Prénom / first name : Nom / name : Groupe / group :

Test de Frottement et Lubrification

TOUS DOCUMENTS AUTORISES ! (Formulaire fourni à la fin si nécessaire)
Calculatrice autorisée. Ne pas dégrafer.
Répondez à une seule des versions (française ou anglaise) et rendez le sujet complet (avec vos nom et prénom) avec vos réponses.

II. Amortisseur hydrostatique – durée conseillée : 1h

On s'intéresse ici à une butée hydrostatique servant aussi à amortir de petits mouvements, figure 4. On considère un problème infiniment long dans la direction perpendiculaire au plan de la figure, les pièces 1 et 2 sont rigides, la pièce 2 peut être animée d'un mouvement de translation verticale, le jeu entre les pièces est faible (sur les parties de largeur b) et rempli d'un film de lubrifiant qu'on considèrera isovisqueux (de viscosité dynamique η) et incompressible (de masse volumique ρ).
Le système est constitué de deux parties symétriques de longueur $2b + c$, inclinées d'un angle α.
On peut donc ne pas être en régime permanent et on notera la vitesse verticale descendante de la pièce 2 V ($V > 0$ dans le mouvement descendant). La pièce 1 est fixe.
Les parties de longueur c sont des cavités où la pression est supposée uniforme et égale à P_0. Le fluide à l'extérieur de la butée est à une pression nulle.

Question 1.
Si on note h la hauteur du film de lubrifiant, quel est la relation entre $\frac{dh}{dt}$ et V ?

$\frac{dh}{dt} = -V \sin\alpha$

On étudie dans un premier temps une partie du système schématisée sur la figure 5. On néglige ici l'effet d'une possible vitesse horizontale (suivant x) de la pièce 2, la vitesse verticale est notée V_d ($V_d > 0$ et les pièces se rapprochent). On note P_a et P_b les pressions en $x = 0$ et $x = b$.

Question 2.
Si on note h la hauteur du film de lubrifiant, quel est la relation entre $\frac{dh}{dt}$ et V_d ?

$\frac{dh}{dt} = -V_d$

Question 3.
Écrire l'équation de Reynolds pour ce cas en la simplifiant au maximum.
En déduire l'expression de la répartition de pression p, en fonction des données de la figure 5 : montrer que celle-ci s'écrit

$$p = aV_d(b - x)x + ex + d \qquad (1)$$

où a, d et e sont des constantes, dont vous donnerez les expressions.

Prénom / first name : Nom / name : Groupe / group :

- Reynolds 1D, h = cste, U = cte $\Rightarrow \frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 + \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{12\eta}{h^3}V_d$
- On intègre 2 fois : $p = -\frac{6\eta}{h^3}V_d x^2 + C_1 x + C_2$

CL $p(x=0) = P_a \Rightarrow C_2 = P_a$

$p(x=b) = P_b \Rightarrow -\frac{6\eta}{h^3}V_d b^2 + C_1 b + C_2 = P_b \Rightarrow C_1 = \frac{6\eta V_d}{h^3}b + \frac{1}{b}(P_b - P_a)$

d'où $p = \underbrace{\frac{6\eta}{h^3}}_{a} V_d x(b-x) + \underbrace{\frac{1}{b}(P_b - P_a)}_{e} x + \underbrace{P_a}_{d}$

Question 4.

Dans le cas particulier où $P_a = P_b = 0$, $\eta = 0{,}1$ Pa.s, $\rho = 800$ kg/m^3, b = c = 2 cm, et une position où h = 0.2 mm, donner la valeur numérique de la constante a.

$a = \frac{6\eta}{h^3} = 7{,}5 \cdot 10^{10} \ \frac{Pa.s}{m^3}$

Question 5.

Avec l'expression (1) donnée précédemment (et sans remplacer les constantes a, d, e par leur expression) de la répartition de pression, donner l'expression de la charge normale par unité de largeur W, toujours pour le cas de la figure 5.

$W = \int_0^b p\,dx = aV_d\frac{b^3}{6} + e\frac{b^2}{2} + db$

Question 6.

La figure 6 représente la moitié gauche du dispositif de départ. On néglige toujours l'influence de la vitesse de la pièce 2 dans la direction x. A partir de l'expression (1) donnée précédemment de la répartition de pression (sans remplacer les constantes a, d, e par leur expression),

- donner l'expression du gradient de pression en $x = b$;
- donner l'expression du débit de lubrifiant par unité de largeur Q en $x = b$; montrer que celle-ci s'écrit

$$Q = a_1(abV_d - e) \qquad (2)$$

où a_1 est une constante dont vous donnerez l'expression.

- $\frac{\partial p}{\partial x} = aV_d(b-2x) + e \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x}(x=b) = e - aV_d b$
- $Q = \int_0^h u\,dy$ avec $u = -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y(h-y) \Rightarrow Q = \underbrace{\frac{h^3}{12\eta}}_{a_1}(abV_d - e)$

Question 7.
Sur la figure 4, la pression P_1 au centre du dispositif est a priori inconnue. Quelle condition sur Q doit être vérifiée, pour la déterminer ? Avec l'expression (2) donnée précédemment, en déduire l'expression de P_1, en fonction, entre autres de P_0.

- $Q = 0$ (symétrie)
- donc $e = abV_d$ ici $P_a = P_0$, $P_b = P_1$ $\Rightarrow \frac{1}{b}(P_1 - P_0) = a$

$\Rightarrow P_1 = P_0 + a b^2 V_d$

Question 8.
Dans le cas où P_0 est négligeable, on peut montrer que la force verticale totale par unité de largeur sur le système de la figure 4 est

$$W_2 = a_2 V \sin\alpha \cos\alpha \qquad (3)$$

où a_2 est une constante. On ne demande pas ici de retrouver cette expression, ni de déterminer a_2.
Pour quelle valeur de α le dispositif est-il le plus efficace pour arrêter le mouvement de descente ?

$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45$

c'est bien un maximum pour W_2

[et $W_{2\,max} = \frac{1}{2} a_2 V$]

Prénom / first name : Nom / name : Groupe / group :

Test of Friction and Lubrication

ALL DOCUMENTS ALLOWED! (Equation sheet at the end if needed) Pocket computer allowed. Do not separate the sheets. Answer to only one of the two versions (french or english) and return the entire text of the subject (with your first and last names) along with your answers.

II. Hydrostatic damper – recommended duration: 1h

We consider a hydrostatic thrust bearing that can also be used as a damper for small movements, figure 4. The problem is assumed infinitely long in the direction perpendicular to the plane of the figure, parts 1 and 2 are rigid, part 2 may have a translation movement, the gap between the parts is small (over areas of length b) et filled with a lubricant film assumed to be isoviscous (dynamic viscosity η) and incompressible (specific density ρ).
The system is composed of two symmetric parts of length $2b + c$, inclined with an angle α.
We can therefore be in a situation with a transient evolution, and the vertical downward velocity will be denoted as V for the part 2 ($V > 0$ during the downward movement). Part 1 is fixed.
The areas of length c are cavities where the pressure is uniform and equals P_0. The fluid outside the thrust bearing has a zero pressure.

Question 1.
If we denote with h the fluid film thickness, what is the relationship between $\frac{dh}{dt}$ and V?

As a first step, we study the part of the system depicted on figure 5. We herein neglect the effect of a possible horizontal velocity (along direction x) of part 2. The vertical velocity is denoted V_d ($V_d > 0$ and the two parts are moving closer). We denote with P_a and P_b the pressures at $x = 0$ and $x = b$.

Question 2.
If we denote with h the fluid film thickness, what is the relationship between $\frac{dh}{dt}$ and V_d?

Question 3.
Give the most simplified Reynolds equation for this case.
Deduce the expression of the pressure distribution p, as a function of the data of figure 5: show that it reads

$$p = aV_d(b - x)x + ex + d \qquad (1)$$

where a, d and e are some constants, whose expressions are asked for.

Question 4.
In the particular case with $P_a = P_b = 0$, $\eta = 0.1$ Pa.s, $\rho = 800$ kg/m^3, b = c = 2 cm, and at a location where $h = 0.2$ mm, give the numerical value of constant a.

Question 5.
With the previously given expression (1) for the pressure distribution (and without substituting the constants a, d, e with their expressions), give the expression of the normal load per unit width W, still for the case of figure 5.

Question 6.
Figure 6 depicts the left side of the overall system. We still neglect the influence of the velocity of part 2 along direction x. With the previously given expression (1) of the pressure distribution (without replacing constants a, d, e with their expressions),

- give the expression of the pressure gradient at $x = b$;
- give the expression of the fluid flow per unit width Q at $x = b$; show that it reads

$$Q = a_1(abV_d - e) \qquad (2)$$

where a_1 is a constant whose expression is asked for.

Prénom / first name : Nom / name : Groupe / group :

Question 7.
On figure 4, the pressure P_1 at the center of the device is a priori unknown. Which condition on Q has to be satisfied, for determining pressure P_1? With the previously given expression (2), deduce the expression of P_1, as a function, amongst others, of P_0.

Question 8.
In the case where P_0 is négligeable, one can show that the total vertical force per unit width on the system of figure 4 is

$$W_2 = a_2 V \sin\alpha \cos\alpha \qquad (3)$$

where a_2 is a constant. We don't ask herein to recover this expression, nor to determine a_2.
For which value of α the device is the most efficient to stop the vertical donward movement?

Prénom / first name : Nom / name : Groupe / group :

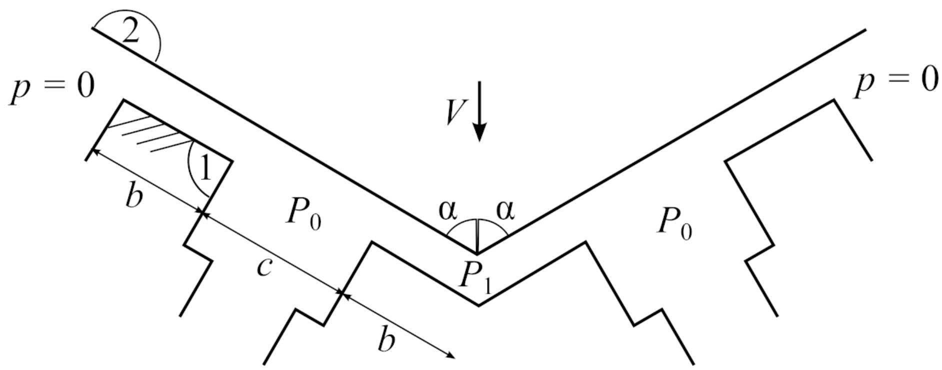


Figure 4. Schéma de l'amortisseur / sketch of the damper

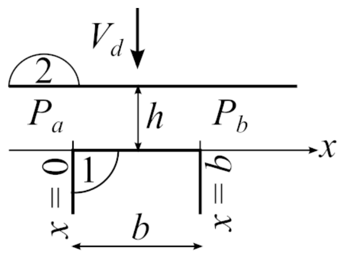


Figure 5. Problème intermédiaire / intermediate problem

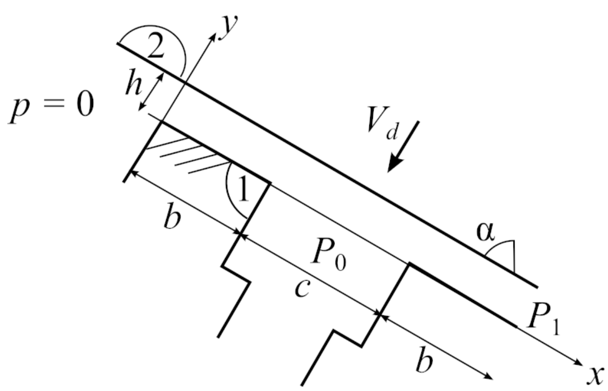


Figure 6. Moitié de l'amortisseur / half part of the damper

Prénom / first name : Nom / name : Groupe / group :

Formulaire / equation sheet

Point contact equations

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{x1}} + \frac{1}{R_{x2}} \quad \text{(non conformal)} \tag{1}$$

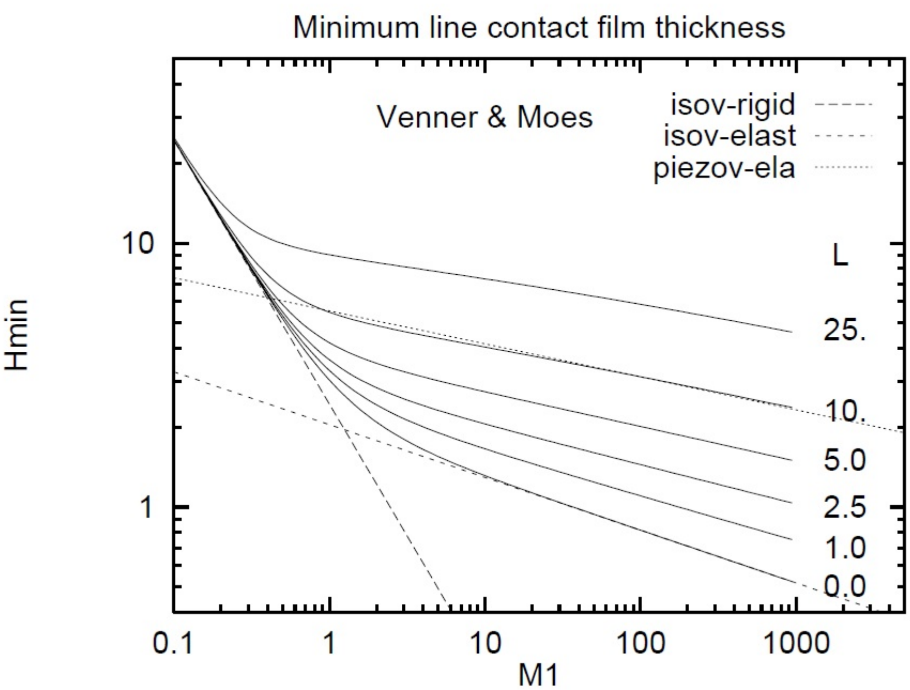
$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{x1}} - \frac{1}{R_{x2}} \quad \text{(conformal and } R_{x2} > R_{x1}\text{)} \tag{2}$$

$$\frac{2}{E'} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \tag{3}$$

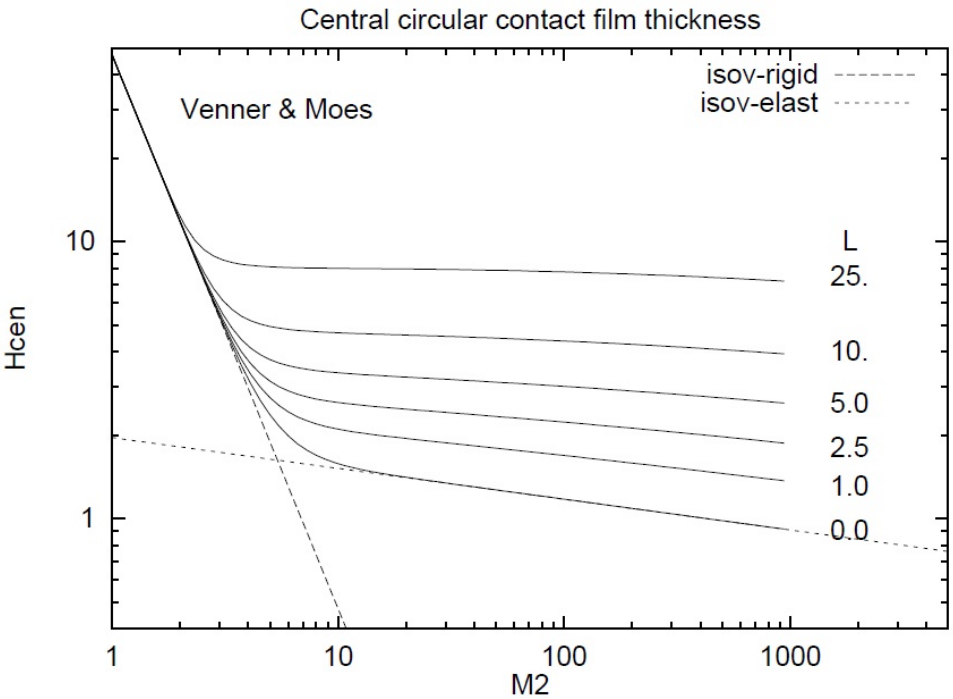
$$p_h = \frac{3w}{2\pi a^2} \tag{4}$$

$$a = \left(\frac{3wR}{2E'}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{5}$$

DH parameters $W_1=w_1/(E'R)$, $U=\eta_0 u/(E'R)$, $G=\alpha E'$, $H=h/R$
HD parameters $W_2=w/(E'R^2)$, $U=\eta_0 u/(E'R)$, $G=\alpha E'$, $H=h/R$
MV parameters $M_1=W_1/\sqrt{U}$, $L=GU^{1/4}$, $H=h/(R\sqrt{U})$
MV parameters $M_2=W_2/U^{3/4}$, $L=GU^{1/4}$, $H=h/(R\sqrt{U})$
EG: $H=1.31\,(UG)^{3/4}\,W_1^{-1/8}$
IR: $H=2.45/M_1$, $H=47.55/M_2^2$
IE: $H=2.05/M_1^{1/5}$, $H=1.96/M_2^{1/9}$
HD central = $1.69\, G^{0.53}\, U^{0.67}\, W_2^{-0.067}\, (1 - 0.61 \exp(-0.73 * 1.03 * (Ry/Rx)^{0.64}))$



Prénom / first name : Nom / name : Groupe / group :



Équation de Reynolds 2D / 2D Reynolds equation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho h\frac{U_1+U_2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho h\frac{V_1+V_2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)$$

Profil de vitesse dans le cas 2D / Velocity profile for 2D case

$$u=\left(1-\frac{z}{h}\right)U_1+\frac{z}{h}U_2-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}z(h-z)$$

$$v=\left(1-\frac{z}{h}\right)V_1+\frac{z}{h}V_2-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial y}z(h-z)$$

Contraintes de cisaillement dans le cas 2D / Shear stresses for 2D case

$$\tau_{xz}=\eta\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\tau_{yz}=\eta\frac{\partial v}{\partial z}$$

Équation de Reynolds 1D / 1D Reynolds equation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho h\frac{U_1+U_2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial t}(\rho h)$$

Profil de vitesse dans le cas 1D / Velocity profile for 1D case

$$u=\left(1-\frac{y}{h}\right)U_1+\frac{y}{h}U_2-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y(h-y)$$

Contrainte de cisaillement dans le cas 1D / Shear stress for 1D case

$$\tau=\eta\frac{\partial u}{\partial y}$$

1 Butée à rouleau - ≈10 pts

On étudie une butée à rouleaux cylindriques, Figure 1. Elle est constituée de deux parties planes (celle du bas est fixe et celle du haut est mobile à vitesse u_2) et de Z rouleaux cylindriques de rayon R et de longueur L. Une charge w verticale est appliquée du haut vers le bas sur la partie supérieure.

Les pièces sont en acier et roulent sans glisser sur les surfaces du haut et du bas. Le lubrifiant a une viscosité η et est incompressible. L'index de piezoviscosité est α.

L	2 cm
E'	2.3E11 Pa
R	5 mm
Z	10
w	10 000 N
η_0	0.01 Pa.s
α	0 Pa^{-1}

Considérons $u_1 = u_2 = 0$,

Question 1- quelle est la charge par unité de longueur sur chaque rouleau ?

Solution: $f = \dfrac{w}{ZL}$ (1 pts)

Question 2- donner la pression hertzienne entre les rouleaux et le plateau du haut en fonction de R, L, w, Z, E' ainsi que sa valeur numérique.

Solution: $p_h = \sqrt{\dfrac{wE'}{2\pi LRZ}}$ (1 pts)

$p_h = 605$ MPa (1 pts)

Considérons $u_2 > 0$, les centres des rouleaux avancent à $u_2/2$. C_i est le centre du rouleau numéro i.

Question 3- quel référentiel allez vous utiliser pour appliquer les équations d'épaisseur de film entre les rouleaux et les surfaces du haut et du bas ?

Solution: on se place dans le référentiel du contact (ici le référentiel de la cage qui avance avec le centre des rouleaux) (1 pts)

le référentiel du plateau du haut ou du bas est une réponse fausse.

Question 4- donner l'équation de la somme des vitesses u_s (vitesse de la surface inférieure plus vitesse de la surface supérieure du contact) pour un contact entre un rouleau et le plateau du haut. Justifiez en détail incluant un schéma de toutes les vitesses (orientation et expression) des surfaces dans le référentiel choisi.

Solution: $u_s = u_2/2 + u_2/2$ (1 pts)

schema (1 pts)

Considérons dans la suite de l'exercice que la somme des vitesses entre un rouleau et la surface du haut est $u_s = 5$ m/s et la charge par unité de longueur de $1E6$ N/m,

Question 5- quel est le régime de lubrification (IsoVisqueuxRigide / IsoVisqueuxElastique / PiezoVisqueuxElastique)? Justifiez.

Solution:
$W_1 = 8.7E-4$
$U = 4.4E-11$
$M_1 = 132$ (1 pts)
IE car $M_1 >> 5$ et $L = 0$
(1 pts)

Question 6- quelle est la valeur numérique de l'épaisseur minimale de film entre les rouleaux et le plateau du haut ?

Solution: $H^M_{IE\,m} = 0.77$ (1 pts)
$h_m = 25.5$nm (1 pts)

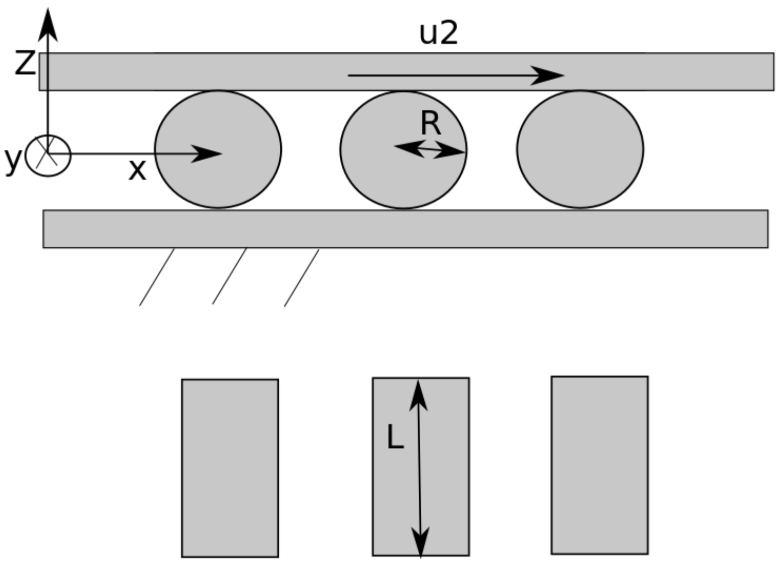


Figure 1: Butée à rouleaux pour $Z = 3$

2 Presse - ≈10pts

On considère deux surfaces planes et parallèles de largeur $2L$ suivant x ($-L \leq x \leq L$) et infinie suivant y séparée d'un jeu h. La surface du bas est fixe et la surface du haut a une vitesse négative u suivant z perpendiculaire aux surfaces (le jeu se réduit). Il n'y a pas de vitesses horizontales suivant x ou y. Le jeu est rempli de lubrifiant isovisqueux de viscosité η et incompressible.

Solution: $p'' = \frac{12\eta u}{h^3}$ (1 pts)
$p(-L) = p(L) = 0$ (1 pts)

Question 2- donner l'expression de la pression.

Solution: $p = -\frac{6\eta u}{h^3}(L^2 - x^2)$ (1 pts)

Utilisez dans la suite de cet exercice l'équation de pression de la forme $p = \phi(x^2 - L^2)$ avec ϕ une constante.

Question 3- donner l'expression de la charge par unité de longueur.

Solution: $2\int_0^L p(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{4\phi L^3}{3}$ (1 pts)

Question 4- faire deux schémas des vitesses dans le fluide : un des vitesses de Poiseuille et un des vitesses de Couette, en indiquant ces profils à la fois dans la partie des $x > 0$ et dans la partie des $x < 0$. Indiquer quel schéma correspond à Couette ou Poiseuille.

Solution: couette nuls, poiseuille opposés (2 pts)

Question 5- Donner l'expression du débit **total** expulsé.

Solution: $u = \frac{\phi x}{\eta} z(z - h)$
$Q = 2\int_0^h u(L)\,\mathrm{d}z$ (2 pts)
$Q = -\frac{\phi L h^3}{3\eta}$ (1 pts)

Question 6- que vaut la force horizontale exercée par le fluide sur la surface du haut ?

Solution: 0 par symétrie (1 pts)