, dans le cas d'un sol pesant pulvérulent ($\gamma', \varphi', c' = 0$), non surchargé.

Le calcul de la contrainte p à une profondeur z sur le plan OD s'effectue à partir du cercle de MOHR, le plus petit pour l'équilibre de poussée, passant par l'extrémité M du vecteur contrainte qui s'exerce sur la facette parallèle à la surface libre et tangent aux droites intrinsèques de COULOMB ($\tau = \sigma' \operatorname{tg} \varphi'$). L'équilibre de butée s'étudierait à partir du cercle de MOHR, le plus grand pour l'équilibre de butée, passant par le même point M et tangent également aux droites intrinsèques de COULOMB (Fig.7) :

- OM est le vecteur contrainte $\gamma' z \cdot \cos \beta$ s'exerçant sur la facette parallèle à la surface libre, à une profondeur z .
- OM' est le vecteur contrainte p^* s'exerçant sur la facette verticale à la même profondeur z . Ces deux contraintes sont conjuguées.
- ON est le vecteur contrainte p s'exerçant sur la facette inclinée de λ à la même profondeur z .

L'inconvénient de la théorie de RANKINE est que l'angle δ de la contrainte de poussée avec la normale à l'écran dépend des conditions géométriques mais n'a pas la réalité physique d'un angle de frottement sol-écran.

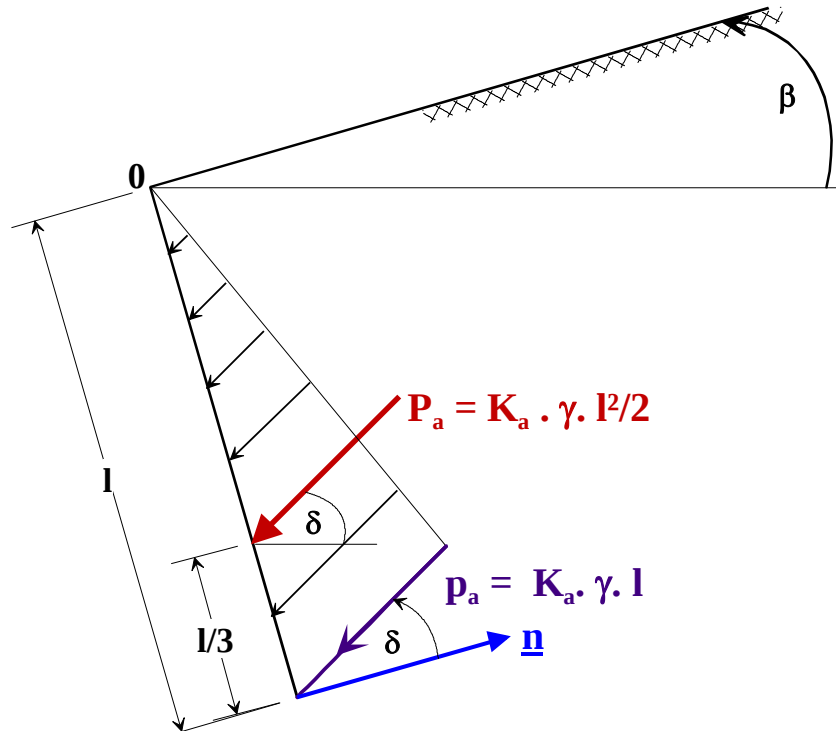


Fig.8 Diagramme de poussée sur l'écran l

La répartition des contraintes de poussée sur l'écran est donc linéaire en fonction de l ; cette répartition triangulaire donne directement la force de poussée.

$$P_a = K_a \times \gamma \times \frac{l^2}{2} \quad (13)$$

dont le point d'application est situé au $l/3$ à partir de la base de l'écran.

2.3.2.2 Cas particulier : écran vertical, surface libre horizontale

Ce cas particulier, mais très fréquent, est beaucoup plus simple à traiter et des calculs rapides permettent de déterminer les coefficients de poussée K_a et de butée K_p .

Les hypothèses sont les suivantes :

$\lambda = \beta = \delta_a = 0$ (pas de frottement sol-écran)

$\varphi' \neq 0$

$c' = 0$

Au repos, au point M (σ'_{v0} , σ'_{h0}), la contrainte verticale $\sigma'_{v0} = \gamma' h$ et la contrainte horizontale $\sigma'_{h0} = K_0 \gamma' h$ sont principales. Le tracé du cercle de MOHR est donc immédiat.

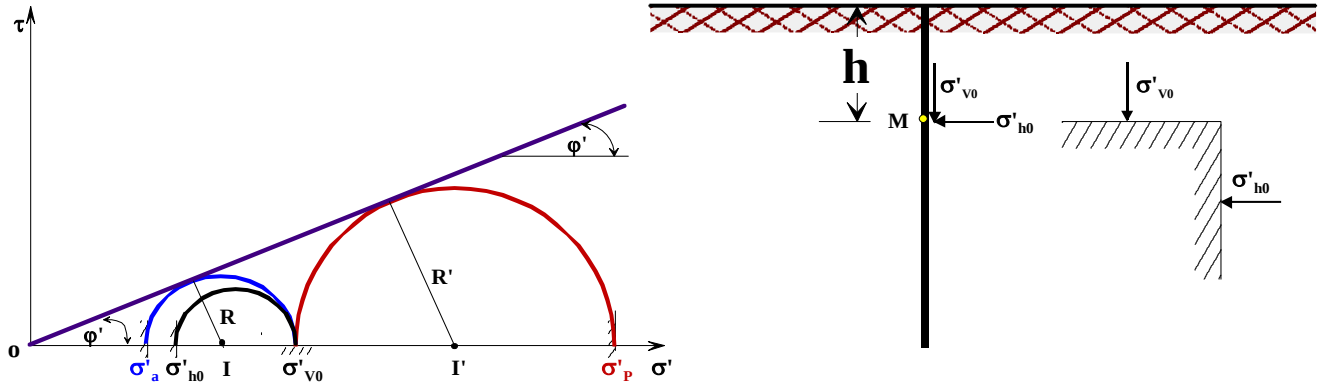


Fig.9 Cercles de Mohr de poussée et butée pour un sol purement frottant avec $\lambda = \beta = \delta_a = 0$

Dans le cas de la poussée, la contrainte σ'_{h0} va diminuer jusqu'à ce que le cercle de MOHR tangente la droite intrinsèque de MOHR-COULOMB : équilibre plastique inférieur (Fig.9).

Dans le cas de la butée, la contrainte σ'_{h0} va augmenter jusqu'à ce que le cercle de MOHR tangente la droite intrinsèque de MOHR-COULOMB : équilibre plastique supérieur (Fig.9).

Dans le cadre de ces hypothèses: $\lambda = \beta = \delta_a = 0$ (pas de frottement sol-écran), de simples considérations trigonométriques permettent de calculer

$$K_a = \frac{\sigma'_a}{\sigma'_{v0}} \quad \text{et} \quad K_p = \frac{\sigma'_p}{\sigma'_{v0}} \quad (14)$$

Dans le cas du sol seulement frottant (sable, gravier, argile drainée cisailée dans le domaine normalement consolidé)

$R = OI \sin \varphi$

$$\frac{\sigma'_v - \sigma'_a}{2} = \frac{(\sigma'_v + \sigma'_a) \sin \varphi'}{2}$$

$$\sigma'_a = \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \sigma'_{v0}$$

Généralement, on exprime plutôt $K_a = \frac{\sigma'_a}{\sigma'_v}$ en fonction de l'arc moitié $\varphi'/2$.

$$\sigma'_a = \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \sigma'_{v0} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) \sigma'_{v0}, \quad \sigma'_a \text{ est perpendiculaire à l'écran}$$

$$K_a = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) \quad (15)$$

De même

$R' = OI' \sin \varphi$

$$\frac{\sigma'_p - \sigma'_v}{2} = \frac{(\sigma'_p + \sigma'_v) \sin \varphi'}{2}$$

$$\sigma'_p = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} \sigma'_{v0}$$

De même

$$\sigma'_p = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right) \sigma'_{v0}, \quad \sigma'_p \text{ est perpendiculaire à l'écran}$$

$$K_p = \frac{1}{K_a} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right) \quad (16)$$

Cas du sol purement cohérent (argile ou limon saturés non drainés)

Dans ce cas particulier d'études de phase « court terme » d'un projet, on rappelle qu'on travaille à court terme, donc en contraintes totales.

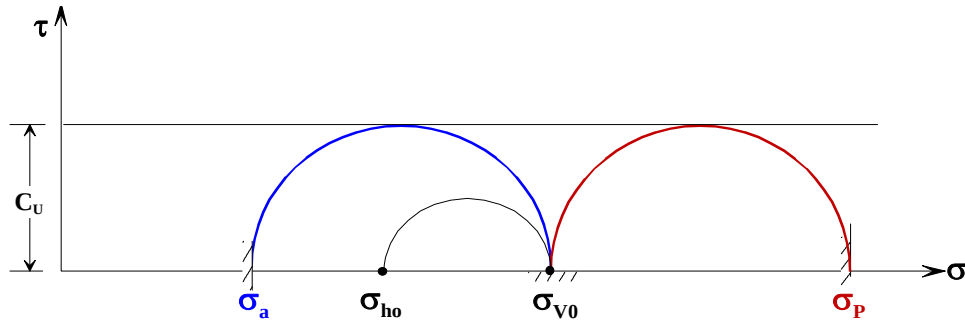


Fig.10 Cercles de Mohr de poussée et butée pour un sol purement cohérent

Les résultats sont immédiats (Fig.10) :

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sigma_v - 2C_u & \sigma_a \text{ peut être négatif} \\ \sigma_p &= \sigma_v + 2C_u \end{aligned} \quad (17)$$

Cas du sol frottant et cohérent (sols argileux ou limoneux non saturés à court terme, ou sol argileux ou limoneux saturés cisailés dans le domaine surconsolidé)

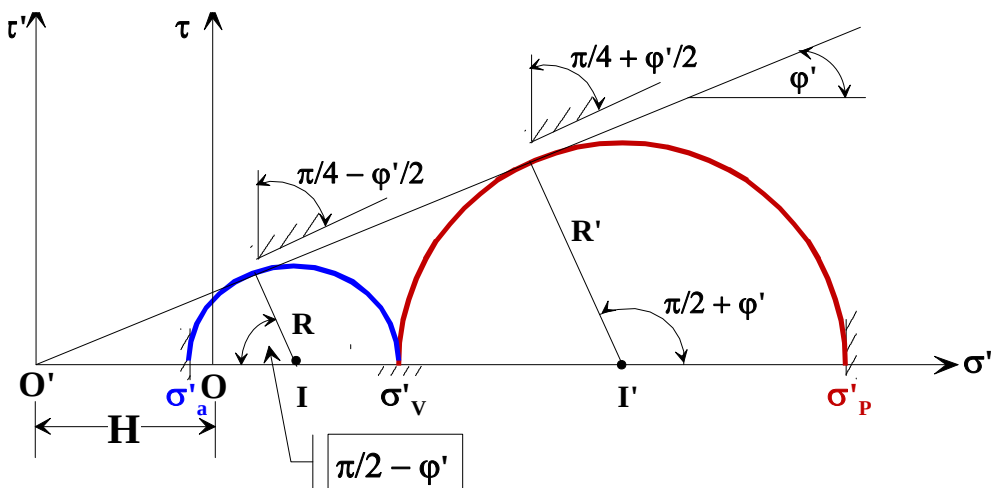


Fig.11 Cercles de Mohr de poussée et butée pour un sol cohérent et frottant

On peut réécrire les mêmes relations dans ce cas général (Fig.11)

$$R = O'I \sin \varphi'$$

On est ramené au cas du sol frottant si on rajoute une contrainte hydrostatique

$$O'O = \frac{c'}{\operatorname{tg} \varphi'} : \text{théorème des états correspondants de CAQUOT (cf.2.6)}$$

Directement

$$\frac{\sigma'_{v0} - \sigma'_a}{2} = \left(\frac{2c'}{2\operatorname{tg} \varphi'} + \frac{\sigma'_{v0} + \sigma'_a}{2} \right) \sin \varphi'$$

$$\sigma'_a = \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \sigma'_{v0} - 2c' \frac{\cos \varphi'}{1 + \sin \varphi'} \quad (18)$$

ou

$$\sigma'_a = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) \sigma'_{v0} - 2c' \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right)$$

$$\sigma'_a = K_a \sigma'_{v0} - 2c' \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right)$$

Par CAQUOT

$$\frac{\sigma'_a + H}{\sigma'_v + H} = K_a$$

$$\text{en posant } H = \frac{c'}{\operatorname{tg} \varphi'}$$

$$\frac{\sigma'_a + H}{\sigma'_{v0} + H} = K_a$$

$$\sigma'_a = K_a \sigma'_{v0} - H(1 - K_a)$$

$$\sigma'_a = K_a \sigma'_{v0} - \frac{c'}{\operatorname{tg} \varphi'} \left[1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) \right]$$

$$\sigma'_a = K_a \sigma'_{v0} - 2c' \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) \quad (19)$$

de même

$$\sigma'_p = K_p \sigma'_v + 2c' \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) \quad (20)$$

En résumé dans **CES HYPOTHESES** ($\lambda = \beta = \delta = 0$)!!!!

	POUSSEE	BUTEE
Sol frottant $\varphi' \neq 0, c' = 0$	$\sigma'_a = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right) \sigma'_{v0}$	$\sigma'_p = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right) \sigma'_{v0}$
Sol cohérent $\varphi_u = 0, c_u \neq 0$	$\sigma_a = \sigma_v - 2C_u$	$\sigma_p = \sigma_v + 2C_u$
Sol frottant et cohérent $\varphi' \neq 0, c' \neq 0$	$\sigma'_a = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right) \sigma'_{v0} - 2c' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right)$	$\sigma'_p = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right) \sigma'_{v0} + 2c' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right)$

Ces différentes formules donnent la répartition des contraintes en fonction de la profondeur. Les tracés des cercles de MOHR permettent de connaître l'allure des lignes de glissement et les coins de poussée et de butée.

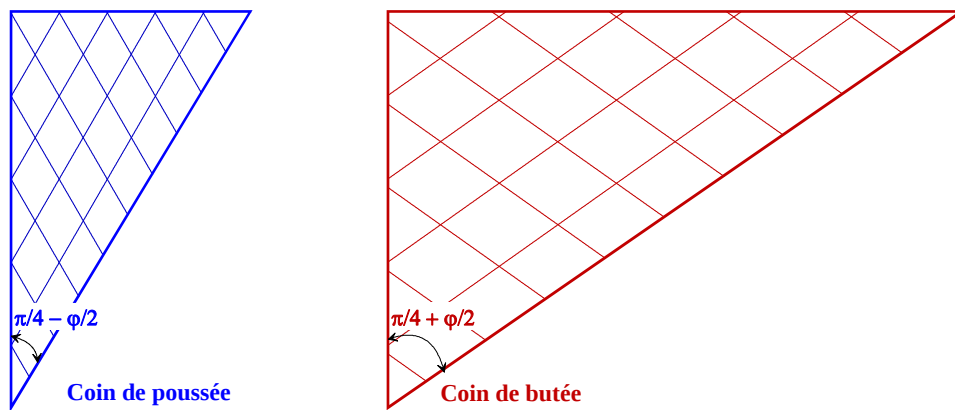


Fig.12 Schémas des coins de poussée et de butée

En effet, la facette sur laquelle se produit l'équilibre de poussée fait (Fig.12)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi' \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \quad (\text{propriété du cercle de Mohr}) \text{ avec la facette verticale.}$$

De même, elle fait $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right)$ pour l'équilibre de butée.

Le coin de butée est beaucoup plus étendu que le coin de poussée.

2.1.5 2.3.3 Méthode de BOUSSINESQ

BOUSSINESQ (1882) a amélioré la théorie de RANKINE en prenant l'interaction réelle entre le sol et l'écran, c'est-à-dire en choisissant la valeur de l'angle de frottement δ sol-écran.

Dans cet équilibre, BOUSSINESQ considère une première zone où on a l'équilibre de RANKINE se raccordant à une seconde zone où il tient compte des conditions aux limites sur l'écran (Fig.13).

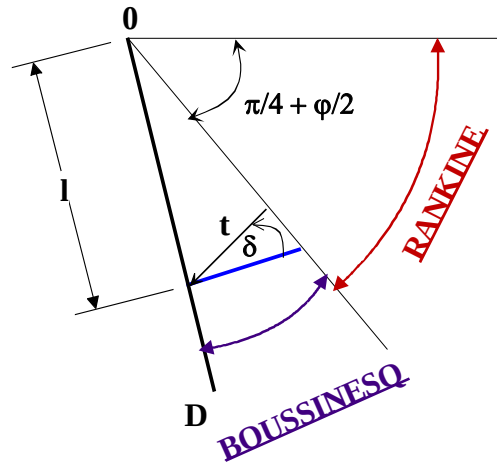


Fig.13 Equilibres de Boussinesq et de Rankine

BOUSSINESQ garde les résultats de RANKINE concernant la répartition des contraintes sur l'écran :

- l'obliquité des contraintes est constante le long de l'écran OD, elle est choisie et fixée à δ_a ;
- la répartition des contraintes sur l'écran est triangulaire :

$$p_a = K_a \times \gamma \times \ell$$

Si BOUSSINESQ avait bien posé le problème, il n'a été résolu qu'en 1948 par **CAQUOT** et **KERISEL** qui en ont donné la démonstration suivante.

On travaillera en coordonnées polaires, pour lesquelles les équations d'équilibre $\text{div} \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{F}} = 0$ s'écrivent :

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{r \partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \gamma \cos \theta$$

$$\frac{\partial \tau_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + 2 \frac{\tau}{r} = -\gamma \sin \theta$$

σ_r : contrainte normale radiale

σ_θ : contrainte normale orthoradiale

τ : contrainte de cisaillement

En combinant les équations d'équilibre précédentes et les relations données par le cercle de Mohr des contraintes tangentes aux droites de Coulomb on établit le système des 2 équations différentielles suivantes :

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 3\tau = -\gamma r \sin \theta$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} + 2(\sigma_r - \sigma_\theta) = -\gamma r \cos \theta$$

avec $\sigma_\theta = k \sigma_r$

Le système des deux équations différentielles a été intégré par Caquot et Kérisel, les calculs étant améliorés par ABSI pour donner des tables complètes de poussée et butée fournissant les coefficients K_a et K_p .

Le problème est déterminé par les conditions aux frontières :

- surface libre : contraintes nulles
- sur l'écran : obliquité imposée δ_a de la contrainte.

Entre la surface libre et la première ligne de glissement on a un équilibre de Rankine et entre la première ligne de glissement et l'écran un équilibre de Boussinesq.

Le tracé des lignes de glissement montre que les lignes de glissement diffèrent peu de lignes droites dans le cas d'équilibre de poussée, par contre elles s'en éloignent fortement dans le cas d'équilibre de butée.

Calculs des coefficients de poussée et butée d'un sol non pesant

Dans ce cas le sol est considéré comme un milieu non pesant à travers lequel se transmettent des contraintes à l'écran.

2.1.6 2.4.1 Méthode de RANKINE

Dans ce cas, la surcharge q_1 , semi-infinie, inclinée de α sur la normale à la surface libre est transmise par le sol considéré non pesant.

Dans le schéma de RANKINE, on a les mêmes hypothèses que pour le problème du sol pesant.

Etant donné que le sol est non pesant et la surcharge répartie semi-infinie, le tenseur des contraintes est le même en tout point du sol. On aura donc un cercle de MOHR unique pour l'ensemble du massif de sol. Il suffit donc de remplacer la direction verticale du poids volumique par la direction de la surcharge q_1 et de traiter le problème comme pour le sol pesant.

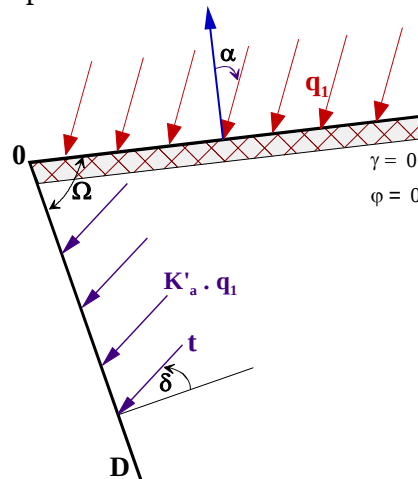


Fig.15 Diagramme de répartition des contraintes de poussée le long de l'écran

On obtient les résultats principaux suivants :

- les lignes de glissement, enveloppes des facettes de glissement forment un réseau de droites faisant entre elles un angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$
- le long du plan OD (écran fictif), la contrainte p a une *obliquité* δ_a (de calcul) *constante* et a une *intensité constante*.

2.1.7 2.4.2 Equilibre généralisé de Prandtl

Comme dans le cas du sol pesant, on ne peut pas se contenter des hypothèses de RANKINE. On fixe la valeur δ_a du frottement sol-écran et en gardant les résultats de RANKINE concernant la répartition des contraintes sur l'écran :

- l'obliquité δ_a des contraintes est constante le long d'un rayon polaire ;
- la répartition des contraintes est rectangulaire

$$p_a = K'_a \times q_1$$

Comme dans le cas du sol pesant, on établit les deux équations de l'équilibre en coordonnées polaires

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau}{r} = 0$$

Sur l'écran on aura : $\sigma_\theta = K'_a q_1$

K'_a dépend des 4 angles : $(\beta - \lambda)$, φ , δ , α

On montre que pour satisfaire les équations d'équilibre, il faut juxtaposer des zones en équilibre de RANKINE et des zones en équilibre de PRANDTL.

- On démontre pour l'équilibre de poussée que le coefficient de poussée K'_a est égal à :

avec les notations des angles :

$$\mu = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \frac{\alpha + \omega_1}{2} ; \varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{\omega_2 - \delta}{2} ; \Psi = \Omega - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha - \delta + \omega_1 + \omega_2}{2}$$

et

$$\sin \omega_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}$$

$$\sin \omega_2 = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}$$

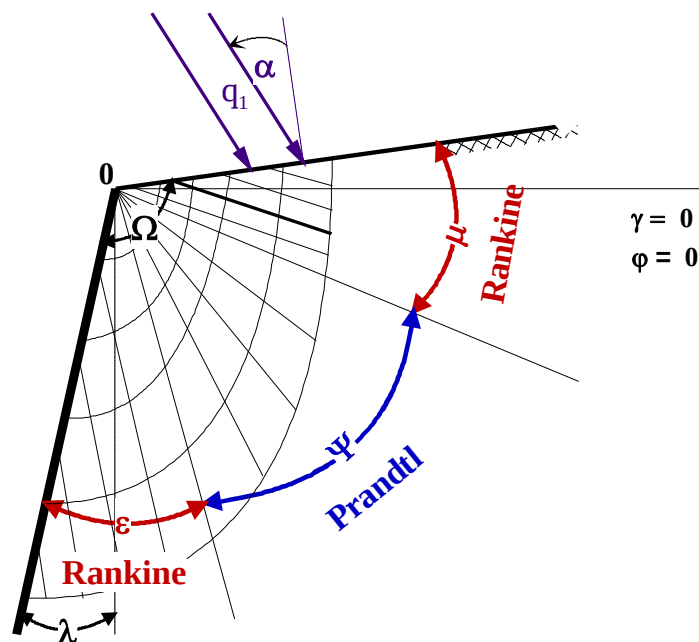


Fig.16 Equilibres de Rankine et de Prandtl

Dans le cas particulier, avec une surface libre horizontale et un écran vertical et $\delta = 0$, on obtient :

$$K'_a = tg^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (22)$$

Ce n'est que dans ce cas particulier fréquent, que les coefficients de poussée (butée) pour le sol pesant et non pesant sont égaux. Dans le cas général, ils diffèrent plus ou moins.

2.5 Calculs pratiques des coefficients de poussée et de butée

Dans le cas général, seules les tables de Caquot, Kérisel et Absi donnent une valeur correcte des coefficients de poussée et de butée.

Les tables donnent les coefficients de poussée et de butée du sol lui-même (pesant) et des surcharges semi-infinies qui se transmettent à travers le massif de sol (milieu non pesant) uniquement pour un sol frottant (sans cohésion) :

avec les notations et conventions de signes

c'	Cohésion effective
c_u	Cohésion non drainée
K_a	Coefficient de poussée d'un massif pesant, avec obliquité δ
K'_a	Coefficient de poussée due à une surcharge, avec obliquité δ
K_p	Coefficient de butée sur un massif pesant, avec obliquité δ
K'_p	Coefficient de butée due à une surcharge, avec obliquité δ
l	Distance d'un point M de l'écran au sommet O
p_a	Contrainte de poussée d'obliquité δ : $p_a = \gamma \cdot K_a \cdot l = t_a$
p_p	Contrainte de butée d'obliquité δ : $p_p = \gamma \cdot K_p \cdot l = t_p$
q	Surcharge uniforme agissant à l'obliquité α
u	Pression interstitielle
α	Obliquité de la surcharge q
β	Inclinaison de la surface libre OA par rapport à l'horizontale
δ	Obliquité de la contrainte de poussée ou de butée par rapport à la normale à l'écran
φ'	Angle de frottement
γ	Poids volumique d'un sol saturé
γ_w	Poids volumique de l'eau
λ	Angle de l'écran OB avec la verticale

Angle que fait la surface libre avec l'écran OB $= \frac{\pi}{2} + \beta - \lambda$

Les orientations positives de α , β et δ sont celles indiquées sur la figure 17.

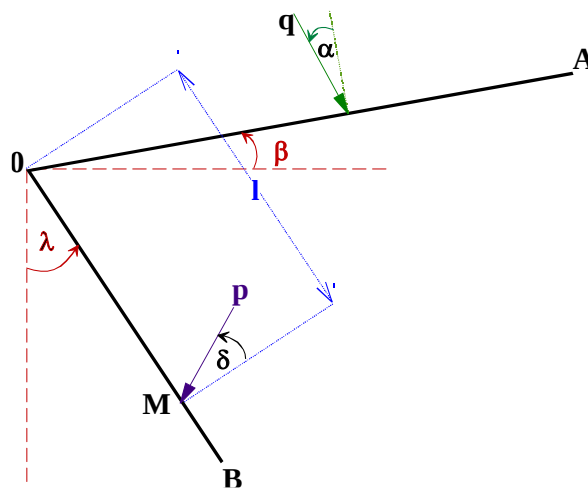


Fig.17 Conventions de signes pour les tables de poussée – butée

La contrainte de poussée p_a agissant sur la paroi à une distance l du sommet O est donnée par :

$$p_a = k_a \times \gamma \times \ell \quad (23)$$

La résultante P_a , pour une tranche d'épaisseur unité, a pour valeur :

$$P_a = \frac{1}{2} K_a \times \ell^2 \quad (24)$$

La figure 18 donne deux exemples des tables de Caquot-Kérisel-Absi pour un sol pesant

$\frac{\beta}{\varphi'} = 0.00 \quad \frac{\delta}{\varphi'} = 0.66$									$\frac{\beta}{\varphi'} = 0.00 \quad \frac{\delta}{\varphi'} = 0.00$								
$\lambda \backslash \varphi$	10	15	20	25	30	35	40	45	$\lambda \backslash \varphi$	10	15	20	25	30	35	40	45
40	0,644								40	0,672							
35	0,669	0,616	0,615						35	0,701	0,645	0,592					
30	0,687	0,619	0,598	0,513	0,473				30	0,722	0,656	0,596	0,541	0,491			
25	0,698	0,619	0,567	0,498	0,450	0,410	0,374		25	0,736	0,660	0,592	0,530	0,473	0,422	0,375	
20	0,702	0,614	0,540	0,478	0,425	0,379	0,340	0,305	20	0,742	0,658	0,582	0,514	0,452	0,396	0,346	0,300
15	0,700	0,602	0,519	0,454	0,396	0,347	0,304	0,267	15	0,742	0,649	0,566	0,492	0,426	0,367	0,315	0,277
10	0,691	0,585	0,499	0,427	0,366	0,314	0,269	0,230	10	0,736	0,634	0,545	0,467	0,398	0,336	0,282	0,235
5	0,676	0,563	0,471	0,396	0,333	0,280	0,235	0,196	5	0,723	0,613	0,520	0,438	0,366	0,304	0,250	0,202
0	0,656	0,537	0,442	0,364	0,300	0,247	0,202	0,163	0	0,704	0,589	0,490	0,406	0,333	0,271	0,217	0,172
-5	0,630	0,506	0,408	0,330	0,266	0,214	0,170	0,134	-5	0,680	0,558	0,458	0,372	0,299	0,238	0,186	0,143
-10	0,600	0,472	0,373	0,295	0,233	0,182	0,141	0,107	-10	0,650	0,525	0,422	0,336	0,265	0,206	0,156	0,116
-15	0,565	0,435	0,336	0,260	0,200	0,152	0,114	0,083	-15	0,616	0,488	0,384	0,300	0,231	0,174	0,128	0,091
-20	0,525	0,396	0,299	0,225	0,168	0,124	0,089	0,062	-20	0,577	0,448	0,345	0,263	0,197	0,144	0,102	0,070
-25	0,483	0,354	0,260	0,190	0,138	0,098	0,067	0,044	-25	0,534	0,406	0,305	0,226	0,164	0,116	0,079	0,060
-30	0,437	0,312	0,222	0,157	0,110	0,074	0,048	0,030	-30	0,488	0,361	0,264	0,190	0,133	0,090	0,058	0,034
-35	0,389	0,268	0,185	0,126	0,084	0,054	0,032	0,017	-35	0,440	0,316	0,224	0,155	0,104	0,066	0,040	0,021
-40	0,339	0,225	0,149	0,097	0,061	0,036	0,019	0,008	-40	0,388	0,269	0,184	0,122	0,077	0,046	0,024	0,010
-45	0,288	0,183	0,115	0,070	0,041	0,022	0,009		-45	0,335	0,223	0,145	0,091	0,053	0,028	0,012	
-50	0,237	0,142	0,084	0,047	0,024	0,010			-50	0,281	0,178	0,109	0,063	0,033	0,014		
-55	0,186	0,104	0,056	0,028	0,011				-55	0,226	0,134	0,075	0,038	0,016			
-60	0,138	0,070	0,033	0,012					-60	0,172	0,093	0,046	0,018				
-65	0,092	0,040	0,014						-65	0,120	0,056	0,021					
-70	0,052	0,016							-70	0,072	0,024						
-75	0,020								-75	0,030							
-80									-80								

Fig.18 Exemple des tables de Caquot-Kérisel-Absi pour un milieu pesant

Les formules donnant les coefficients de poussée ou de butée pour les surcharges transmises par un sol non pesant ont été tabulées par l'HERMINIER et ABSI (Cahiers de la Recherche, n° 16 et 28 - Paris - Eyrolles 1962 et rééditées en 1990) avec les notations des angles définis sur la figure 19.

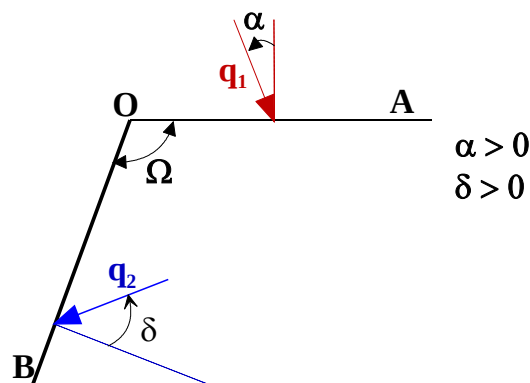


Fig.19 Conventions de signe des tables de poussée – butée d'un sol non pesant

Equilibre de poussée

La surface libre OA du sol est soumise à une surcharge uniformément répartie q_1 d'inclinaison δ . La poussée uniformément répartie q_2 , d'inclinaison δ imposée par le projeteur, qui en résulte a pour valeur

$$q_2 = K'_a q_1$$

Equilibre de butée

Le coefficient de butée est l'inverse du coefficient de poussée.

$$K'_p = \frac{1}{K'_a}$$

La figure 20 donne un exemple des tables de poussée et butée pour un sol non pesant

$$\varphi' = 30^\circ \quad \Omega = 90^\circ$$

$\alpha \backslash \delta$	0	5	10	15	20	25
-20	0,696	0,672	0,658	0,651	0,653	0,663
-10	0,465	0,446	0,434	0,427	0,425	0,429
0	0,333	0,319	0,31	0,305	0,304	0,306
10	0,253	0,243	0,236	0,232	0,231	0,233
20	0,203	0,194	0,189	0,185	0,185	0,186

Fig.20 Exemple des tables de poussée de l'Herminier et Absi
MILIEU NON PESANT
(Surcharge q_1)

2.6 Calculs de la poussée et de la butée pour un sol frottant et cohérent

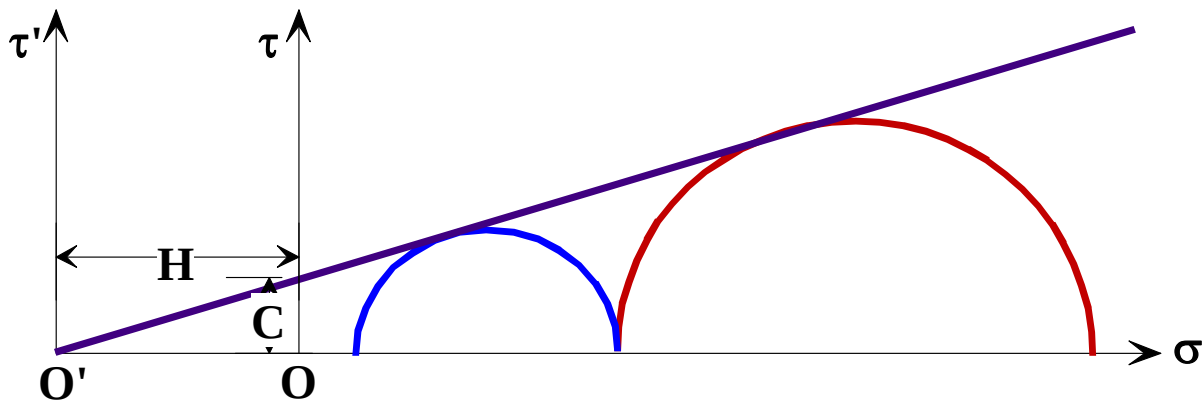


Fig.20 Etats correspondant de Caquot

On appliquera le théorème des états correspondants de CAQUOT en faisant une translation d'axe $OO' = H$ pour se ramener au cas d'un sol frottant auquel on ajoutera tout autour une contrainte hydrostatique H (Fig.20).

$$OO' = H = \frac{c'}{\operatorname{tg} \varphi'} \quad (25)$$

En principe pour le sol frottant, on utilisera K_a (sol pesant) et pour la surcharge H , K'_a (sol non pesant)

La contrainte élémentaire au point M, se détermine en mettant une pression hydrostatique H autour des limites du massif de sol, donc perpendiculaire aux contours. La contrainte de poussée (butée) au point M est la composition vectorielle de (Fig.21) :

- La contrainte de poussée du sol lui-même, $K_a \cdot \gamma \cdot l$, inclinée de δ_a
- La contrainte de poussée de H, $K'_a \cdot H$, inclinée de δ_a , qui agit dans le même sens que la contrainte de poussée du sol
- La pression H, perpendiculaire à l'écran, qui agit en sens contraire des 2 précédentes.

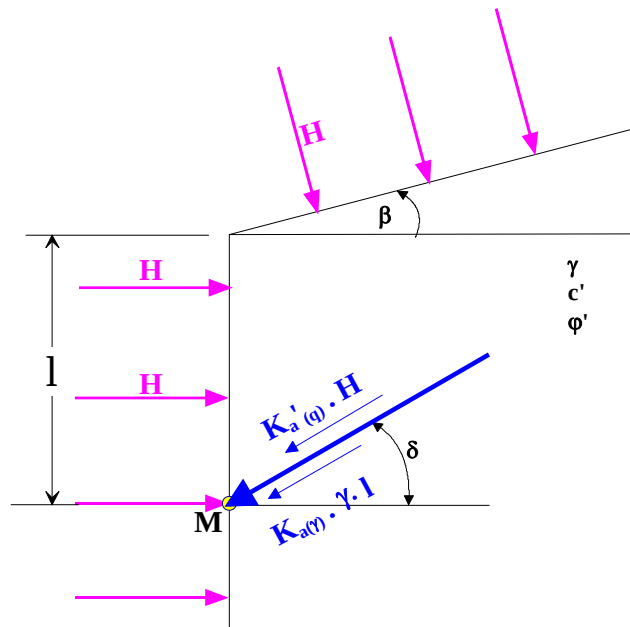


Fig.21 Composition de la contrainte de poussée pour un sol frottant et cohérent

2.7 Choix de l'angle de frottement sol-écran δ

L'angle de frottement entre le sol et l'écran dépend pour sa valeur de la rugosité de l'écran par rapport aux particules de sol et pour son signe du sens du déplacement relatif entre le sol et l'écran. En l'absence de déplacement entre le sol et l'écran $\delta_a = 0$.

Par exemple quand on remblaie derrière un mur de soutènement correctement fondé, c'est le remblai qui tasse par rapport au mur, l'angle δ_a , de poussée, est donc positif, avec le cisaillement τ dirigé vers le bas (Fig.22).

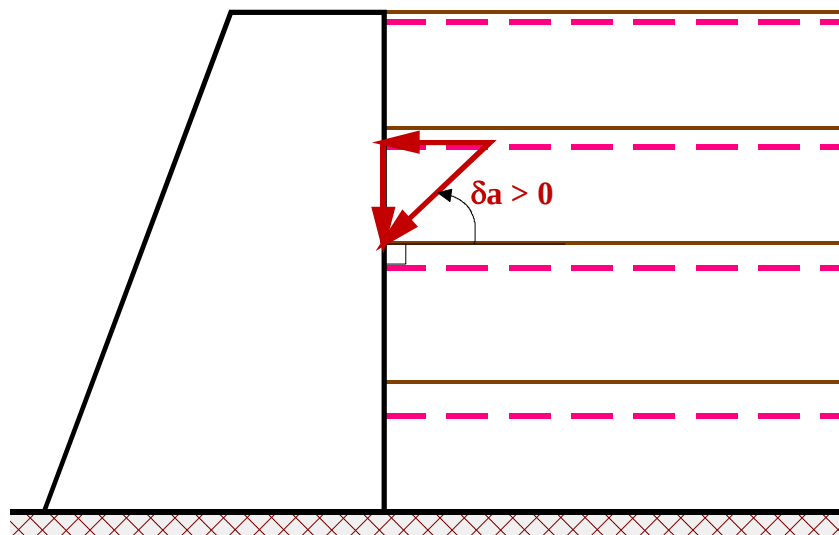


Fig.22 Angle du frottement de poussée entre le sol et le mur

δ_a est évidemment limité par φ' , au maximum il dépassera rarement $+2/3\varphi'$, la valeur $\delta_a = 0$ est sécuritaire. Par contre, quand on déblaie une fouille, devant un écran, le sol excavé décomprime le sol en fond de fouille qui a tendance à se soulever, l'angle de frottement δ_p , de butée, est négatif, avec le cisaillement τ dirigé vers le haut (Fig.23). On prendra généralement comme valeur $\delta_p = -2/3\varphi'$.

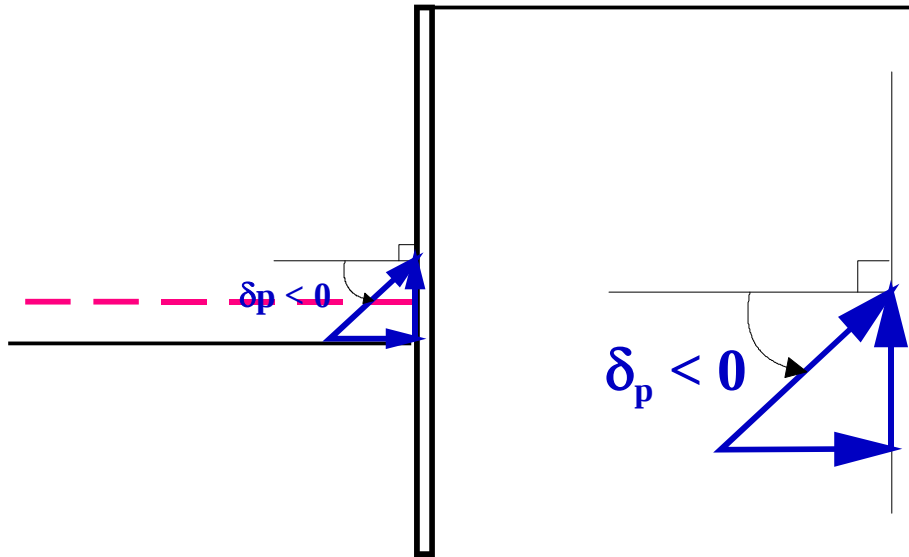


Fig.23 Angle de frottement de butée entre le sol et l'écran

2.8 Calculs de la poussée et de la butée pour un talus de géométrie quelconque

2.1.8 2.8.1 Cas simples

Dans les cas les plus simples, on peut se ramener aux cas précédents en faisant des hypothèses réalistes. Par exemple, pour un talus limité en tête de l'écran (Fig.24) on se ramène pour la partie haute de l'écran à la poussée du terrain avec le talus β à partir du point O, et pour la partie basse à la poussée du terrain avec terre-plein horizontal ($\beta = 0$) à partir du point O' en considérant qu'à partir d'une certaine profondeur, le triangle O'AO a un effet négligeable. A partir des coefficients de poussée $K_{a\beta}$ et K_a , on détermine le point I séparant les deux zones de poussée en écrivant : $p_a = p'_a$

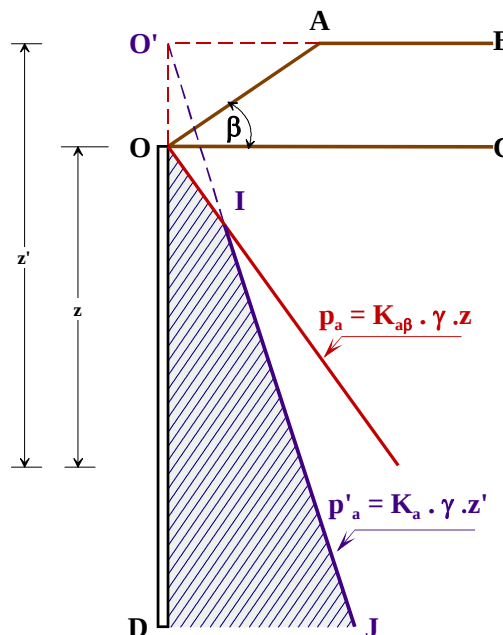


Fig.24 Exemple de répartition des contraintes de poussée dues à un talus limité en tête d'écran

2.1.9 2.8.2 Cas complexes

Dans les cas de géométrie complexe du terrain et de surcharges réparties linéairement en certains points de la surface (Fig.24) on pourra utiliser, pour le calcul de la poussée, la méthode de Culmann qui est une extension de la méthode de Coulomb.

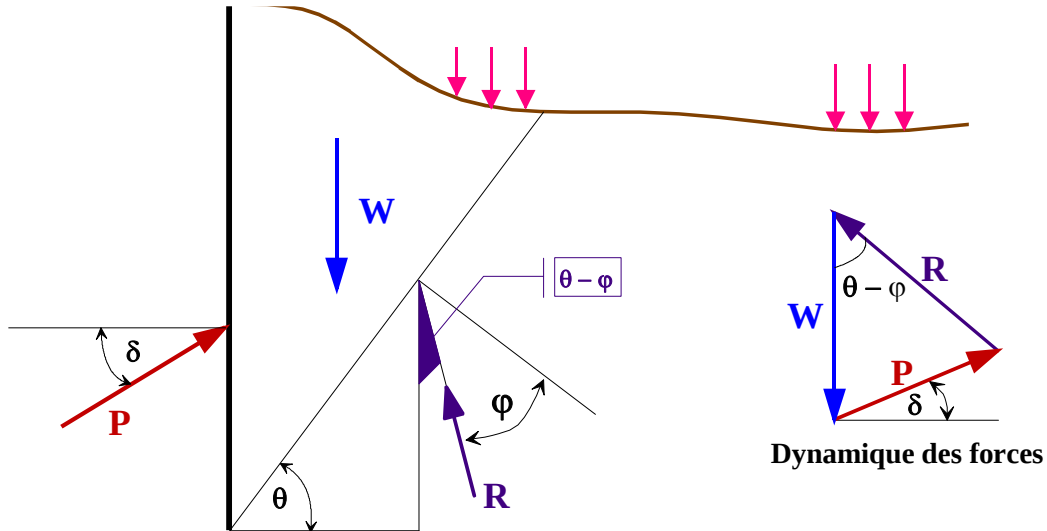


Fig.24 Courbe de Coulomb et dynamique des forces

On écrit l'équilibre d'un coin de Coulomb par la fermeture du dynamique des forces et on cherche le coin tel que $P_{\max} = P_a$.

CULMANN a proposé une méthode permettant de décrire la variation de P sur le même graphique en faisant tourner le dynamique de $\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$ pour faire coïncider le vecteur $\vec{R}$ avec le vecteur directeur du plan de coupure θ (Fig.25)

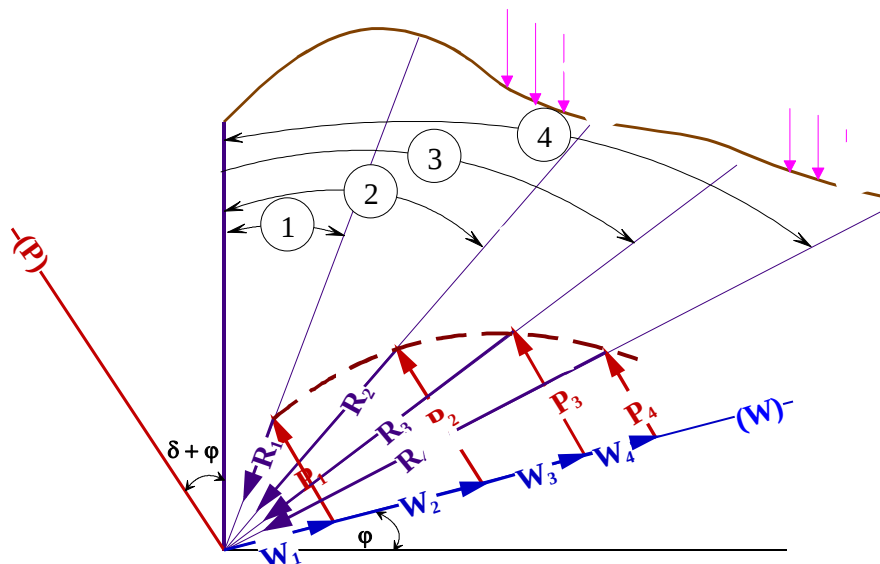


Fig.25 Construction de Culmann

R coïncide avec le plan de coupure,

W fait un angle de $+\varphi$ avec l'horizontale et représente le poids total du terrain et les surcharges éventuelles

P fait un angle $+(\delta + \varphi)$ avec la verticale,

Le graphique en pointillé donne l'évolution de P, et permet de déterminer $P_a = P_{\max}$.

Cette méthode ne donne pas directement le point d'application de P_a qui pourrait être obtenu en découpant le terrain en tranches élémentaires.

2.9 Dispositions particulières de surcharges

Quand les surcharges ne sont pas uniformément réparties à la surface du sol, on dispose de solutions "approchées" en utilisant les résultats de l'élasticité linéaire ou en proposant des schémas de rupture en plasticité parfaite. On ne rappellera pas la méthode de Culmann.

• Solution en élasticité linéaire

→ Surcharge linéaire sur un sol horizontal

La solution de FLAMANT, en coordonnées polaires, donne la contrainte radiale en un point du sol (r, θ) pour une charge inclinée d'un angle λ sur la verticale (Fig.26).

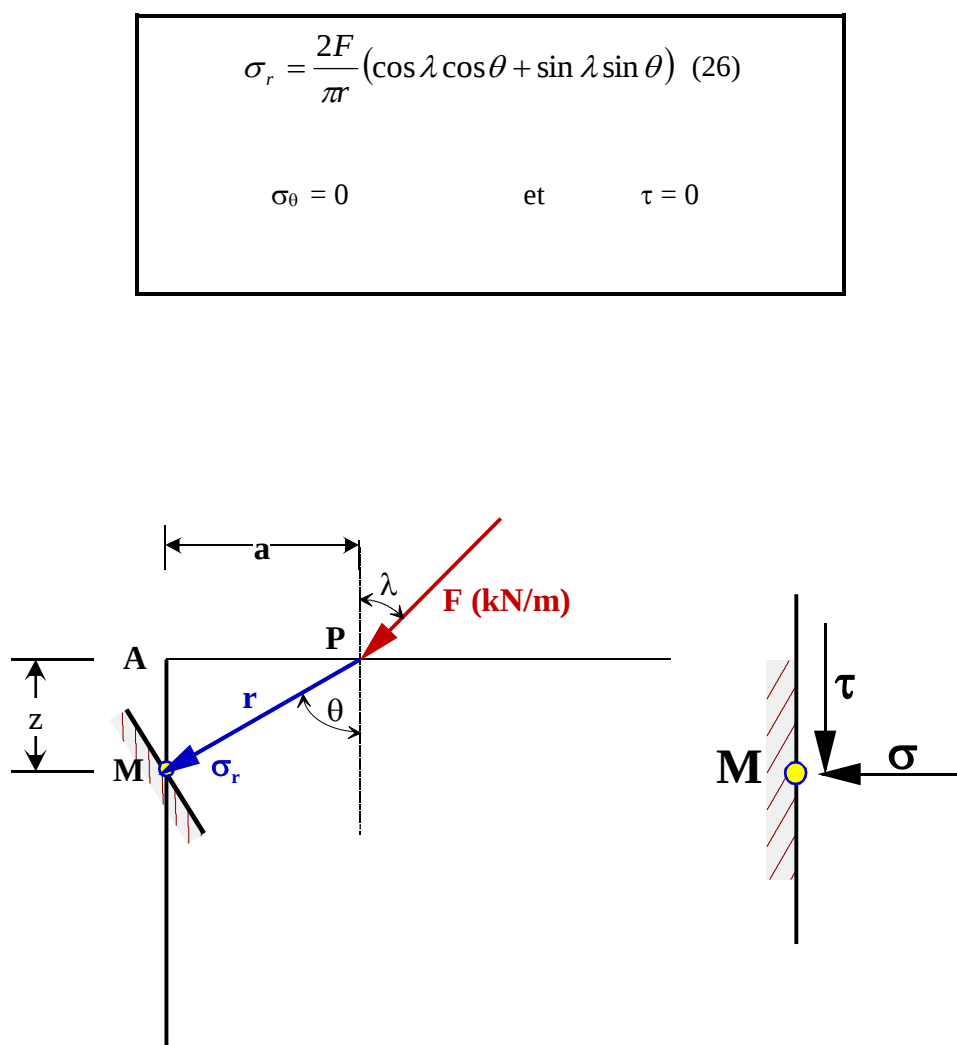


Fig. 26 Action d'une charge linéairement répartie inclinée sur un plan vertical

Si la charge est verticale $\lambda = 0$ (Fig.27)

$$\sigma_r = \frac{2F}{\pi r} \cos \theta \quad (27)$$

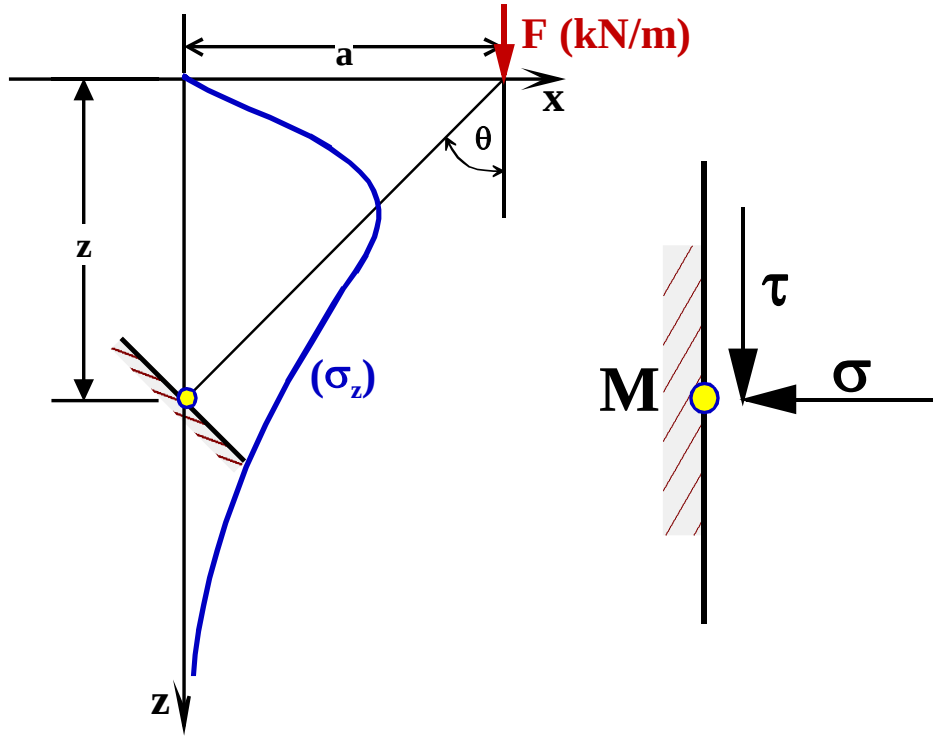


Fig.27 Action d'une charge linéaire verticale sur un plan vertical

A partir du cercle de Mohr, en ce point (r, θ) , on détermine sur une facette verticale les contraintes (σ, τ) .
Pour la charge inclinée

$$\sigma = \frac{2F}{\pi} \frac{[(\cos \lambda) \times z + (\sin \lambda) \times a] \times a^2}{(a^2 + z^2)^2} \quad (28)$$

$$\tau = \frac{2F}{\pi} \frac{[(\cos \lambda) \times z + (\sin \lambda) \times a] \times az}{(a^2 + z^2)^2} \quad (29)$$

Pour la charge verticale $\lambda = 0$

$$\sigma = \frac{2F}{\pi} \frac{za^2}{(a^2 + z^2)^2} \quad (30)$$

$$\tau = \frac{2F}{\pi} \frac{az^2}{(a^2 + z^2)^2} \quad (31)$$

Ces formules donnent la répartition des contraintes sur un plan vertical du sol, elles ne tiennent pas compte de la présence de l'écran et de sa rigidité.

Les écrans ayant toujours une rigidité supérieure à celle du sol, les contraintes seront plus élevées que cette solution théorique. Si l'écran était infiniment rigide, on pourrait considérer une force F' symétrique de F par rapport à l'écran de façon à annuler tout déplacement horizontal de l'écran. Dans ce cas les contraintes seraient doublées, ce qui représente un majorant de l'action de la surcharge sur un écran réel.

La figure 28 représente la distribution des contraintes σ et τ , dues à une charge inclinée de $\pi/4$, sur un plan vertical.

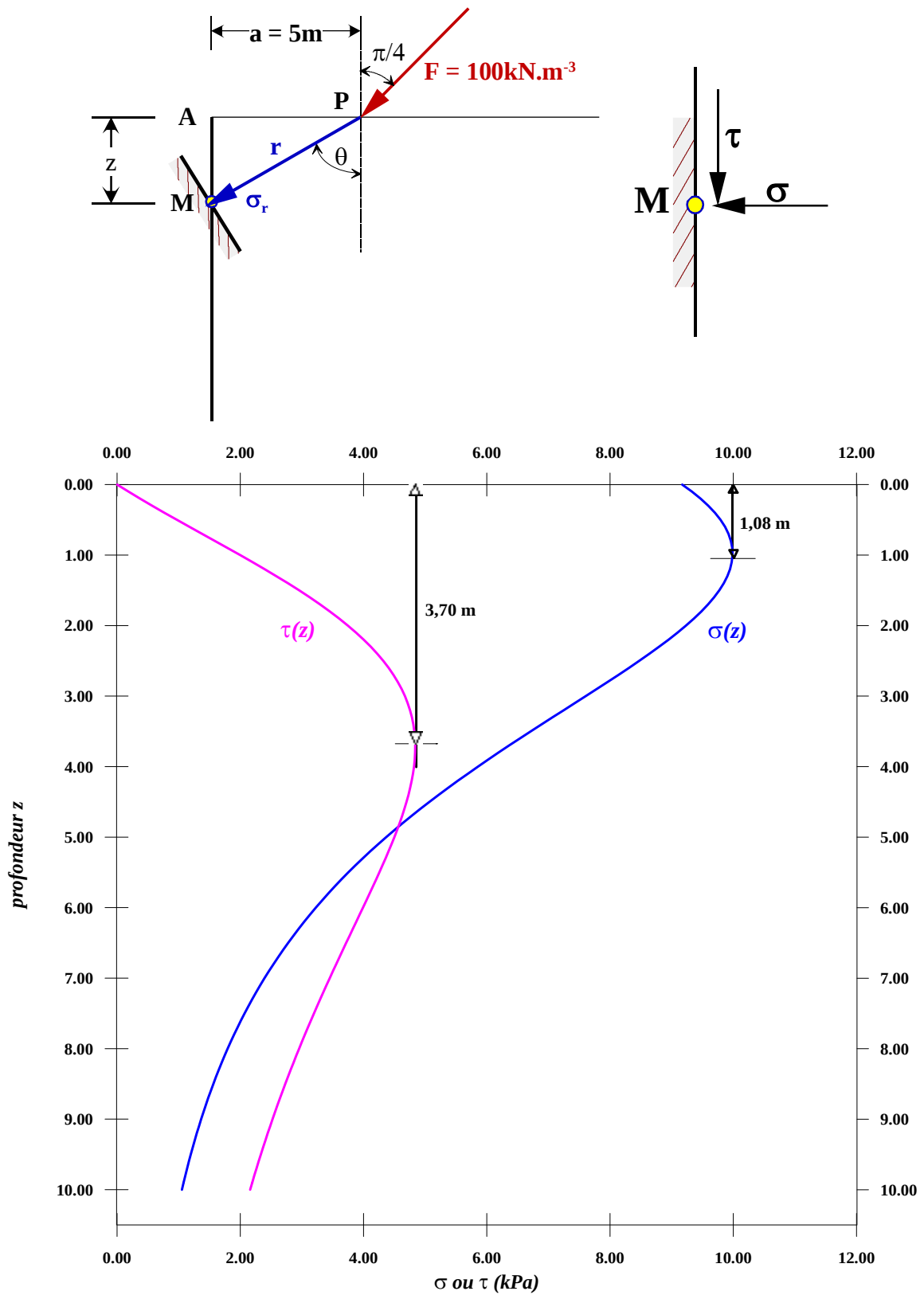


Fig.28 Exemple de distribution des contraintes σ et τ sur un plan vertical

- Solution en plasticité**

→ Surcharge semi-infinie limitée sur un plan horizontal (Fig.29)

ou

$$P'_a = p_{a_{\max}} \times \frac{d}{2}$$

→ Surcharges locales (Fig.31)

On considère généralement une répartition uniforme dans les deux directions à 27° ($\text{Arctg } 1/2$) en plan et comme précédemment en coupe (Fig.31.a).

Soit q , la charge uniformément répartie, la charge totale locale est

$$Q = q \times b \times d$$

Comme précédemment, la force de poussée est égale à

$$P'_a = Q \times \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

La contrainte de poussée p'_a est répartie uniformément sur le rectangle $(d + a)(z_3 - z_1)$, (Fig.31b)

$$p'_a = \frac{Q}{(d + a)(z_3 - z_1)}$$

Au lieu d'une répartition uniforme dans les deux sens, Krey a proposé une répartition trapézoïdale en plan et triangulaire en coupe (Fig.31.c). Dans ces conditions

$$p'_{a_{\max}} = \frac{4Q}{(2d + a)(z_3 - z_1)}$$

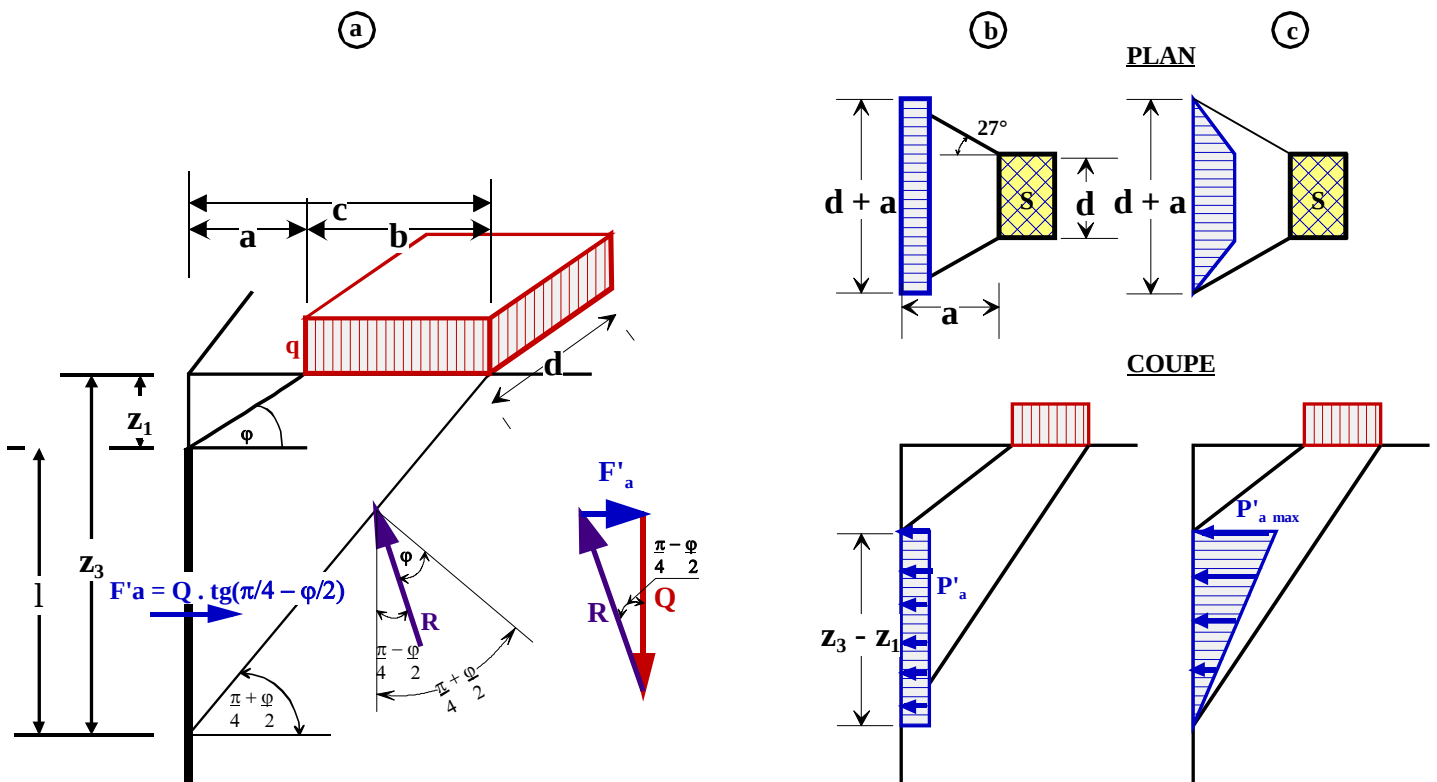


Fig.31 Contraintes de poussée dues à une surcharge locale verticale

2.10 Cas d'un multicouche

On se ramènera aux cas précédents en considérant, pour simplifier, les couches supérieures agissant comme des surcharges (Tables d'Herminier, Kérisel et Absi 1990) pour les couches inférieures.

On veillera à ne pas oublier les discontinuités à chaque interface (Fig.32).

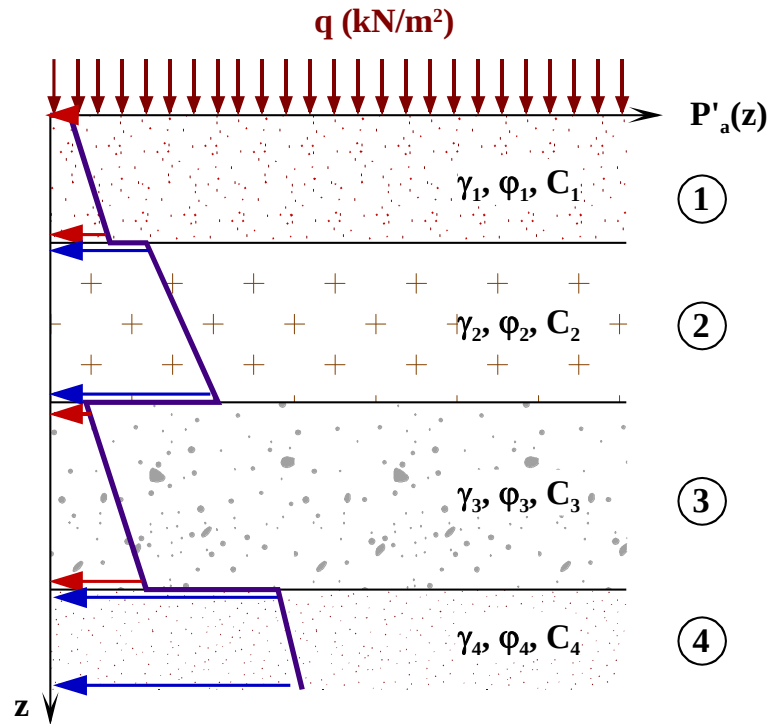


Fig. 32 Exemple de répartition de contraintes de poussée d'un multicouche sur un écran vertical

2.11 Prise en compte de l'eau

Pour les terrains sous la nappe, après avoir calculé les pressions interstitielles on appliquera le principe de Terzaghi pour déterminer les contraintes effectives auxquelles on affectera les coefficients de poussée et butée. On rajoutera les pressions interstitielles, hydrostatiques ou hydrodynamiques.

3 Prise en compte de l'eau

L'eau a deux actions, sur les grains par le couplage hydrodynamique (postulat de Terzaghi) et par son action directe comme pression d'eau sur l'écran.

S'agissant de l'action des grains ou particules de terrain les coefficients de poussée et butée s'appliquent aux **contraintes effectives**. Il est donc indispensable de déterminer les contraintes effectives $\sigma' = \sigma - u$ avant de calculer les poussées et butées.

Avec σ , contrainte totale calculée avec le poids volumique total du terrain ;

u : la pression interstitielle.

3.1 Calculs de l'écran avec nappes statiques

Dans ce cas la pression d'eau hydrostatique est immédiate. On donne deux exemples :

- 1 Deux nappes statiques au même niveau ;
- 2 Deux nappes statiques à des niveaux différents.

3.1.1 Deux nappes statiques au même niveau

C'est par exemple le cas pour un écran en rivière, avec un niveau d'eau au niveau du terre – plein (Fig.33).

Dans ce cas les pressions interstitielles sont identiques de par et d'autre de l'écran, donc la pression différentielle est nulle. Par contre il ne faut pas oublier que le sol est déjaugé des deux côtés et que les contraintes de poussée et de butée sont calculées avec $\gamma' = 12 \text{ kN/m}^3$.

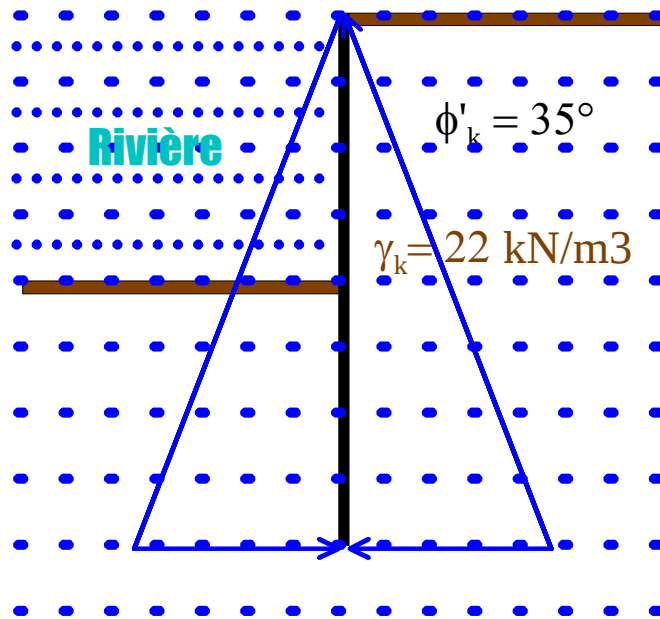


Fig.33. Diagrammes des pressions interstitielles

3.1.2 Deux nappes statiques à des niveaux différents

C'est le cas pour une fouille ou un batardeau dont la fiche atteint un horizon imperméable ou en considérant dans un premier temps deux nappes statiques pour ne pas calculer l'écoulement (Fig.34).

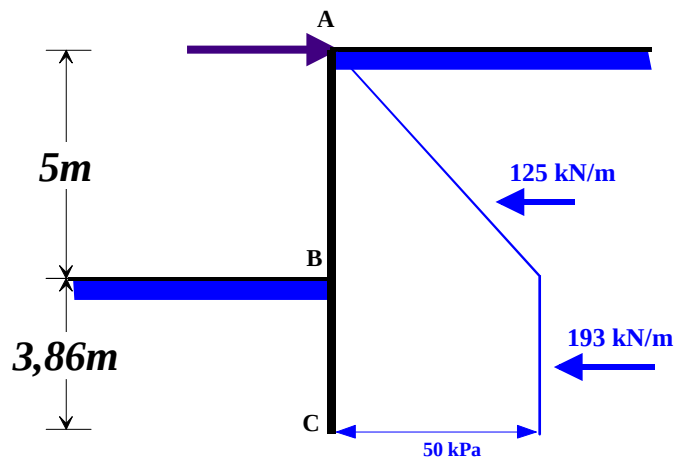


Fig.34. Diagrammes des pressions interstitielles différentielles

3.1.3 Application au calcul d'un rideau de palplanche soumis à deux nappes statiques

On traite un cas d'écran butonné en tête simplement buté en pied et soumis à deux nappes statiques (Fig.35). On fait le calcul en prenant, a priori, un coefficient de sécurité de 2 sur la butée. Le tableau1 indique les caractéristiques du sol et la valeur de la surcharge q .

Tableau 1 Valeurs de calcul

						Poussée		Butée	
						$\delta_a = \frac{2}{3}\varphi$		$\delta_p = -\frac{2}{3}\varphi$	
		q (kPa)	γ' (kN/m ³)	c' (kPa)	φ' (°)	k _a	k _{ap}	k _p	K _{pp} /2
Sol	sable		12	0	35	0,247	0,23	8	7,35/ 2
Surcharge		10				0,250	0,23		

En C $\sigma_A = k_{ap} \cdot \gamma' \cdot [AB+f]$

et $\sigma_{Aq} = k_{ap} \cdot q$

en B $\sigma_w = \gamma_w \cdot [AB] = 50 \text{ kPa}$

en C $\sigma_w = \gamma_w \cdot [AB] = 50 \text{ kPa}$

En C $\sigma_p = k_{pp}/2 \cdot \gamma' \cdot f$

Résultante des efforts de poussée : $F_a = k_{ap} \cdot \gamma' \cdot [AB+f]^2/2$

$F_{aq} = k_{ap} \cdot q \cdot [AB+f]$

Résultante de la pression interstitielle sur AB : $F_{w1} = \gamma_w \cdot [AB]^2/2$

Résultante de la pression interstitielle sur BC : $F_{w2} = \gamma_w \cdot [AB] \cdot f$

Résultante des efforts de butée : $F_p = k_{pp}/2 \cdot \gamma' \cdot f^2/2$

3.1.4 Calcul de la fiche

$$M_{F_p/A} - M_{F_a/A} = 0$$

$$F_p \cdot [AB + (2 \cdot f/3)] = F_a \cdot (2/3) \cdot [AB+f] + F_{aq} \cdot (1/2) \cdot [AB+f] + F_{w1} \cdot (2/3) \cdot [AB] + F_{w2} \cdot [AB + (f/2)]$$

d'où en développant :

$$13,78f^3 + 70,3f^2 - 330,5f - 560,8 = 0$$

dont la solution est **$f = 3,86 \text{ m}$** (Fig.35)

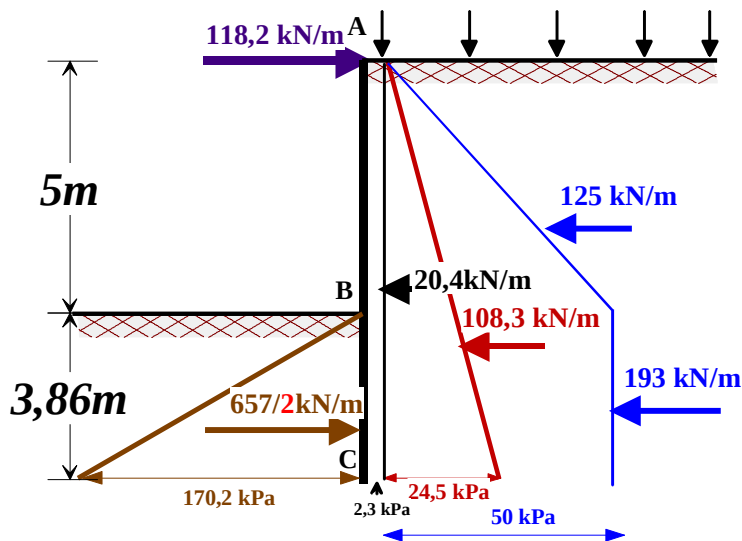


Fig.35. Résultats du calcul de la fiche minimum

3.1.5 Détermination de la force dans le buton

$$F_a + F_{aq} + F_{w1} + F_{w2} = 446,7 \text{ kN/m}$$

$$F_p = 328,5 \text{ kN/m}$$

$$A = 118,2 \text{ kN/m}$$

3.1.6 Sollicitations internes dans l'écran

Pour $0 < z < 5$:

Le moment fléchissant maximum est situé à 4,13m du sommet de l'écran et vaut **319 kN.m/m** (Fig.36).

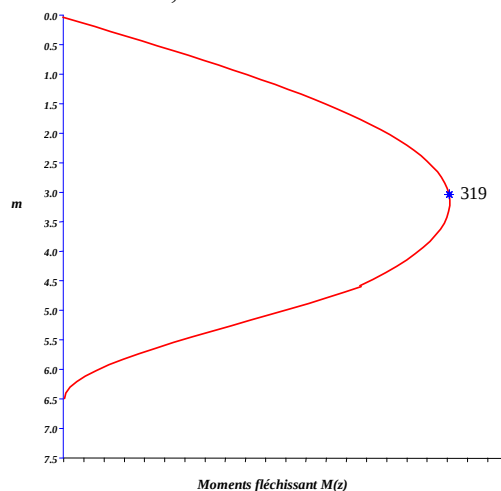


Fig.36 Répartition du moment fléchissant

3.2 Calcul de l'écran avec nappes en écoulement

Dans ce cas il faut calculer d'abord le réseau d'écoulement pour déterminer en particulier les valeurs des pressions interstitielles u . On en déduit ensuite les contraintes effectives auxquelles s'appliquent les coefficients de poussée et butée. La poussée et la butée globale résulte de la somme de la pression de l'eau et de la poussée et butée du sol.

On rappelle d'abord les principaux résultats pratiques permettant de calculer les pressions interstitielles avant de faire une application sur un cas de batardeau.

3.2.1 Solution de Mandel pour l'écoulement de l'eau dans un batardeau le long d'un écran dans une couche de sol infinie

Mandel (1951) a donné une solution analytique qui permet de calculer la perte de charge aval Δh_2 connaissant la perte de charge totale Δh le long de la palplanche pour un sol homogène et isotrope (Fig.37).

On désignera par Δh la perte de charge totale entre B et E, par Δh_2 la perte de charge aval entre D et E et Δh_1 la perte de charge amont entre B et C. On a évidemment $\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2$.

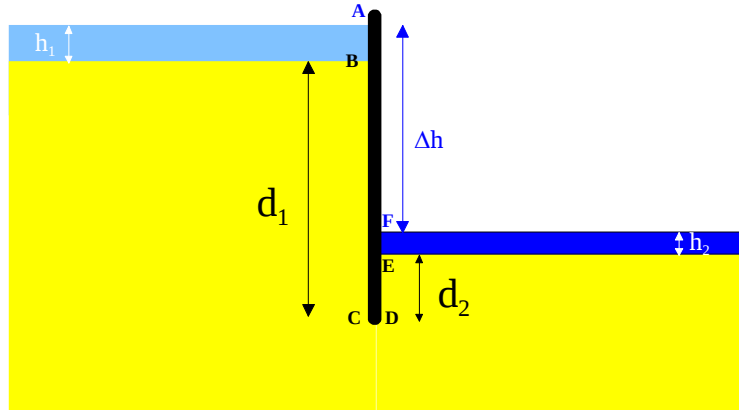


Fig.37 Ecoulement sous un écran dans un sol indéfini

On désignera par ρ , le rapport de la perte de charge aval sur la perte de charge totale

$$\rho = \frac{\Delta h_2}{\Delta h} \quad (1)$$

la solution exacte donnée par Mandel est

$$\tan(\pi\rho) - \pi\rho = \pi \frac{d_2}{\Delta h} \quad (2)$$

il a donné également une solution approchée, par défaut ρ_1

$$\rho = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{\Delta h}{d_2}}} \quad (3)$$

et enfin une solution explicite très proche de la valeur exacte en fonction de ρ_1

$$\frac{1}{2} - \rho = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{1}{2} - \rho_1 \right) \quad (4)$$

On peut donc écrire la solution sous la forme

$$\rho = 0,095 + \frac{0,81}{1 + \sqrt{1 + \frac{\Delta h}{d_2}}} \quad (5)$$

On remarquera que **l'approximation du gradient uniforme**, c'est à dire des pertes de charge réparties uniformément dans le sol le **long de la palplanche**, si elle est simple est **fausse** et sous-estime largement la perte de charge à l'aval de la palplanche surtout pour des valeurs de $\Delta h / f$ supérieures à 1.

Par contre on acceptera généralement des **gradients uniformes** à l'**amont** et à l'**aval**, calculés à partir de la formule de Mandel, sans grande erreur.

3.2.2 Ecoulement de l'eau dans un batardeau le long d'un écran dans une couche de sol limitée par un substratum imperméable

Mandel (1951) a également donné une solution analytique pour une couche de sol limitée par un substratum imperméable (Fig.38).

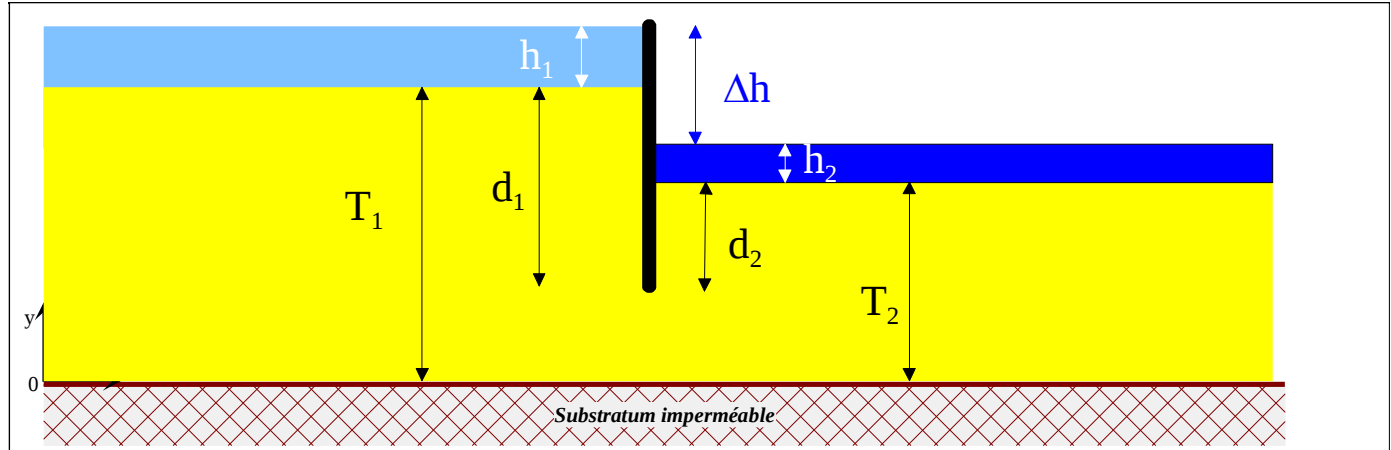


Fig. 38. Ecoulement sous un écran de batardeau dans un sol limité par un substratum imperméable

$$\frac{1}{2} - \rho = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{1}{2} - \rho_1 \right) \quad (6)$$

$$\rho_1 = \frac{\ln \left(\frac{T_2}{T_1 - d_1} + \sqrt{\frac{T_2^2}{(T_1 - d_1)^2} - 1} \right)}{\ln \left(\frac{T_1}{T_1 - d_1} + \sqrt{\frac{T_1^2}{(T_1 - d_1)^2} - 1} \right) + \ln \left(\frac{T_2}{T_1 - d_1} + \sqrt{\frac{T_2^2}{(T_1 - d_1)^2} - 1} \right)} \quad (7)$$

Pour $\frac{T_1}{T_1 - d_1}$ et $\frac{T_2}{T_1 - d_1}$ élevés on tend vers

$$\rho = \frac{\ln \left(\frac{8T_2}{\pi(T_1 - d_1)} \right)}{\ln \left(\frac{8T_1}{\pi(T_1 - d_1)} \right) + \ln \left(\frac{8T_2}{\pi(T_1 - d_1)} \right)} \quad (8)$$

3.2.3 Abaques de Davidenkoff

Les abaques de Davidenkoff permettent d'obtenir directement, sans construire le réseau d'écoulement, la perte de charge et le débit pour un batardeau. La figure 39 décrit les différents arguments nécessaires à l'utilisation de l'abaque de la figure 40.

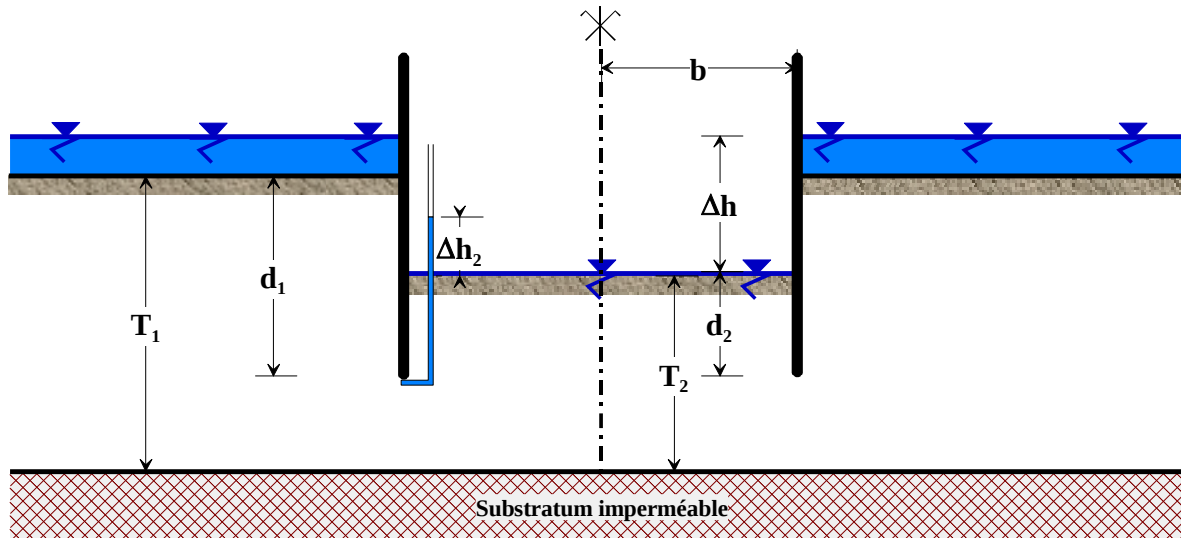


Fig.39. Définitions des paramètres des abaques de Davidenkoff

La perte de charge aval et le débit par m d'écran (pour un seul écran) sont donnés par les relations suivantes :

Pour des écrans plans de **longueur indéfinie** : $\rho = \frac{\Delta h_2}{\Delta h} = \frac{\phi_2}{\phi_1 + \phi_2}$ (9)

(pour **un seul écran**) $Q/m = k \frac{\Delta h}{\phi_1 + \phi_2}$ (10)

Pour une enceinte fermée ronde de rayon b : $\rho = 1,3 \frac{\phi_2}{\phi_1 + \phi_2}$

$$Q = 0,8k \frac{\Delta h}{\phi_1 + \phi_2} 2\pi b$$

Pour une enceinte carré de côté $2b$: $\rho = 1,3 \frac{\phi_2}{\phi_1 + \phi_2}$ (côté) $\rho = 1,7 \frac{\phi_2}{\phi_1 + \phi_2}$ (coin)

$$Q = 0,7k \frac{\Delta h}{\phi_1 + \phi_2} 8b$$

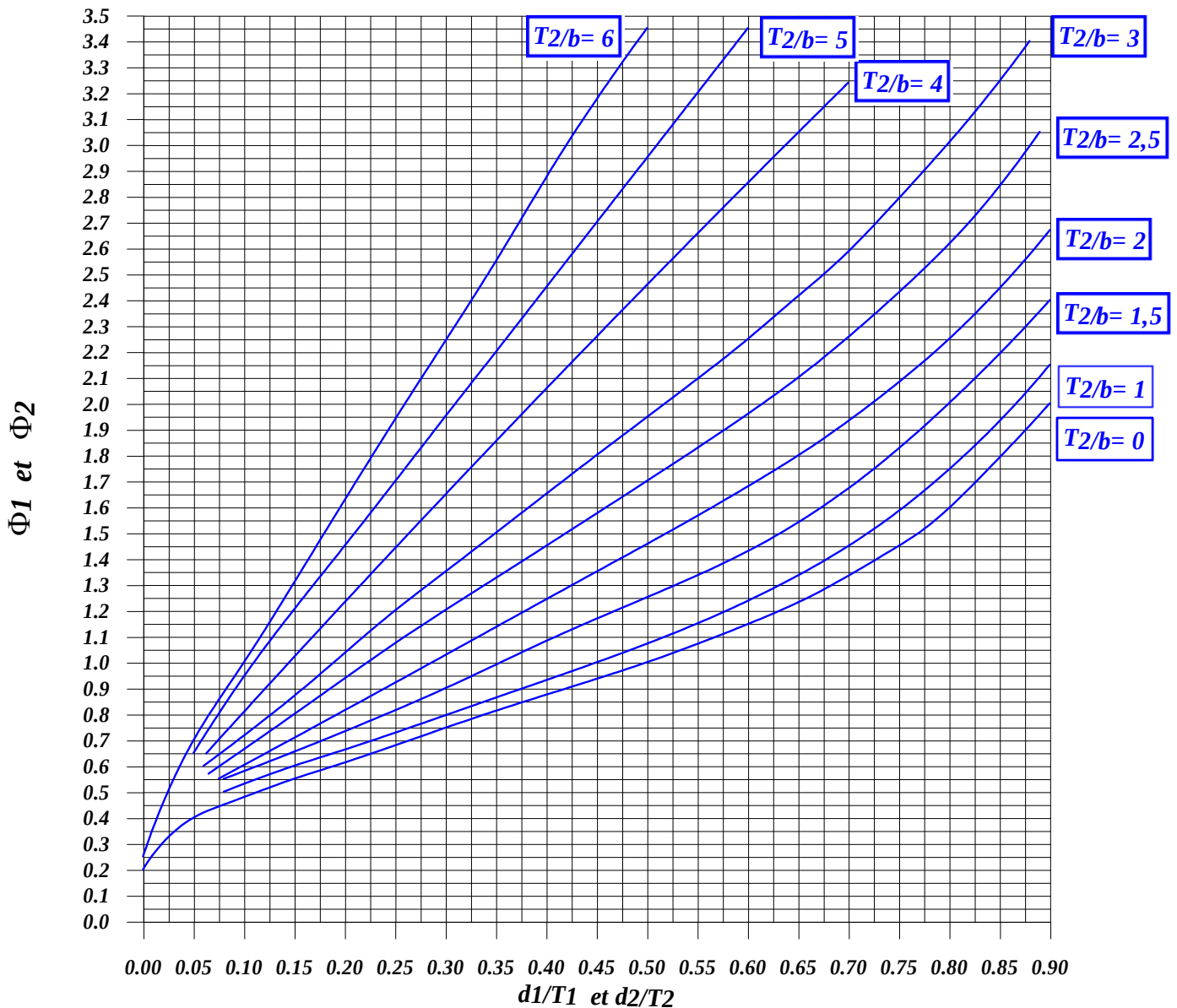


Fig.40. Abaques de Davidenkoff

La valeur de ϕ_1 est donnée par la courbe T_2 / b en fonction de d_1/T_1 .

La valeur de ϕ_2 est donnée par la courbe T_2 / b en fonction de d_2/T_2 .

3.3 Application au calcul d'un rideau de palplanche soumis à une nappe en écoulement

On traite le même cas d'écran butonné en tête simplement buté en pied mais soumis à une nappe en écoulement. On fait le calcul en prenant, a priori, un coefficient de sécurité de 2 sur la butée. Les caractéristiques du sable sont les mêmes.

Calcul des pertes de charge dues à l'écoulement

On a considéré ici un batardeau avec un niveau de la nappe affleurant au sommet du terrain. Cette surface filtrante submergée est orthogonale aux lignes de courant, la charge h est constante, c'est donc une équipotentielle.

Puisque le gradient varie avec la longueur de la fiche, il est nécessaire de faire un calcul itératif. En se basant sur les résultats du calcul avec nappes statiques on initie le calcul avec une fiche de 4,00m qui s'est avérée insuffisante.

On calcule la perte de charge entre les points A et B ; on considère le repère Cxy pour le calcul.

$u_A = 0$ kPa

$$u_B = 0 \text{ kPa}$$

$$h_A = \frac{u_A}{\gamma_w} + z_A = 0 + 9 = 9 \text{ m}$$

$$h_B = \frac{u_B}{\gamma_w} + z_B = 0 + 4 = 4 \text{ m}$$

La perte de charge entre l'amont et l'aval est donc $\Delta h = h_A - h_B = 5 \text{ m}$

La perte de charge Δh est égale à 5m.

On calcule d'après Mandel le rapport ρ entre la perte de charge avale et la perte de charge totale :

$$\rho = 0,095 + \frac{0,81}{1 + \sqrt{1 + \frac{\Delta h}{f}}} = 0,419$$

$$\Delta h_{av} = \rho \cdot \Delta h = 2,095 \text{ m}$$

$$\Delta h_{am} = \Delta h - \Delta h_{av} = 2,905 \text{ m}$$

La pression au pied de la fiche est telle que $u_c = (\Delta h_{av} + f) \cdot \gamma_w = 60,95 \text{ kPa}$

En considérant un gradient uniforme dans le sol :

$$\text{Le gradient aval } i_{av} = \frac{\Delta h_{av}}{f} = 0,524$$

$$\text{Le gradient amont } i_{am} = \frac{\Delta h_{am}}{f + 5} = 0,323$$

On calcule les poids volumiques déjaugés en prenant en compte l'écoulement :

$$\gamma'_{(amont)} = \gamma' + i_{am} \cdot \gamma_w = 15,23 \text{ kN/m}^3$$

$$\gamma'_{(aval)} = \gamma' - i_{av} \cdot \gamma_w = 6,76 \text{ kN/m}^3$$

On détermine la distribution de contrainte le long de l'écran avec prenant les valeurs projetées sur l'écran K_{ap} et $K_{pp}/2$.

Points	Profondeur	Poussée (kPa)		Butée (kPa)		Contrainte résultante (kPa)	
		$\sigma'a + \sigma'aq$	u	$\sigma'p$	u	σ' résultante	u
A	0	2,3	0	0	0	2,3	0
B	5	19,81	33,86	0	0	19,81	33,86
C	9	33,83	60,95	99,37	60,95	65,54	0

$$F_a = 141,9 \text{ kN/m}$$

$$F_{aq} = 20,7 \text{ kN/m}$$

$$F_p = 198,7 \text{ kN/m}$$

$$F_{wa} = 274,3 \text{ kN/m}$$

$$F_{wp} = 121,9 \text{ kN/m}$$

Moments moteurs par rapport à A :

$$M_m / A = F_a \left(\frac{2}{3} (5 + f) \right) + F_{aq} \left(\frac{5 + f}{2} \right) + F_{wa} \frac{2}{3} (5 + f) = 2590 \text{ kN.m}$$

Moments résistants par rapport à A :

$$M_r / A = F_p \left(\frac{2}{3} f + 5 \right) + F_{wp} \left(\frac{2f}{3} + 5 \right) = 2457 \text{ kN.m}$$

$$M_m / A > M_r / A$$

Cette fiche n'est pas suffisamment grande lorsque l'on prend en compte l'écoulement. Il faut la rallonger.

La fiche nécessaire est de 4,20m. On peut en faire la vérification suivante :

D'après (5)

$\rho = 0,422$, cette valeur vérifie bien (2)

$\Delta h_{av} = 2,11\text{m}$ et $u_C = 63 \text{ kPa}$

$\Delta h_{am} = 2,89 \text{ m}$ et $u_C = 63 \text{ kPa}$

$i_{aval} = 2,11 / 4,2 = 0,50$

$i_{amontl} = 2,89 / 9,2 = 0,314$

A titre de comparaison le gradient moyen uniforme serait de $i_m = 0,37$.

On peut soit calculer la contrainte effective σ' (Fig 41b) en retranchant u_{dyn} de la contrainte totale (Fig.41a) calculée avec $\gamma = 22 \text{ kN/m}^3$, soit directement avec $\gamma' + i \gamma_w$ en considérant des gradients uniformes respectivement à l'amont et à l'aval. On en déduit le diagramme des poussées et butées (Fig.41c).

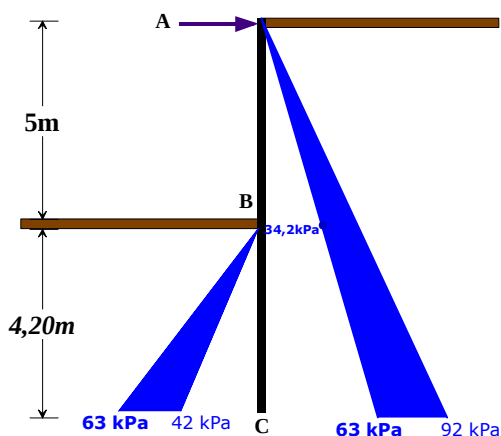


Fig.41a. Pressions statiques et dynamiques

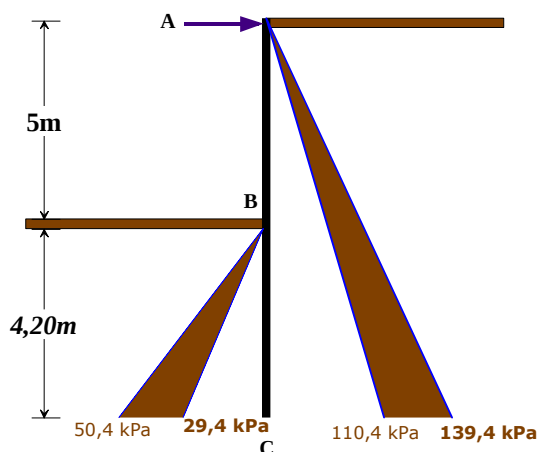


Fig.41b. Contraintes effectives statiques et dynamiques

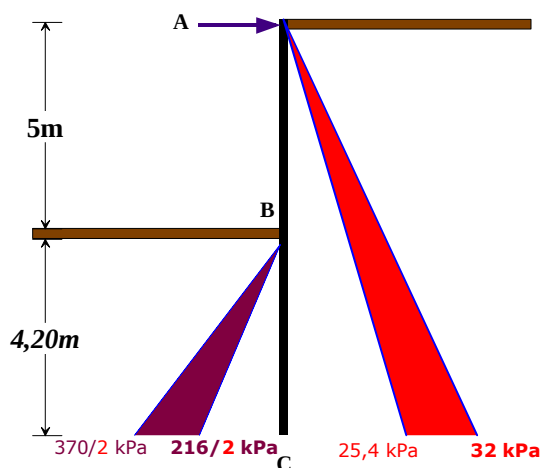


Fig.41c. Contraintes de poussée et de butée dans le cas statique et dynamique

Vérification de l'équilibre avec la fiche de 4,20m

A partir de ces valeurs on obtient les diagrammes de poussée et butée des grains et de l'eau (Fig.42). On peut alors vérifier l'équilibre de rotation.

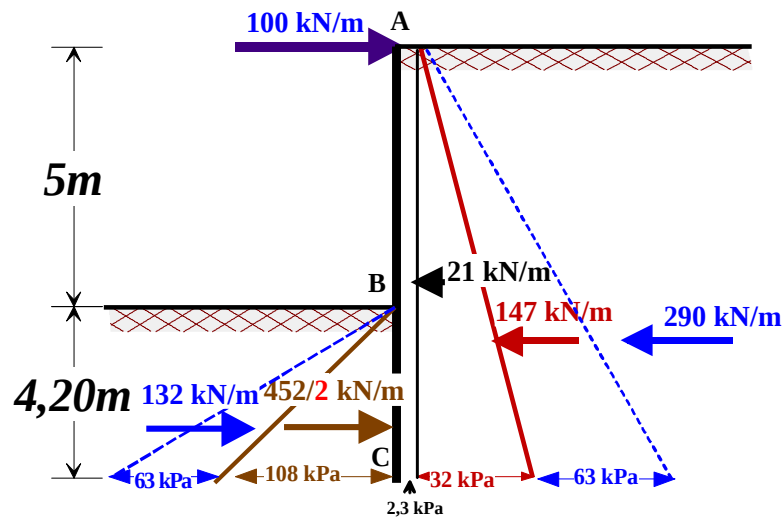


Fig.42. Détermination de la fiche minimum

On obtient un moment de stabilité légèrement supérieur au moment de renversement de 0,5%.

$$M_{r/A} = 2792 \text{ kN.m/m}$$

$$M_{m/A} = 2777 \text{ kN.m/m}$$

Détermination de la force dans le bouton

$$F_a = 458 \text{ kN/m}$$

$$F_p = 358 \text{ kN/m}$$

$$A = 100 \text{ kN/m}$$

Sollicitations internes dans l'écran

Le moment fléchissant maximum est situé à 4,18m du sommet de l'écran et vaut **272 kN.m/m**.

Comparaisons des calculs de l'écran, avec nappes statiques et avec écoulement.

Le tableau 2 récapitule les résultats des calculs et montre que dans ce cas le calcul avec écoulement donne la fiche la plus grande.

Tableau 2. Synthèse des longueurs de fiche et sollicitations

Type de calcul	Fiche : f (m)	Longueur totale (m)	Effort dans le bouton (kN/m)	Moment fléchissant (kN.m/m)
Nappes statiques	3,86	8,86	118	319
Nappe en écoulement	4,20	9,20	100	272