

Interactions sol-structures

Actions du sol sur un écran

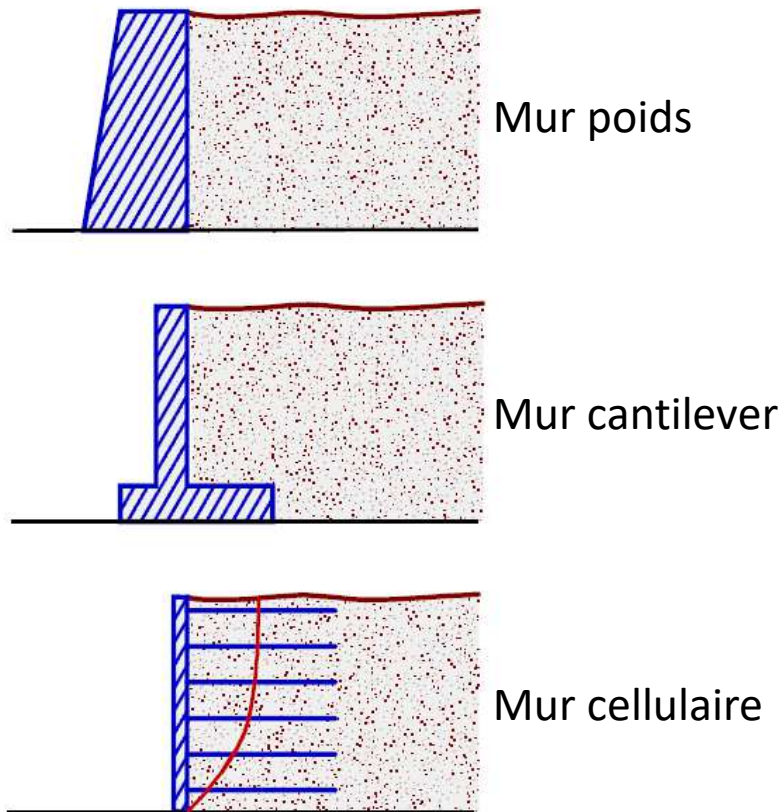
Introduction

1. Equilibres limites de poussée et butée
2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant
 1. Théorie de Coulomb
 2. Méthode de Rankine
 3. Méthode de Boussinesq
 4. Application
3. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol non pesant
 1. Méthode de Rankine
 2. Equilibre généralisé de Prandl
4. Calculs pratiques des coefficients de poussée et de butée
5. Cas d'un sol frottant et cohérent – Théorème des états correspondants
6. Choix de l'angle de frottement sol-écran
7. Application
8. Calculs de la poussée butée pour un talus de géométrie quelconque
9. Dispositions particulières de surcharges
10. Cas d'un multicouche - Application
11. Prise en compte de l'eau - Application

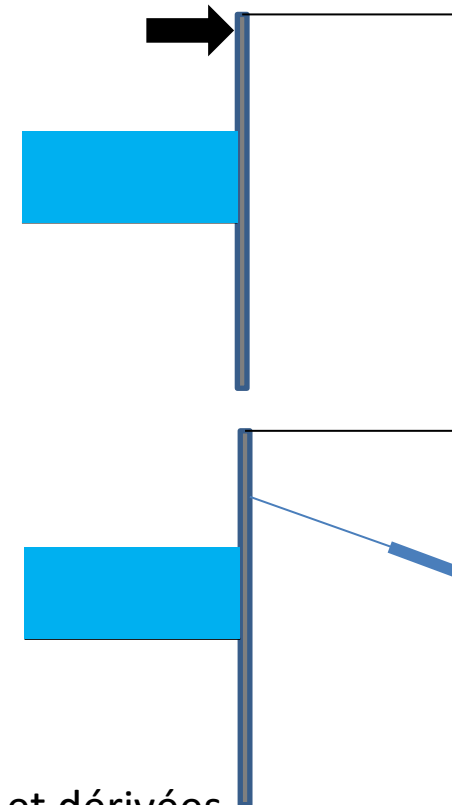
Introduction

Le dimensionnement de tous les ouvrages de soutènement nécessite la détermination des efforts de poussée (action du sol sur l'ouvrage) et de butée (action de l'ouvrage sur le sol).

Murs



Ecrans



parois moulées
parois berlinoises et dérivées
rideaux de palplanches

Introduction

Murs

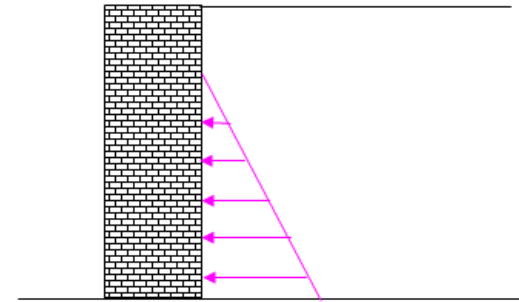




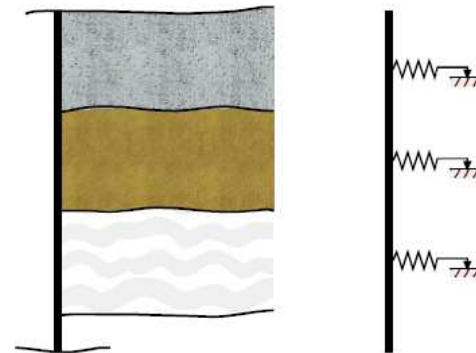
Introduction

Il existe principalement trois types de méthode de calcul des ouvrages de soutènement :

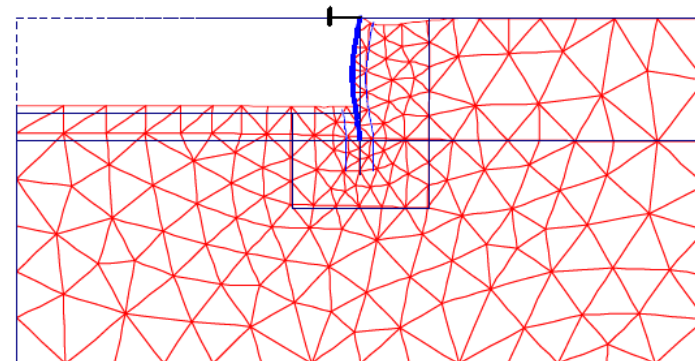
Sans interaction avec la structure, le sol est considéré à l'état d'équilibre limite (MEL)



Avec interaction avec la paroi et les tirants ou butons : méthodes aux coefficients de réaction (MISS) – Logiciel de type K-Réa



La méthode des éléments finis permet d'étudier la paroi comme une partie de l'ensemble constitué par le sol, la paroi et les tirants d'ancrage ou les butons (Plaxis)



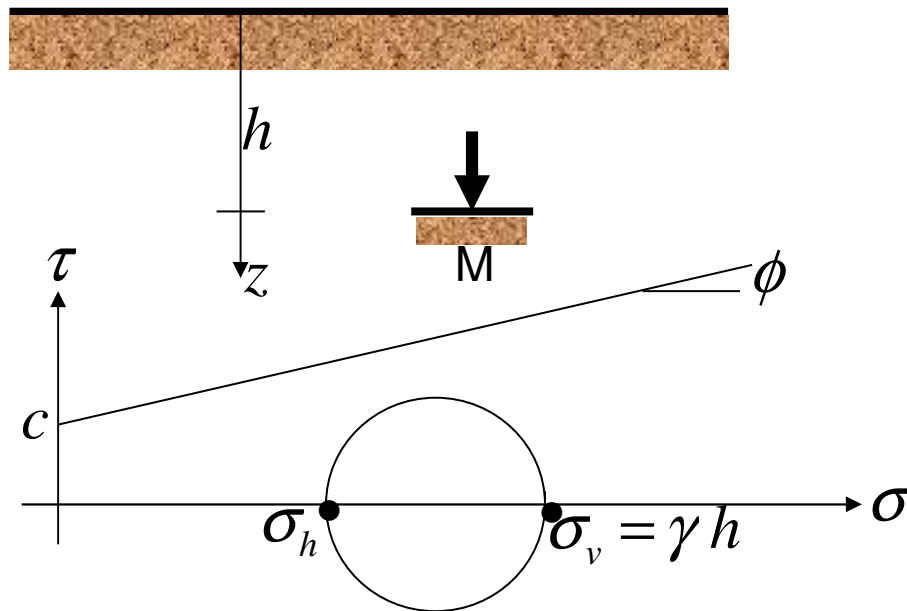
1. Equilibres limites de poussée et butée

Etat Initial

Contrainte sur une facette horizontale en un point M à une profondeur h avec poids volumique du sol γ

$\sigma_v = \gamma h$ est la contrainte principale majeure

σ_h est la contrainte principale mineure



$$\sigma_h = K_o \sigma_v$$

Si comportement élastique linéaire

$$K_o = \frac{\nu}{1-\nu}$$

Mais trop différent de la réalité

1. Equilibres limites de poussée et butée

Etat Initial

$$\sigma_h = K_o \sigma_v$$

Pour les sols pulvérulents et les sols fins **normalement consolidés** on pourra utiliser la formule simplifiée de **JAKY** : $K_o = 1 - \sin \varphi'$, si le terre plein est horizontal.

S'il existe un talus de pente β , la valeur du coefficient des terres au repos, avec la même définition sera $K_{o\beta} = K_o(1 + \sin \beta)$

Par rapport aux sols normalement consolidés la valeur de K_o augmente pour les sols surconsolidés, d'autant plus que le coefficient de surconsolidation R_{oc} est important. On pourra utiliser la relation suivante :

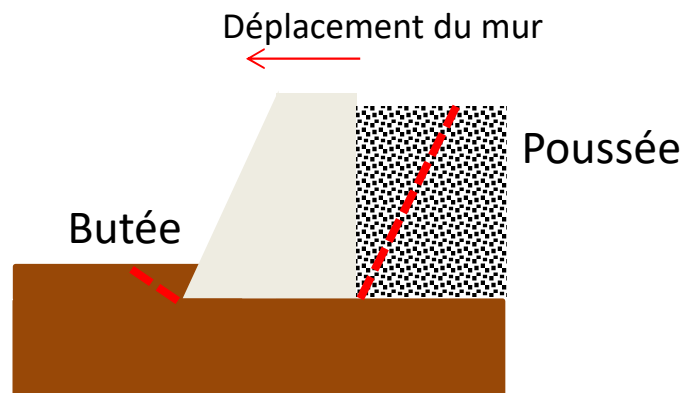
$$K_o = (1 - \sin \varphi') R_{oc}^{1/2}$$

pour un sol moyennement surconsolidé avec $R_{oc} = \sigma'_p / \sigma'_{vo}$

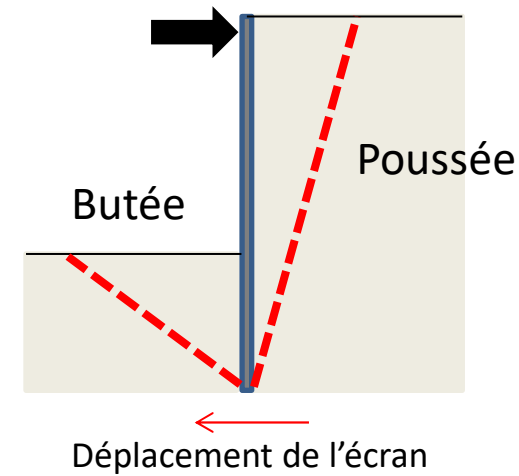
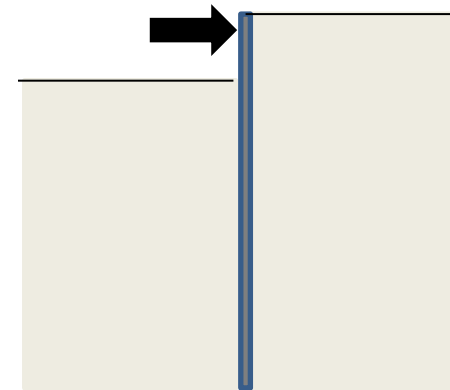
1. Equilibres limites de poussée et butée

Mobilisation des équilibres de poussée-butée

Mise en place d'un remblai compacté derrière un mur

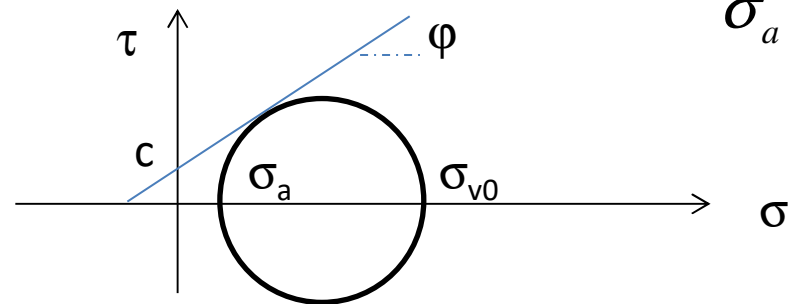
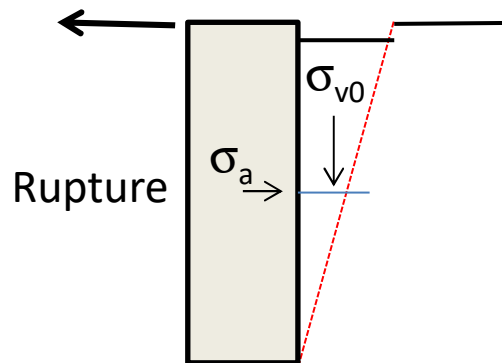
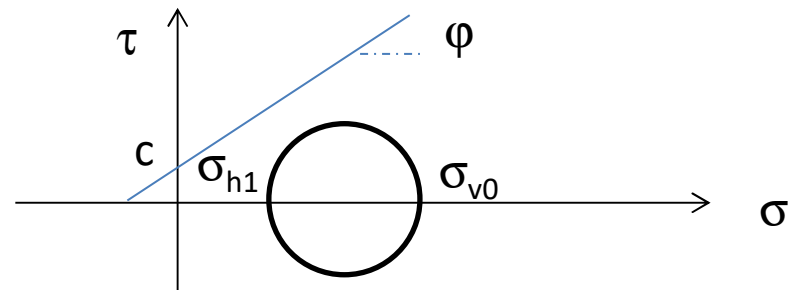
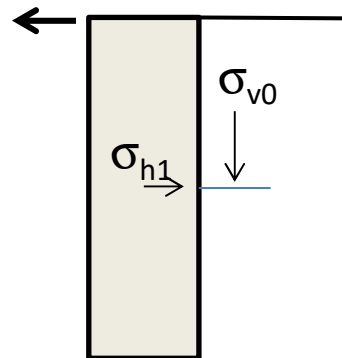
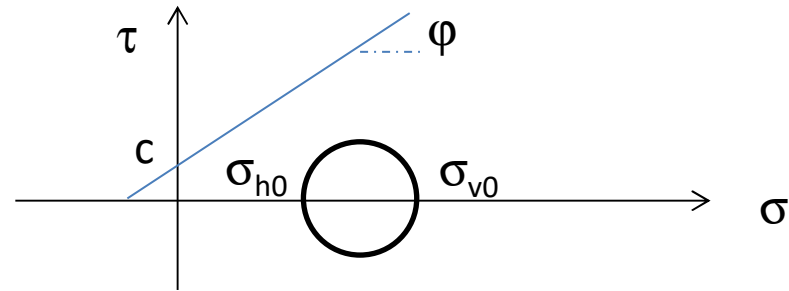
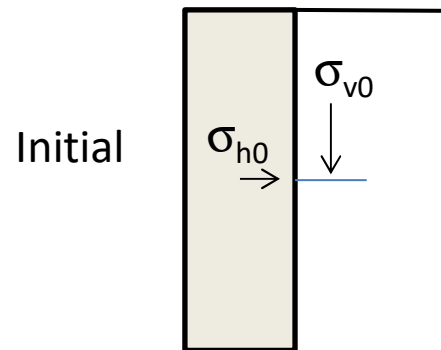


Excavation devant un écran rigide butonné en tête



1. Equilibres limites de poussée et butée

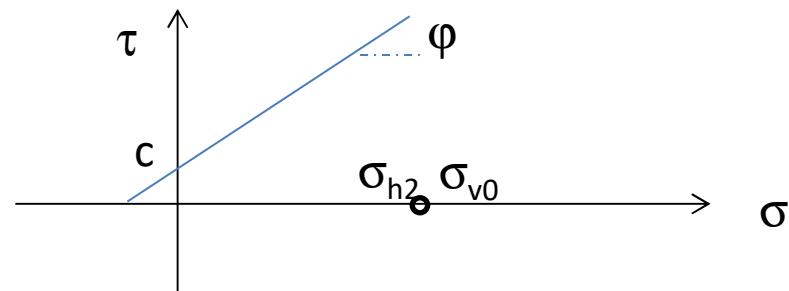
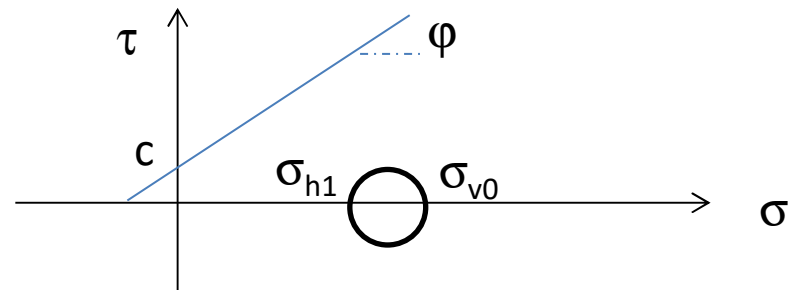
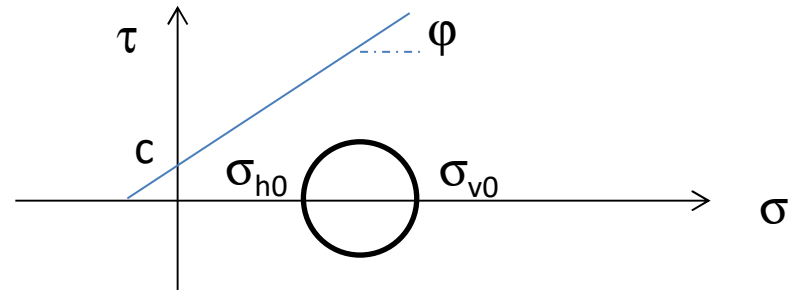
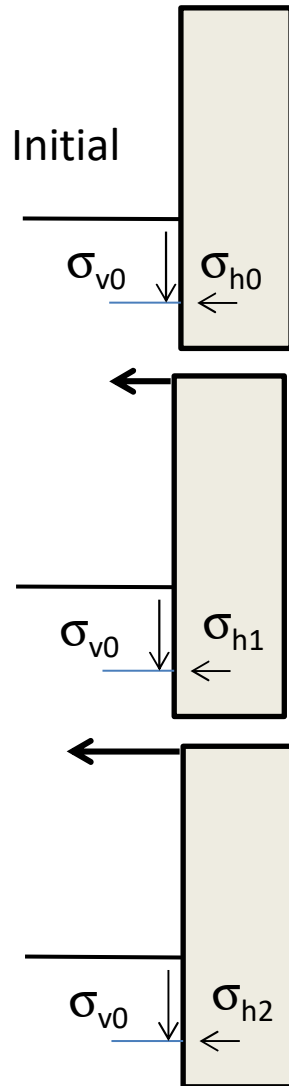
Mobilisation des équilibres de poussée-butée



$$\sigma_a = K_a \sigma_{v0}$$

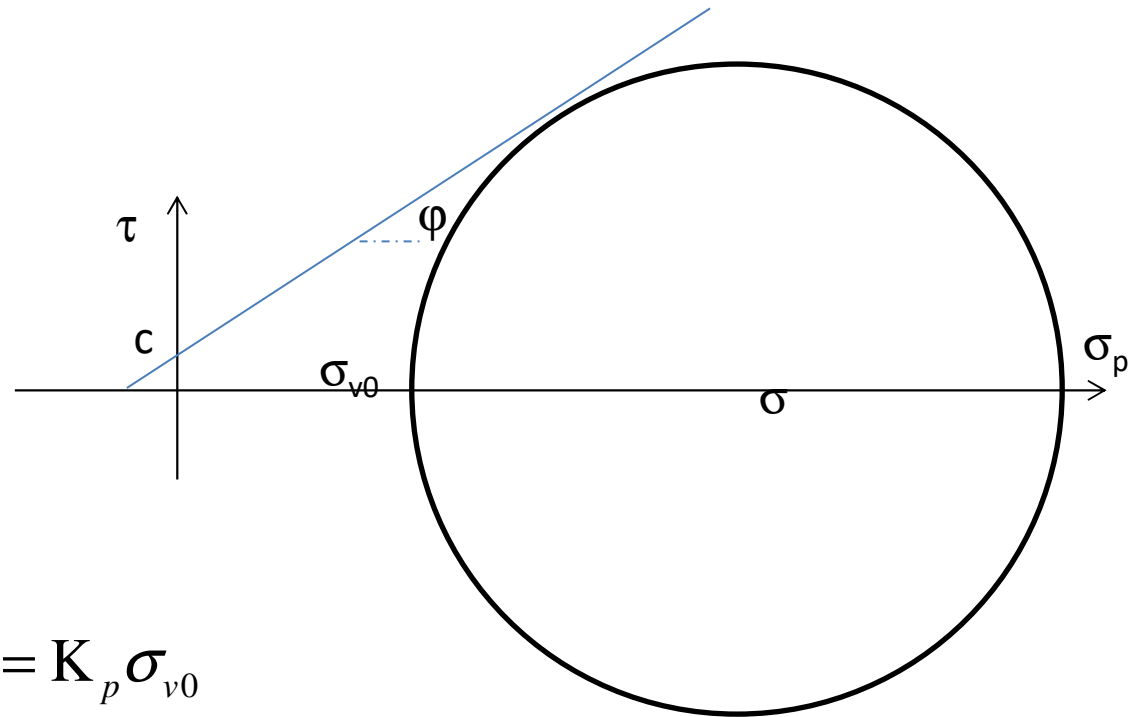
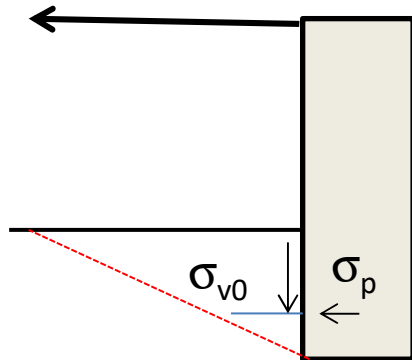
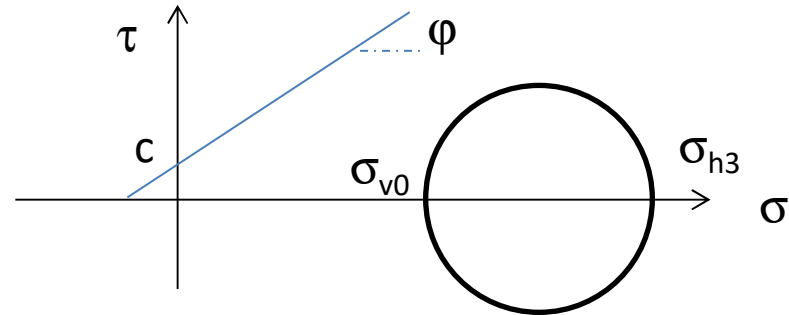
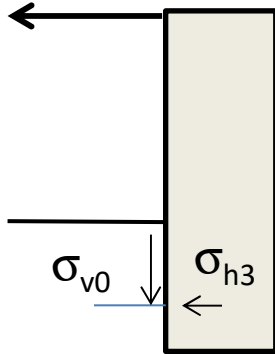
1. Equilibres limites de poussée et butée

Mobilisation des équilibres de poussée-butée



1. Equilibres limites de poussée et butée

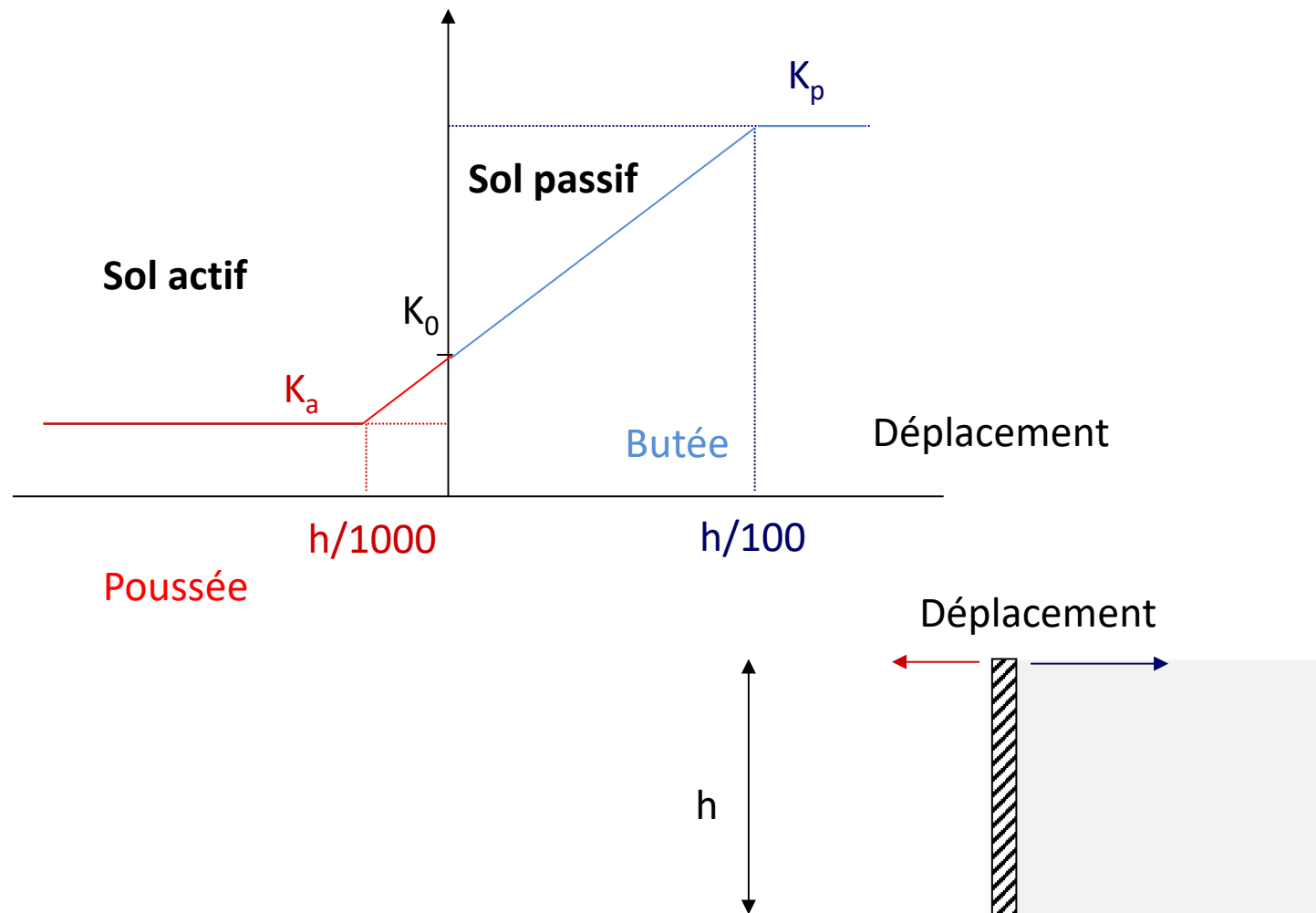
Mobilisation des équilibres de poussée-butée



$$\sigma_p = K_p \sigma_{v0}$$

1. Equilibres limites de poussée et butée

Mobilisation des équilibres de poussée-butée



2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

1. Théorie de Coulomb

Charles Augustin Coulomb (1736 - 1806)

Avant de devenir le célèbre physicien reconnu par ses travaux sur l'électricité et le magnétisme entre 1785 et 1791, C. A. Coulomb fut un ingénieur du génie militaire.



Entre 1764 et 1772, il participa à la construction du fort Bourbon à la Martinique.

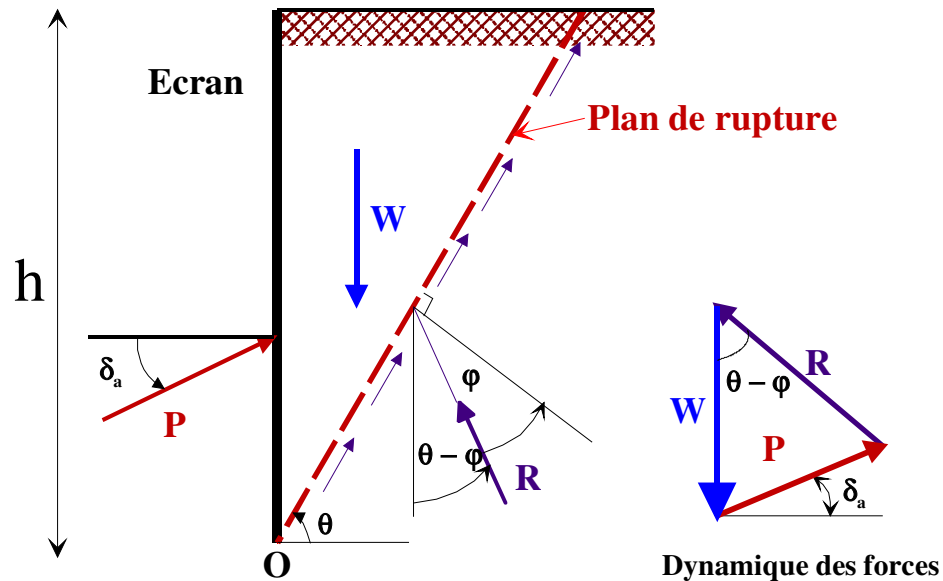
A son retour, il publia à l'Académie des Sciences un important mémoire de mécanique appliquée intitulé :

Sur une application des règles de Maximis & Minimis à quelques Problèmes de Statique, relatifs à l'Architecture

Il publia parallèlement un second mémoire intitulé : ***Résultats de plusieurs expériences destinées à déterminer la quantité d'action que les hommes peuvent fournir par leur travail journalier, suivant les différentes manières dont ils emploient leurs forces***

2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

1. Théorie de Coulomb



- Terre plein plat
- Sol sans cohésion
- Surface de rupture plane et passant par le pied de l'écran
- La contrainte de cisaillement $\tau = \sigma \cdot \tan \phi$ est totalement mobilisée le long du plan de rupture



Le coin de sol « glisse » le long du plan de rupture

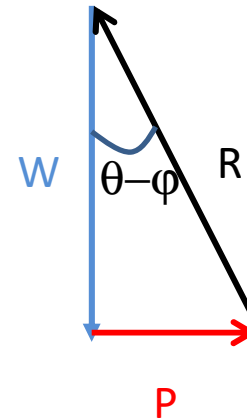
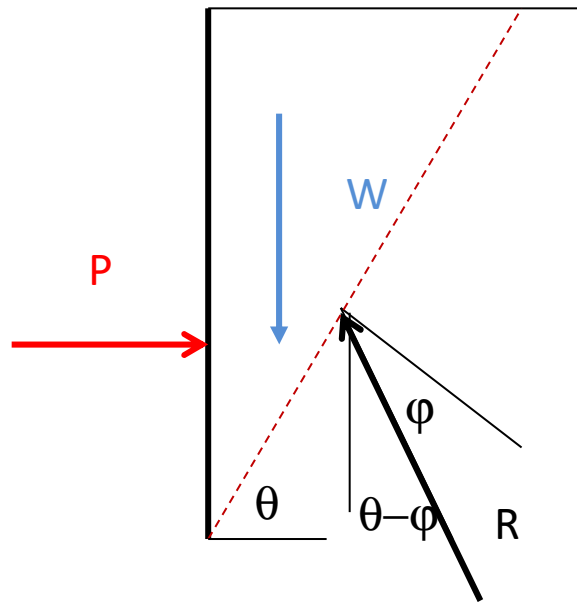
La réaction R fait un angle ϕ par rapport à la normale au plan de rupture

Le principe consiste à écrire l'équilibre des forces et déterminer P en fonction de θ pour la valeur maximale de $P = P_a$

2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

1. Théorie de Coulomb

Démonstration dans le cas où $\delta a = 0$



$$P = W \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\cos(\theta - \varphi)} = W \tan(\theta - \varphi)$$

$$P = \frac{1}{2} \gamma h^2 \cot \theta \tan(\theta - \varphi) = \frac{1}{2} K_a \gamma h^2$$

$$\frac{dP}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \gamma h^2 \left[-\frac{\tan(\theta - \varphi)}{\sin^2 \theta} + \frac{\cot \theta}{\cos^2(\theta - \varphi)} \right] = 0$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{4} \gamma h^2 \left[\frac{\sin 2\theta - \sin 2(\theta - \varphi)}{\sin^2 \theta \cos^2(\theta - \varphi)} \right] = 0$$

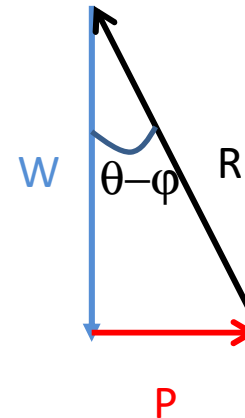
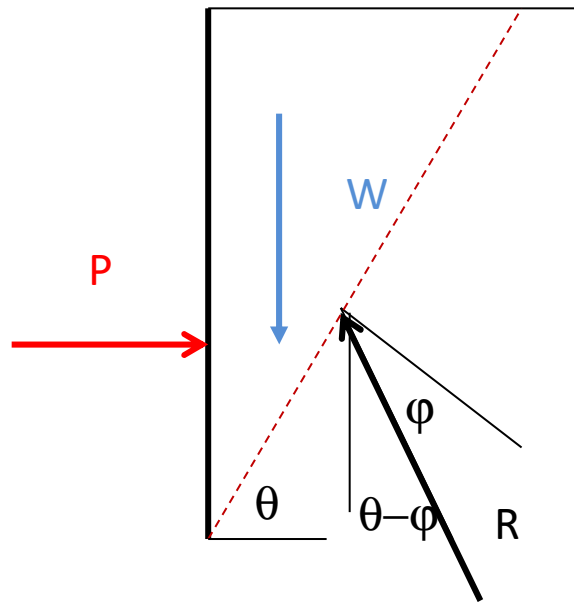
$\sin 2\theta - \sin(2\theta - \varphi)$ s'annule pour :

$$\theta_a = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$$

2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

1. Théorie de Coulomb

Démonstration dans le cas où $\delta a = 0$



$$K_a = \cot \theta_a \tan(\theta_a - \varphi)$$

$$K_a = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \varphi\right)$$

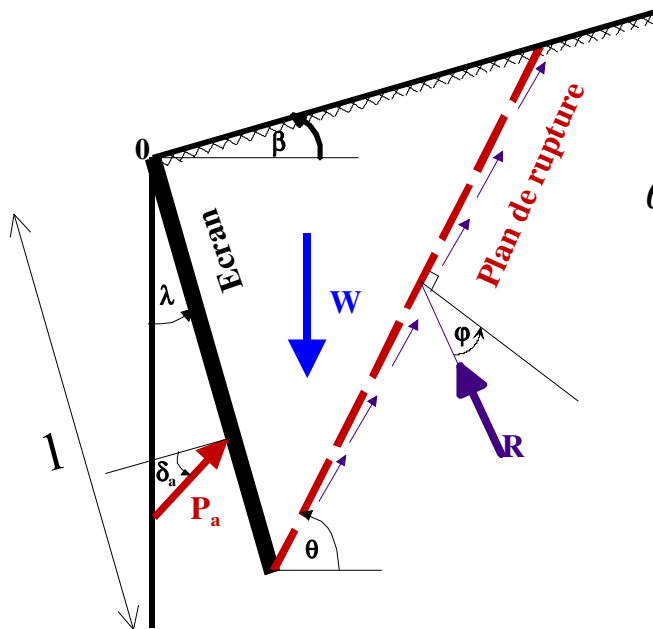
$$K_a = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$K_a = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

1. Théorie de Coulomb

En 1840, dans un mémoire sur « la stabilité des revêtements et de leur fondation », le général Poncelet a généralisé la méthode de Coulomb à un écran incliné de λ et à un sol surmonté d'un talus d'angle β



$$\theta_a = \varphi + a \cot \left[\tan(\varphi - \lambda) + \frac{1}{\cos(\varphi - \lambda)} \sqrt{\frac{\sin(\delta_a + \varphi) \cos(\beta - \lambda)}{\sin(\varphi - \beta) \cos(\delta_a + \lambda)}} \right]$$

$$K_a = \frac{\cos^2(\varphi - \lambda)}{\cos(\lambda + \delta_a) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta_a) \sin(\varphi - \beta)}{\cos(\lambda + \delta_a) \cos(\beta - \lambda)}} \right]^2}$$

avec δ_a , λ et β positifs dans le sens trigonométrique

2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

1. Théorie de Coulomb

Les limites de la méthodes de Coulomb

Pas applicable dans le cas de la butée pour laquelle les surfaces de rupture ne peuvent être assimilées à des plans.

La méthode de Coulomb donne des résultats acceptables pour le calcul de la poussée :

- de sols sans cohésion,
- en supposant que le frottement est totalement mobilisé sur le plan de rupture,
- pour δ , λ et β positifs.

Par contre elle n'indique pas la répartition des contraintes le long de l'écran.

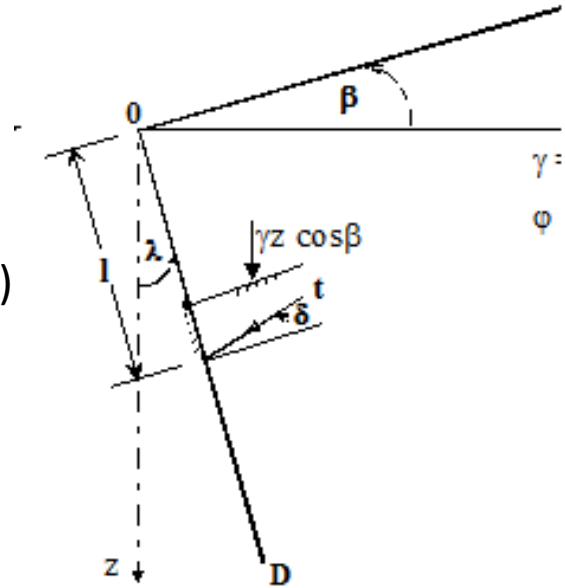
2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

2. Méthode de Rankine

En plus des hypothèses suivantes :

- sol semi-infini, homogène, isotrope,
- condition de déformation plane,
- critère de rupture de MOHR-COULOMB
- massif à surface libre plane,

RANKINE, professeur de Génie Civil et de Mécanique à l'Université de Glasgow, a publié en 1856 un mémoire sur la stabilité des terres sans cohésion. Dans ce mémoire, il a rajouté l'hypothèse que la présence d'un écran ne modifie pas la répartition des contraintes dans le massif.

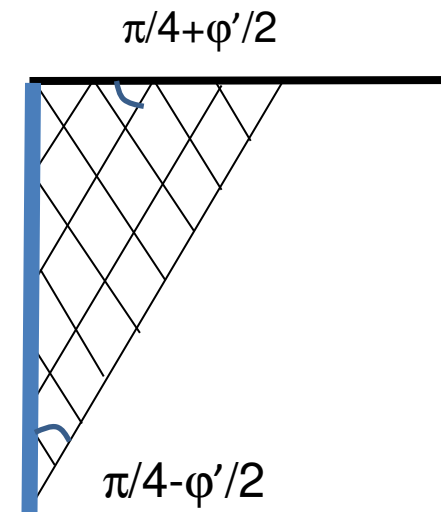
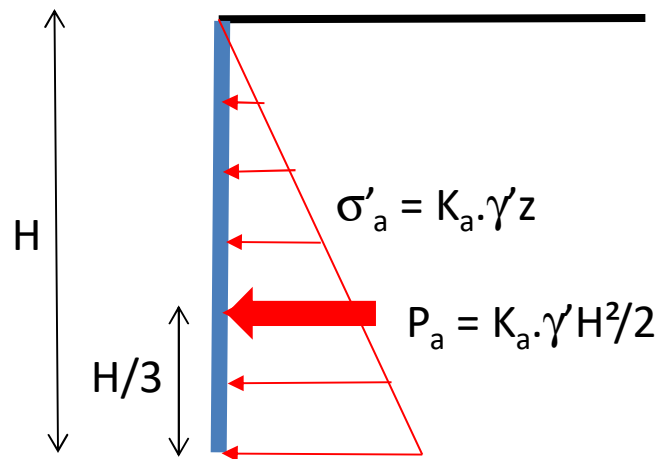


2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

2. Méthode de Rankine

Application de la méthode de Rankine pour un cas simple de poussée :

- **sol purement frottant ($c' = 0$),**
- écran vertical ($\lambda = 0$),
- surface libre horizontale ($\beta = 0$),
- sans frottement entre le sol et l'écran ($\delta = 0$).

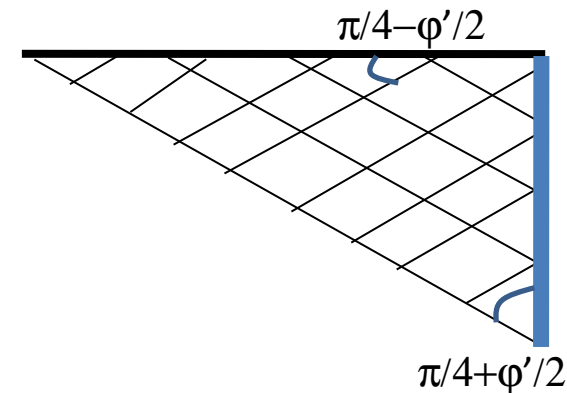
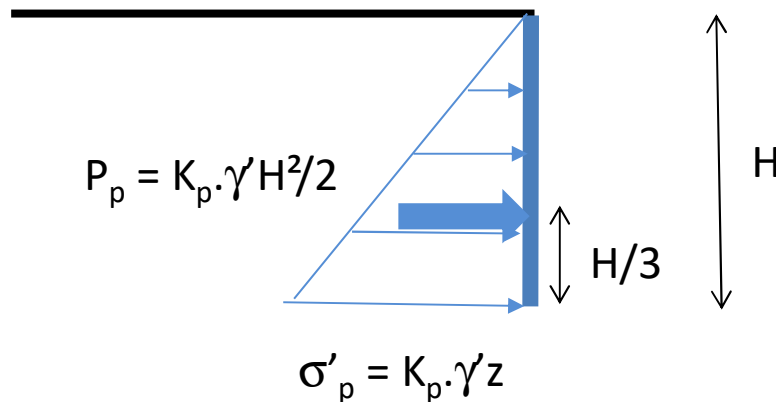


2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

2. Méthode de Rankine

Application de la méthode de Rankine pour un cas simple de butée :

- **sol purement frottant ($c' = 0$),**
- écran vertical ($\lambda = 0$),
- surface libre horizontale ($\beta = 0$),
- sans frottement entre le sol et l'écran ($\delta = 0$).



2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

2. Méthode de Rankine

En résumé pour des cas simples :

- écran vertical ($\lambda = 0$),
- surface libre horizontale ($\beta = 0$),
- sans frottement entre le sol et l'écran ($\delta = 0$).

	POUSSEE	BUTEE
Sol frottant $\varphi' \neq 0, c' = 0$	$\sigma'_a = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right) \sigma'_{v0}$	$\sigma'_p = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right) \sigma'_{v0}$
Sol cohérent $\varphi_u = 0, c_u \neq 0$	$\sigma_a = \sigma_v - 2C_u$	$\sigma_p = \sigma_v + 2C_u$
Sol frottant et cohérent $\varphi' \neq 0, c' \neq 0$	$\sigma'_a = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right) \sigma'_{v0} - 2c' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right)$	$\sigma'_p = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right) \sigma'_{v0} + 2c' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right)$

2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

2. Méthode de Rankine

Cas général :

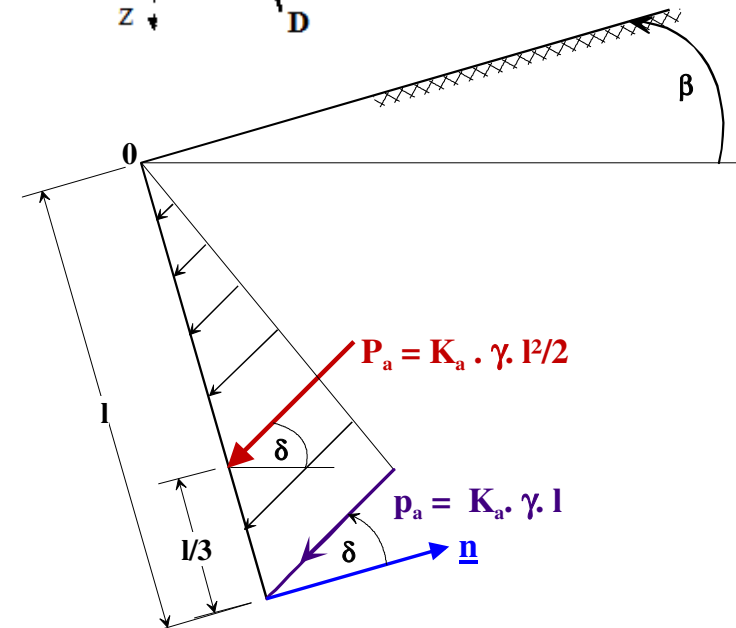
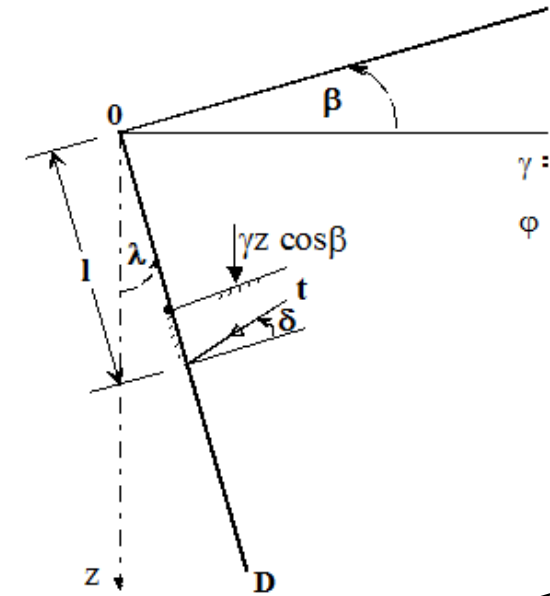
- **sol purement frottant ($c' = 0$),**
- écran incliné ($\lambda \neq 0$),
- surface libre inclinée ($\beta \neq 0$),
- sans frottement entre le sol et l'écran ($\delta = 0$).

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \varphi' \sin (2\lambda + \alpha - \beta)}{1 - \sin \varphi' \cos (2\lambda + \alpha - \beta)} \quad \text{indépendant de } z$$

$$\text{avec} \quad \sin \alpha = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi'}$$

$$P_a = \left\{ \frac{\cos (\lambda - \beta) \sin \alpha}{\cos \delta \sin (\alpha + \beta)} [1 - \sin \varphi' \cos (2\lambda + \alpha - \beta)] \right\} \gamma \times \ell$$

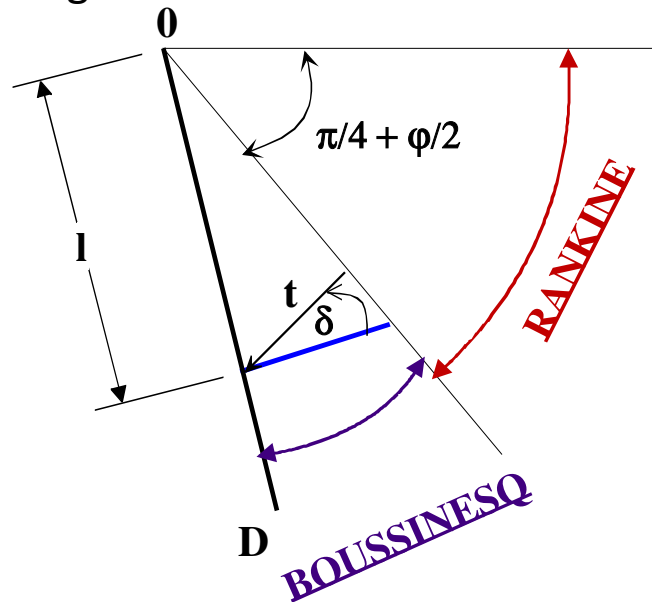
L'inconvénient de la théorie de RANKINE est que l'angle δ de la contrainte de poussée avec la normale à l'écran dépend des conditions géométriques mais n'a pas la réalité physique d'un angle de frottement sol-écran.



2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

3. Méthode de Boussinesq

BOUSSINESQ, Professeur à la Faculté de Lille, (1882) a amélioré la théorie de RANKINE en prenant l'interaction réelle entre le sol et l'écran, c'est-à-dire en choisissant la valeur de l'angle de frottement δ sol-écran et en considérant que les lignes de ruptures ne sont pas rectilignes.



Equilibre de Rankine

Le problème n'a été résolu qu'en 1948 par **CAQUOT** et **KERISEL** en résolvant les équations d'équilibre en coordonnées polaires (les calculs étant améliorés par ABSI)

Conditions limites
liées à l'écran



Tables de Caquot, Kerisel et Absi



K_a et K_p en fonction de $(\beta, \lambda, \delta, \phi')$

2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

3. Méthode de Boussinesq

CAQUOT (1881 – 1976)

Ingénieur des Ponts et Chaussées

Il contribua au développement de la mécanique des sols, le béton armé, les ponts à haubans, l'hydraulique.

Parmi les nombreux ouvrages qu'il a contribué à construire : la grande statue du Christ à Rio de Janeiro, le pont George V à Glasgow (Ecosse) ou encore l'usine marémotrice sur la Rance en Bretagne.

Il consacra une partie de sa vie à l'aéronautique : Sup'Aero, ONERA, créateur de la plus grande soufflerie de l'époque



KERISEL (1908 – 2005)

Ingénieur général des ponts et chaussées

Directeur de la Construction au Ministère de la Reconstruction de 1944 à 1951

Fondateur de Simecsol (1952-1979) → Arcadis (2002)

Professeur titulaire de la chaire de mécanique des sols à l'ENPC de 1951 à 1969

Il entama une deuxième « carrière » d'égyptologue et se passionna alors pour les ouvrages de l'Égypte des Pharaons



2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

3. Méthode de Boussinesq

Exemple d'une table de poussée (Ka)

$$\frac{\beta}{\varphi'} = 0,00$$

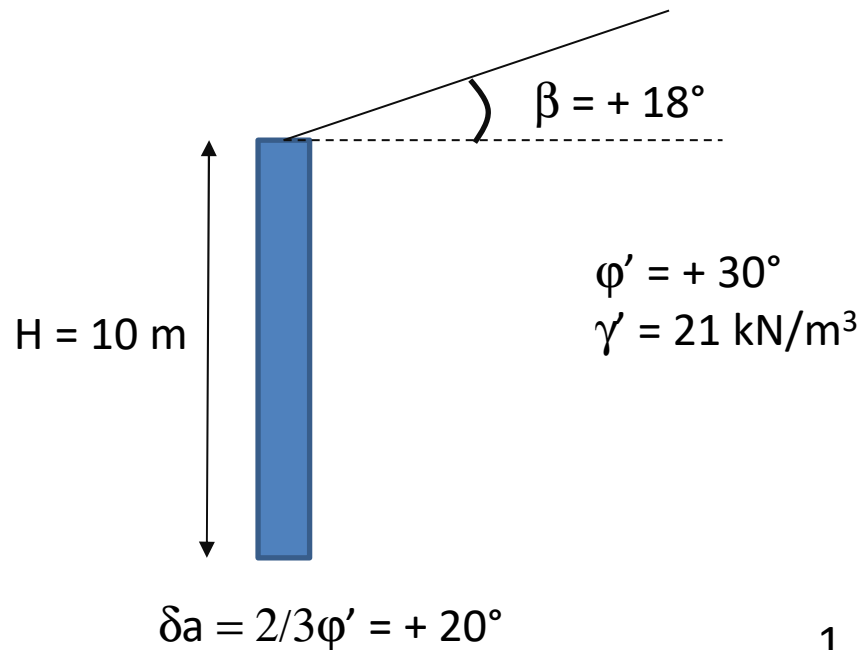
$$\frac{\delta}{\varphi'} = 0,66$$

$\lambda \backslash \varphi$	10	15	20	25	30	35	40	45
40	0,644							
35	0,669	0,616	0,615					
30	0,687	0,619	0,598	0,513	0,473			
25	0,698	0,619	0,567	0,498	0,450	0,410	0,374	
20	0,702	0,614	0,540	0,478	0,425	0,379	0,340	0,305
15	0,700	0,602	0,519	0,454	0,396	0,347	0,304	0,267
10	0,691	0,585	0,499	0,427	0,366	0,314	0,269	0,230
5	0,676	0,563	0,471	0,396	0,333	0,280	0,235	0,196
0	0,656	0,537	0,442	0,364	0,300	0,247	0,202	0,163
-5	0,630	0,506	0,408	0,330	0,266	0,214	0,170	0,134
-10	0,600	0,472	0,373	0,295	0,233	0,182	0,141	0,107
-15	0,565	0,435	0,336	0,260	0,200	0,152	0,114	0,083
-20	0,525	0,396	0,299	0,225	0,168	0,124	0,089	0,062
-25	0,483	0,354	0,260	0,190	0,138	0,098	0,067	0,044
-30	0,437	0,312	0,222	0,157	0,110	0,074	0,048	0,030
-35	0,389	0,268	0,185	0,126	0,084	0,054	0,032	0,017
-40	0,339	0,225	0,149	0,097	0,061	0,036	0,019	0,008
-45	0,288	0,183	0,115	0,070	0,041	0,022	0,009	
-50	0,237	0,142	0,084	0,047	0,024	0,010		
-55	0,186	0,104	0,056	0,028	0,011			
-60	0,138	0,070	0,033	0,012				
-65	0,092	0,040	0,014					
-70	0,052	0,016						
-75	0,020							
-80								

2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

4. Application

Calcul de la poussée d'un terrain surmonté d'un talus semi-infini sur un écran vertical



1. Méthode de Coulomb
2. Méthode Rankine
3. Tables de Caquot, Kérisel et Absi

2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

4. Application

Calcul de la poussée d'un terrain surmonté d'un talus semi-infini sur un écran vertical

1. Méthode de Coulomb

$$K_a = \frac{\cos^2(\varphi - \lambda)}{\cos(\lambda + \delta_a) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta_a) \sin(\varphi - \beta)}{\cos(\lambda + \delta_a) \cos(\beta - \lambda)}} \right]^2} = \frac{\cos^2(30)}{\cos(20) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(50) \sin(12)}{\cos(20) \cos(18)}} \right]^2} = 0,394$$

$$Pa = \frac{1}{2} K_a \cdot \gamma \cdot H^2 = 414 \text{ kN/m}$$

$$\theta_a = \varphi + a \cot \left[\tan(\varphi - \lambda) + \frac{1}{\cos(\varphi - \lambda)} \sqrt{\frac{\sin(\delta_a + \varphi) \cos(\beta - \lambda)}{\sin(\varphi - \beta) \cos(\delta_a + \lambda)}} \right]$$

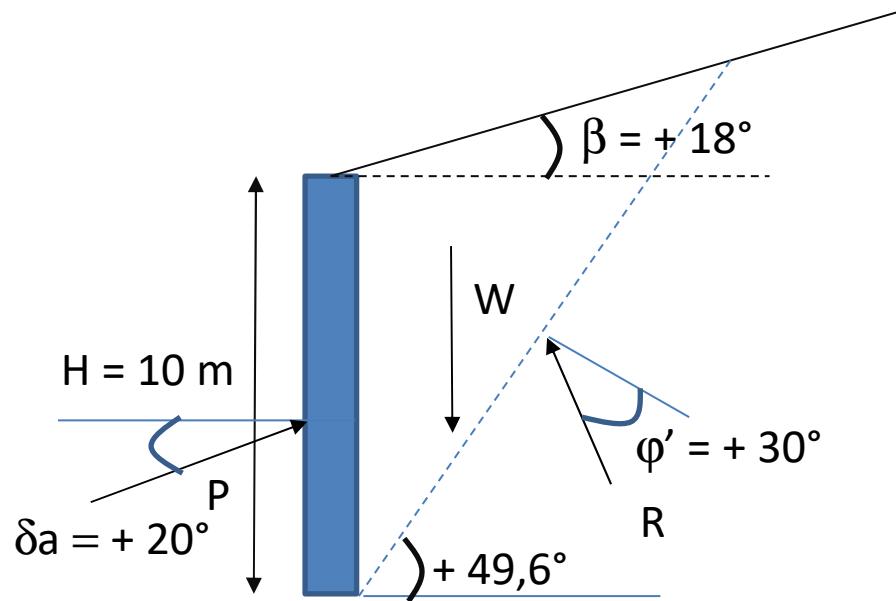
$$\theta_a = 30 + a \cot \left[\tan(30) + \frac{1}{\cos(30)} \sqrt{\frac{\sin(50) \cos(18)}{\sin(12) \cos(20)}} \right] = 49,6^\circ$$

2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

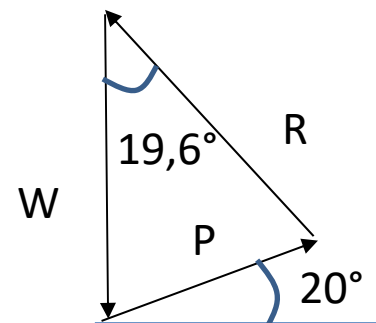
4. Application

Calcul de la poussée d'un terrain surmonté d'un talus semi-infini sur un écran vertical

1. Méthode de Coulomb



$$S_{\text{coin de Coulomb}} = 65,6 \text{ m}^2$$
$$W = 1378 \text{ kN/m}$$



2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

4. Application

Calcul de la poussée d'un terrain surmonté d'un talus semi-infini sur un écran vertical

2. Méthode de Rankine

Avec la méthode de Rankine l'angle δ ne tient pas compte du frottement sol mur. Dans le cas d'un écran vertical, on a vu que $\delta = \beta$.

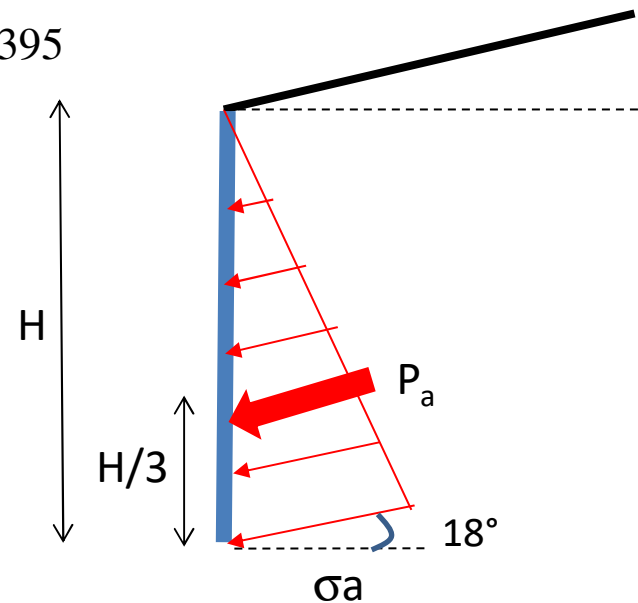
$$K_a = \frac{\cos(\lambda - \beta) \sin \alpha}{\cos \delta \sin(\alpha + \beta)} [1 - \sin \varphi' \cos(2\lambda + \alpha - \beta)]$$

$$K_a = \frac{\cos(-18) \sin 38,17}{\cos(18) \sin(56,17)} [1 - \sin 30 \cos(20,17)] = 0,395$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \beta}{\sin \varphi'} = 38,17^\circ$$

$$\sigma_a = K_a \cdot \gamma \cdot H = 82,95 \text{ kPa}$$

$$P_a = K_a \cdot \gamma H^2 / 2 = 414,75 \text{ kN/m}$$



2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

4. Application

Calcul de la poussée d'un terrain surmonté d'un talus semi-infini sur un écran vertical

3. Tables de Caquot, Kérisel et Absi

$$\frac{\delta}{\varphi} = +0,6 \quad , \quad \frac{\varepsilon}{\varphi} = +\frac{2}{3}$$

$\lambda \backslash \varphi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°
+25°	0,826										
+20°	0,823	0,766	0,712	0,659							
+15°	0,813	0,743	0,677	0,614	0,554	0,498	0,445	0,396			
+10°	0,798	0,715	0,638	0,566	0,499	0,439	0,382	0,328	0,282	0,237	0,197
+5°	0,776	0,681	0,596	0,518	0,447	0,383	0,324	0,271	0,224	0,181	0,143
0°	0,748	0,644	0,551	0,468	0,395	0,329	0,271	0,219	0,174	0,135	0,100
-5°	0,716	0,603	0,504	0,419	0,344	0,279	0,223	0,174	0,132	0,097	0,068
-10°	0,678	0,558	0,456	0,369	0,295	0,233	0,179	0,135	0,098	0,068	0,044
-15°	0,636	0,511	0,407	0,321	0,249	0,190	0,141	0,101	0,069	0,044	0,026
-20°	0,590	0,462	0,358	0,274	0,206	0,151	0,107	0,073	0,046	0,027	0,014

2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

4. Application

Calcul de la poussée d'un terrain surmonté d'un talus semi-infini sur un écran vertical

3. Tables de Caquot, Kérisel et Absi

$$\frac{\beta}{\varphi} = +0,6 \quad , \quad \frac{\delta}{\varphi} = +\frac{2}{3}$$

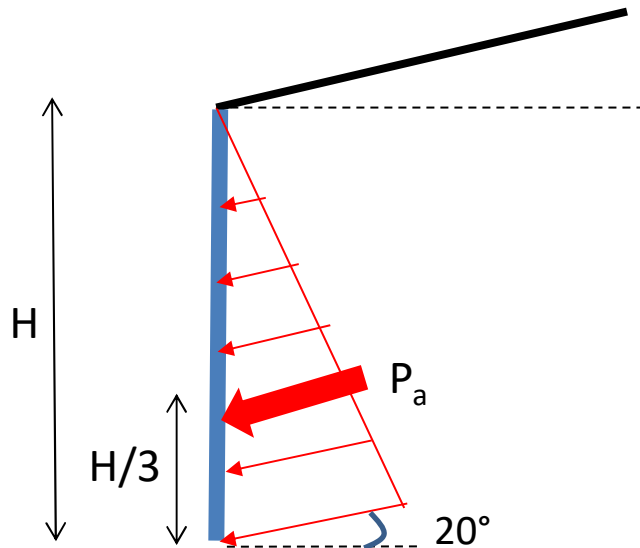
$\lambda \backslash \varphi$	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°
+25°	0,826										
+20°	0,823	0,766	0,712	0,659							
+15°	0,813	0,743	0,677	0,614	0,554	0,498	0,445	0,396			
+10°	0,798	0,715	0,638	0,566	0,499	0,439	0,382	0,328	0,282	0,237	0,197
+5°	0,776	0,681	0,596	0,518	0,447	0,383	0,324	0,271	0,224	0,181	0,143
0°	0,748	0,644	0,551	0,468	0,395	0,329	0,271	0,219	0,174	0,135	0,100
-5°	0,716	0,603	0,504	0,419	0,344	0,279	0,223	0,174	0,132	0,097	0,068
-10°	0,678	0,558	0,456	0,369	0,295	0,233	0,179	0,135	0,098	0,068	0,044
-15°	0,636	0,511	0,407	0,321	0,249	0,190	0,141	0,101	0,069	0,044	0,026
-20°	0,590	0,462	0,358	0,274	0,206	0,151	0,107	0,073	0,046	0,027	0,014

2. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol pesant

4. Application

Calcul de la poussée d'un terrain surmonté d'un talus semi-infini sur un écran vertical

3. Tables de Caquot, Kérisel et Absi



$$K_a = 0,395$$

$$\sigma_a = K_a \cdot \gamma \cdot H = 82,95 \text{ kPa}$$

$$P_a = K_a \cdot \gamma H^2 / 2 = 414,75 \text{ kN/m}$$

	K_a	P_a	δ_a
Coulomb	0,394	414 kN/m	20°
Rankine	0,395	414,75 kN/m	18°
Caquot	0,395	414,75 kN/m	20°

3. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol non pesant

1. Méthode de Rankine

Principe

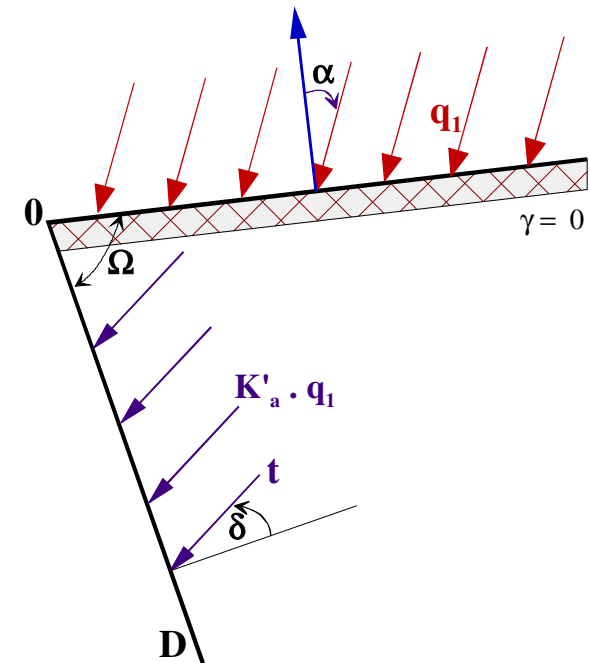
Dans ce cas le sol est considéré comme un milieu non pesant à travers lequel se transmettent des contraintes à l'écran.

Sol est non pesant + la surcharge répartie semi-infinie

- ➡ le tenseur des contraintes est le même en tout point du sol.
- ➡ Un cercle de Mohr unique pour l'ensemble du massif de sol.

Il suffit donc de remplacer la direction verticale du poids volumique par la direction de la surcharge q_1 et de traiter le problème comme pour le sol pesant

Les lignes de glissement forment un réseau de droites faisant entre elles un angle de $\pi/2 - \varphi$
Le long du plan OD (écran fictif), la contrainte a une *obliquité* δ_a (de calcul) *constante* et a une *intensité constante*.



3. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol non pesant

1. Méthode de Rankine

Application

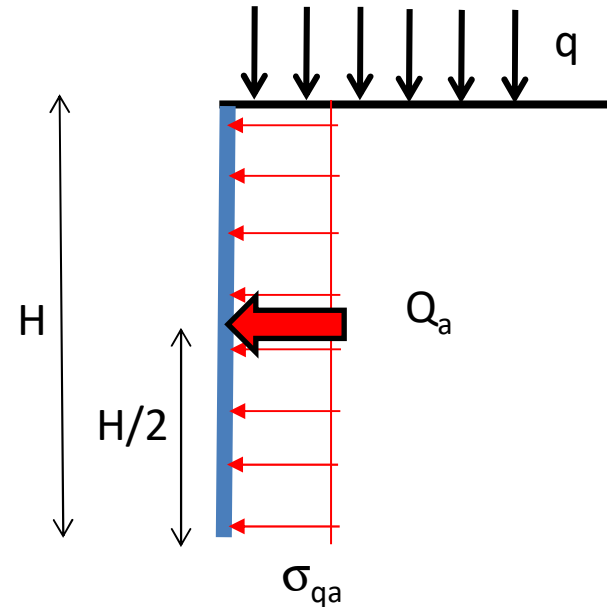
- **sol purement frottant ($c' = 0$),**
- écran vertical ($\lambda = 0$),
- surface libre inclinée ($\beta \neq 0$),
- charge q verticale répartie semi-infinie ($\Omega = 90^\circ$ et $\alpha = 0$),
- δ est donnée par construction dans le plan de Mohr.

De part les hypothèses, la contrainte verticale est égale à q en tout point
 K'_a étant indépendant de z

➡ σ_{qa} est constant le long de l'écran

$$\sigma_{qa} = K'_a \cdot q$$

$$Q_a = K'_a \cdot q \cdot H$$



3. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol non pesant

2. Equilibre généralisé de Prandl

Comme pour le sol pesant, la méthode de Rankine n'est pas satisfaisante puisque le frottement réel entre le sol et l'écran n'est pas pris en compte

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_\theta = K'_a q_1$$

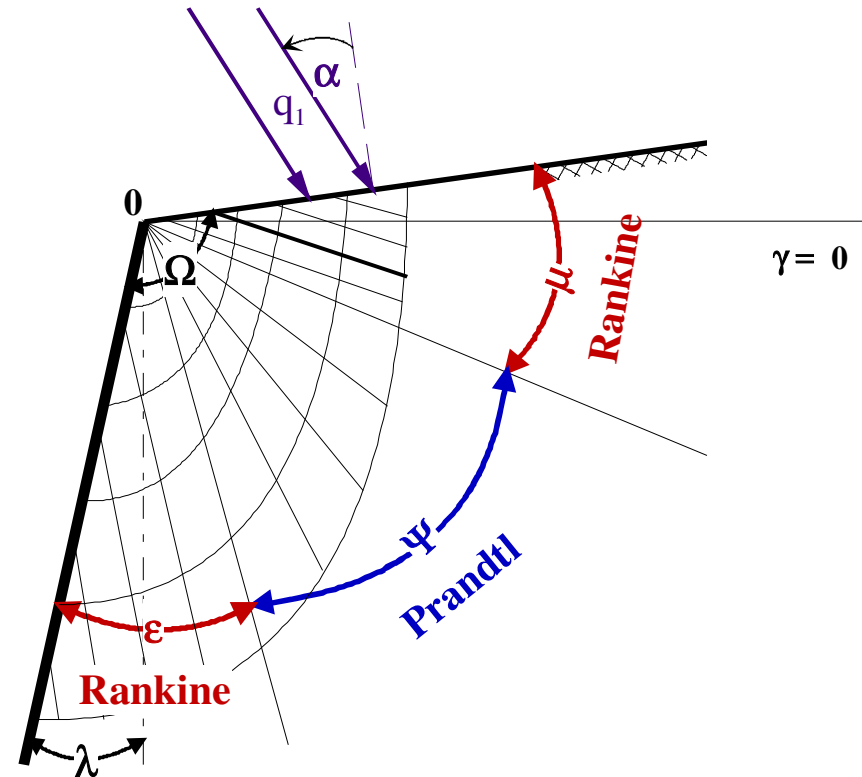
$$K'_a = \frac{\cos \delta - \sin \varphi \cos \omega_2}{\cos \alpha + \sin \varphi \cos \omega_1} e^{-2\Psi \tan \varphi}$$

$$\sin \omega_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \quad \sin \omega_2 = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}$$

$$\mu = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \frac{\alpha + \omega_1}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} - \frac{\omega_2 - \delta}{2}$$

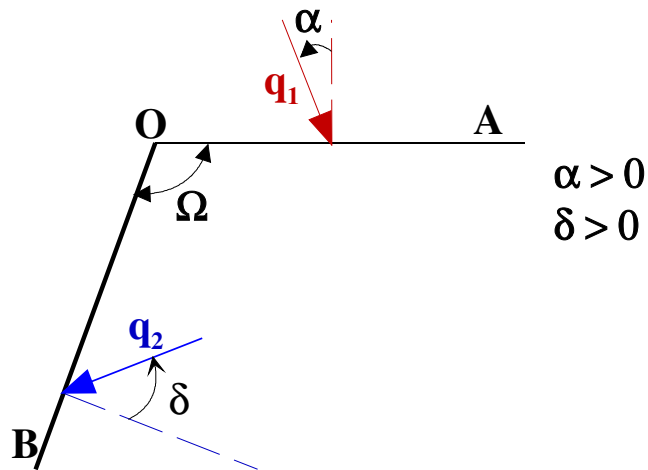
$$\Psi = \Omega - \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha - \delta + \omega_1 + \omega_2}{2}$$



3. Calculs des coefficients de poussée et de butée d'un sol non pesant

2. Equilibre généralisé de Prandl

Les formules donnant les coefficients de poussée ou de butée pour les surcharges transmises par un sol non pesant ont été tabulées par **I'HERMINIER et ABSI** (Cahiers de la Recherche, n° 16 et 28 - Paris - Eyrolles 1962 et rééditées en 1990)



Pour la poussée : $q_2 = K'_a q_1$

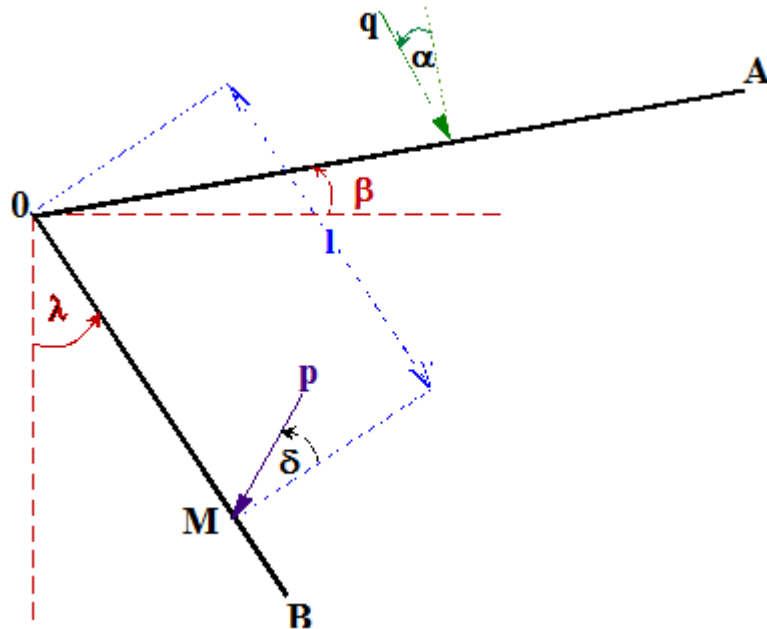
Pour la butée : $K'_p = \frac{1}{K'_a}$

$\varphi' = 30^\circ \quad \Omega = 90^\circ$

$\alpha \backslash \delta$	0	5	10	15	20	25
-20	0,696	0,672	0,658	0,651	0,653	0,663
-10	0,465	0,446	0,434	0,427	0,425	0,429
0	0,333	0,319	0,31	0,305	0,304	0,306
10	0,253	0,243	0,236	0,232	0,231	0,233
20	0,203	0,194	0,189	0,185	0,185	0,186

4. Calculs pratiques des coefficients de poussée et de butée

Action du sol



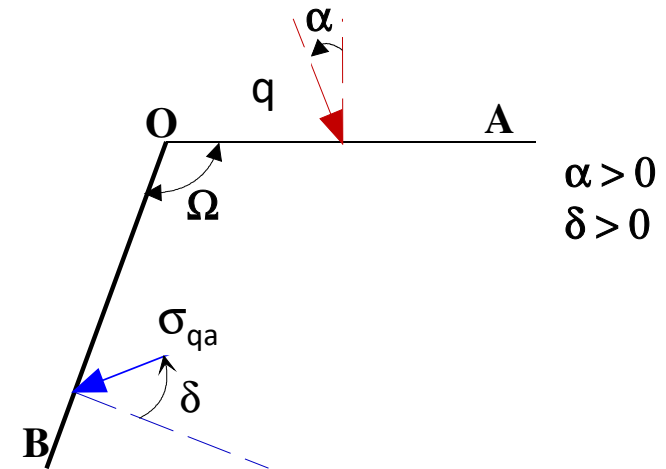
Tables de Caquot, Kerisel et Absi

➡ K_a

$$\sigma_a = k_a \times \gamma \times \ell$$

$$P_a = 0,5 \cdot \gamma \cdot k_a \cdot l^2$$

Action de la surcharge



$\alpha > 0$
 $\delta > 0$

Tables de l'Herminier et Absi

➡ K'_a

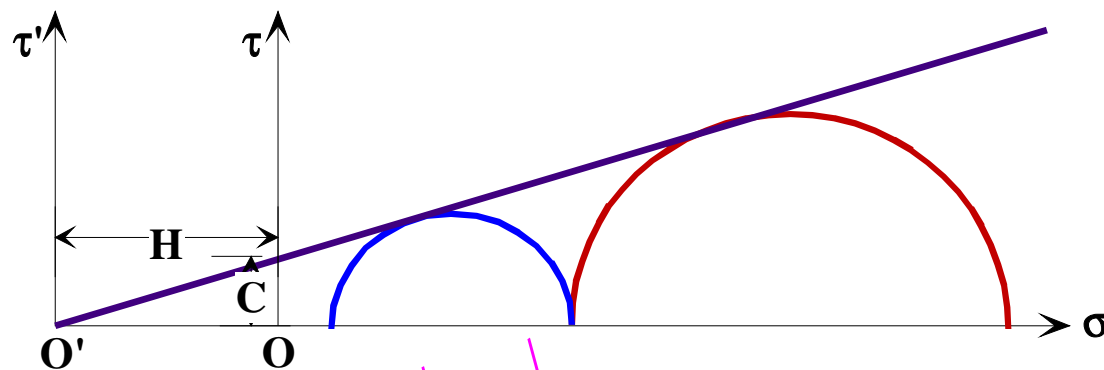
$$\sigma_{qa} = K'_a \cdot q$$

$$Q_a = K'_a \cdot q \cdot H$$

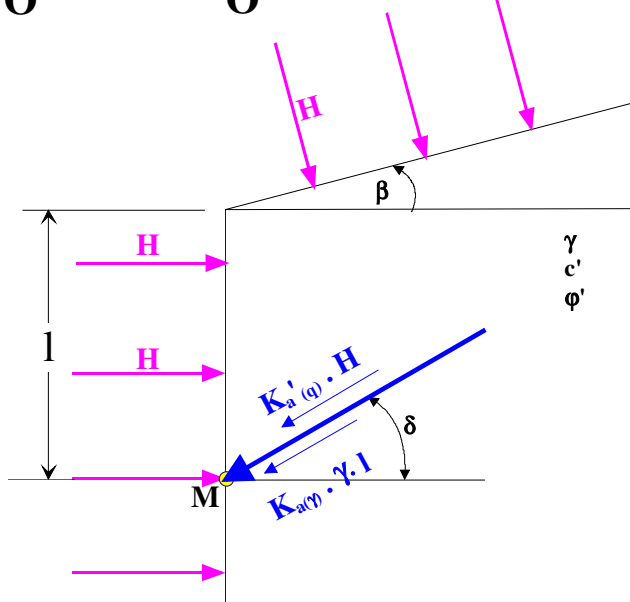
5. Cas d'un sol frottant et cohérent – Théorème des états correspondants

Théorème de Caquot

Translation de l'axe des ordonnées de $H (=c'/\tan\varphi')$ pour revenir au cas d'un sol purement frottant *auquel il faut ajouter tout autour une contrainte hydrostatique H*



$$H = \frac{c'}{\tan\varphi'}$$



Equilibre des contraintes projeté sur l'horizontale :

$$\sigma_a = (k_a \cdot \gamma \cdot z \cdot \cos \delta a) + (k'_a \cdot H \cdot \cos \delta a) - H$$

5. Cas d'un sol frottant et cohérent – Théorème des états correspondants

Théorème de Caquot

Dans le cas de la poussée; k_a et $k'_a < 1$

Il existe donc une cote z_0 au-dessus de laquelle $\sigma_a < 0$

Comme on ne considère pas d'effort de traction entre le sol et l'écran, on admettra qu'au-dessus de z_0 , $\sigma_a = 0$.

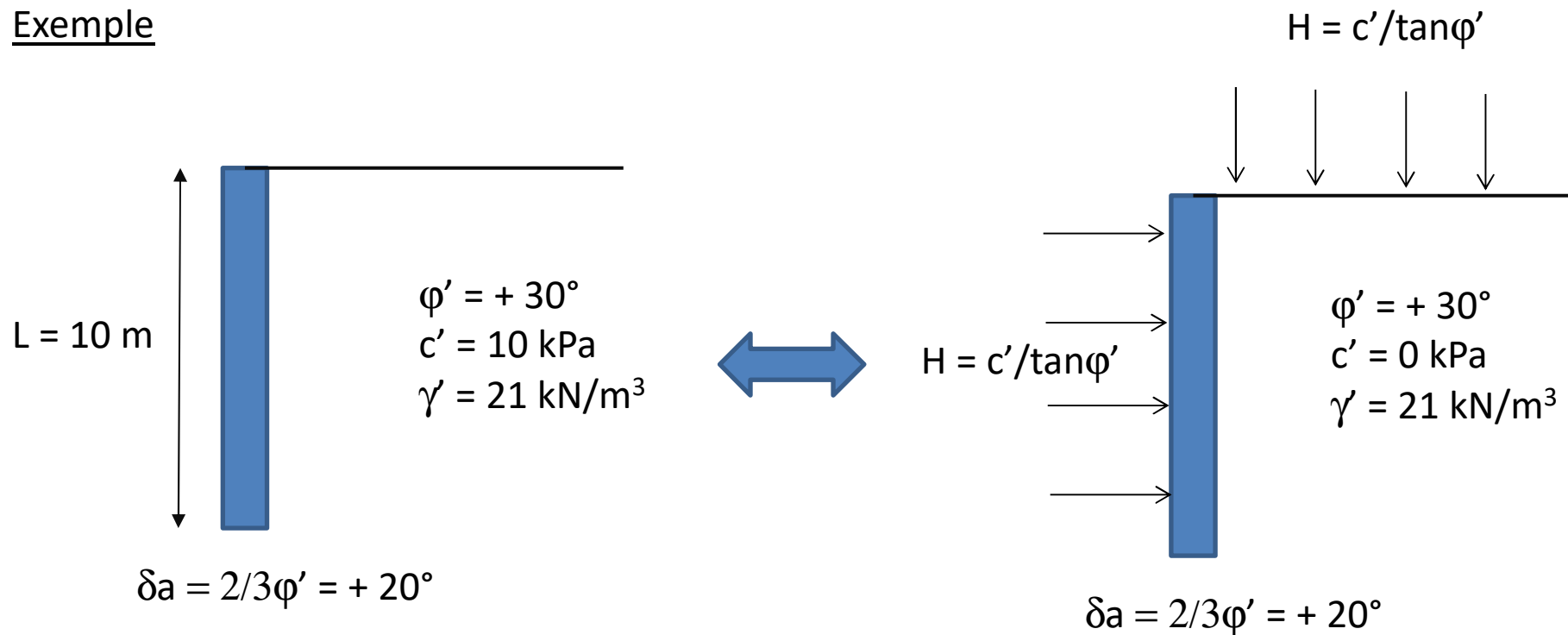
$$(k_a \cdot \gamma \cdot z_0 \cdot \cos \delta a) + \left(k'_a \cdot \left(\frac{c'}{\tan \varphi'} \right) \cdot \cos \delta a \right) - \left(\frac{c'}{\tan \varphi'} \right) = 0$$

$$z_0 = \frac{\left(\frac{c'}{\tan \varphi'} \right) - \left(k'_a \cdot \left(\frac{c'}{\tan \varphi'} \right) \cdot \cos \delta a \right)}{k_a \cdot \gamma \cdot \cos \delta a} = \frac{\frac{c'}{\tan \varphi'}}{k_a \cdot \gamma \cdot \cos \delta a} (1 - k'_a \cdot \cos \delta a)$$

Cette cote correspond à la profondeur jusqu'à laquelle une fouille non soutenue est stable

5. Cas d'un sol frottant et cohérent – Théorème des états correspondants

Exemple



$$\sigma_a = (k_a \cdot \gamma \cdot l \cdot \cos \delta a) + (k'_a \cdot H \cdot \cos \delta a) - H$$

5. Cas d'un sol frottant et cohérent – Théorème des états correspondants

Exemple

Ka

$$\frac{\beta}{\varphi'} = 0,00 \quad \frac{\delta}{\varphi'} = 0,66$$

$\lambda \backslash \varphi$	10	15	20	25	30	35	40	45
40	0,644							
35	0,669	0,616	0,615					
30	0,687	0,619	0,598	0,513	0,473			
25	0,698	0,619	0,567	0,498	0,450	0,410	0,374	
20	0,702	0,614	0,540	0,478	0,425	0,379	0,340	0,305
15	0,700	0,602	0,519	0,454	0,396	0,347	0,304	0,267
10	0,691	0,585	0,499	0,427	0,366	0,314	0,269	0,230
5	0,676	0,563	0,471	0,396	0,333	0,280	0,235	0,196
0	0,656	0,537	0,442	0,364	0,300	0,247	0,202	0,163
-5	0,630	0,506	0,408	0,330	0,266	0,214	0,170	0,134
-10	0,600	0,472	0,373	0,295	0,233	0,182	0,141	0,107
-15	0,565	0,435	0,336	0,260	0,200	0,152	0,114	0,083
-20	0,525	0,396	0,299	0,225	0,168	0,124	0,089	0,062
-25	0,483	0,354	0,260	0,190	0,138	0,098	0,067	0,044
-30	0,437	0,312	0,222	0,157	0,110	0,074	0,048	0,030
-35	0,389	0,268	0,185	0,126	0,084	0,054	0,032	0,017
-40	0,339	0,225	0,149	0,097	0,061	0,036	0,019	0,008
-45	0,288	0,183	0,115	0,070	0,041	0,022	0,009	
-50	0,237	0,142	0,084	0,047	0,024	0,010		
-55	0,186	0,104	0,056	0,028	0,011			
-60	0,138	0,070	0,033	0,012				
-65	0,092	0,040	0,014					
-70	0,052	0,016						
-75	0,020							
-80								

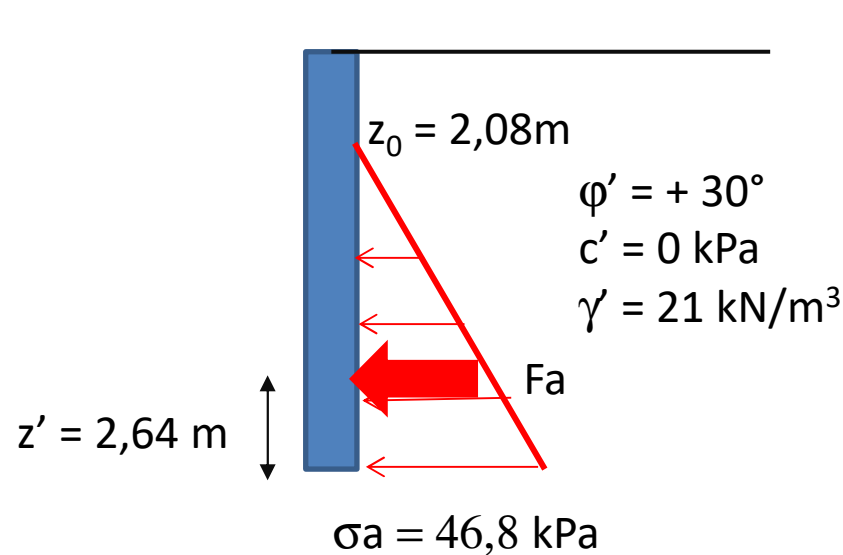
K'a

$$\varphi' = 30^\circ \quad \Omega = 90^\circ$$

$\alpha \backslash \delta$	0	5	10	15	20	25
-20	0,696	0,672	0,658	0,651	0,653	0,663
-10	0,465	0,446	0,434	0,427	0,425	0,429
0	0,333	0,319	0,31	0,305	0,304	0,306
10	0,253	0,243	0,236	0,232	0,231	0,233
20	0,203	0,194	0,189	0,185	0,185	0,186

5. Cas d'un sol frottant et cohérent – Théorème des états correspondants

Exemple



$$z_0 = \frac{\frac{c'}{\tan \varphi'}}{k_a \cdot \gamma \cdot \cos \delta a} (1 - k'_a \cdot \cos \delta a) = \frac{10}{0,3 \cdot 21 \cdot \cos 20} (1 - 0,304 \cdot \cos 20) = 2,08 \text{ m}$$

$$\sigma_a = (0,3 \cdot 21 \cdot 10 \cdot \cos 20) + \left(0,304 \cdot \left(\frac{10}{\tan 30} \right) \cdot \cos 20 \right) - \left(\frac{10}{\tan 30} \right) = 46,8 \text{ kPa}$$

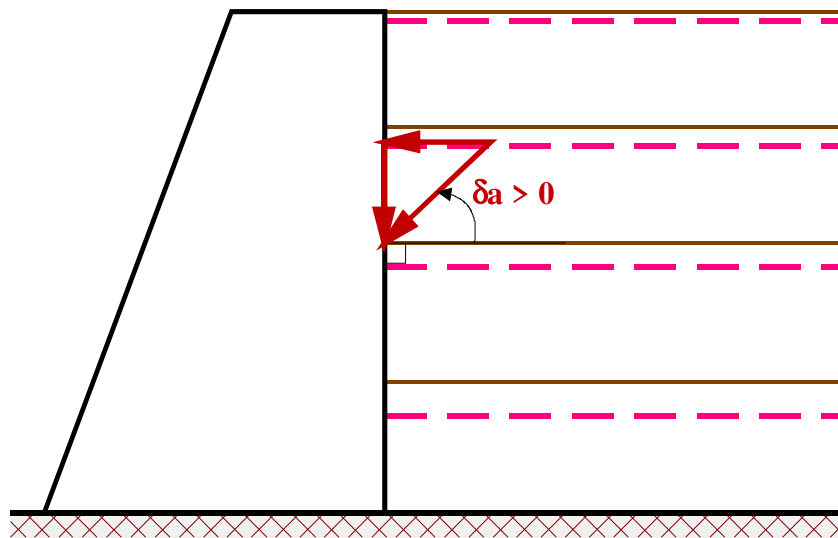
$$F_a = \sigma_a \cdot L' / 2 = 46,8 \cdot 7,92 / 2 = 185 \text{ kN / m}$$

6. Choix de l'angle de frottement sol-écran

L'angle de frottement entre le sol et l'écran dépend pour sa valeur de la rugosité de l'écran par rapport aux particules de sol et pour son signe du sens du déplacement relatif entre le sol et l'écran.

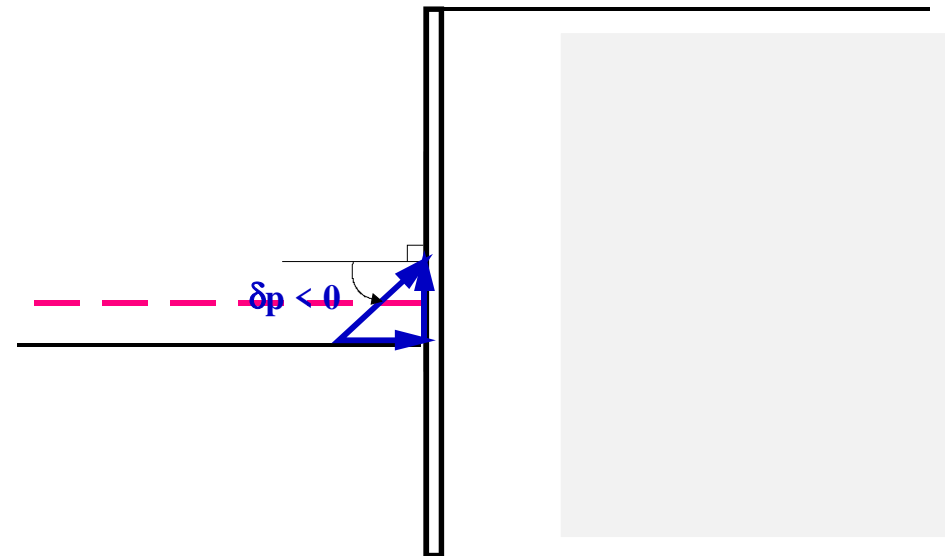
En l'absence de déplacement entre le sol et l'écran $\delta_a = 0$.

Cas d'un remblaiement



$\delta_a < \varphi'$,
 $+2/3\varphi'$,
la valeur $\delta_a = 0$ est sécuritaire

Cas d'une fouille

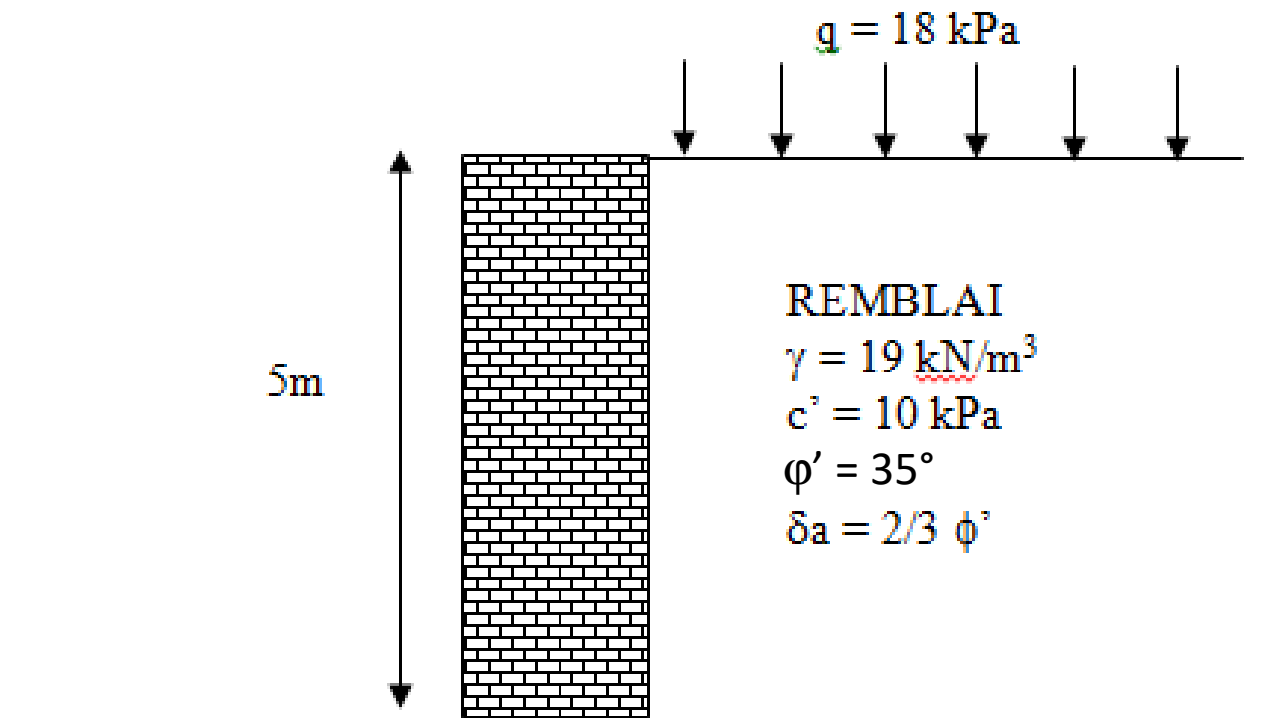


Généralement, on prend $\delta_p = -2/3\varphi'$

7. Application

Un mur en béton soutient un remblai de 5m dont les caractéristiques sont données à la figure 1. Le remblai est surchargé par une charge $q = 18 \text{ kPa}$.

1. Déterminez, à l'aide des tables de poussée butée, le coefficient de poussée à considérer (on prendra $ka_q = ka$ et on considérera les coefficients projetés sur l'horizontale)
2. Déterminez la distribution de contraintes appliquée sur le mur (On illustrera cette distribution par un schéma).
3. Déterminez, pour la distribution de contrainte, la résultante et son point d'application.



7. Application

Milieu pesant pulvérulent														
δ/φ φ degrés	- 1		- 2/3		- 1/3		0		1/3		2/3		1	
	K_a	K_p	K_a	K_p	K_a	K_p	K_a	K_p	K_a	K_p	K_a	K_p	K_a	K_p
10	1,06	1,66	0,81	1,59	0,75	1,51	0,70	1,42	0,68	1,31	0,66	1,17	0,65	—
15	1,06	2,2	0,72	2,05	0,64	1,88	0,59	1,70	0,56	1,50	0,54	1,26	0,53	—
20	1,04	3,1	0,64	2,75	0,54	2,40	0,49	2,04	0,46	1,69	0,44	1,33	0,44	—
25	1,02	4,4	0,55	3,70	0,47	3,10	0,41	2,45	0,38	1,92	0,36	1,40	0,37	—
30	0,98	6,5	0,49	5,30	0,38	4,0	0,33	3,00	0,30	2,15	0,30	1,46	0,30	—
35	0,94	10,5	0,40	8,0	0,32	5,4	0,27	3,69	0,25	2,40	0,25	1,51	0,26	—
40	0,88	18	0,34	12	0,26	7,6	0,22	4,60	0,20	2,75	0,20	1,54	0,20	—
45	0,82	35	0,27	20	0,19	11	0,17	5,83	0,16	3,0	0,16	1,58	0,16	—

Valeurs de K_a et K_p pour $\lambda = 0$ et $\beta = 0$

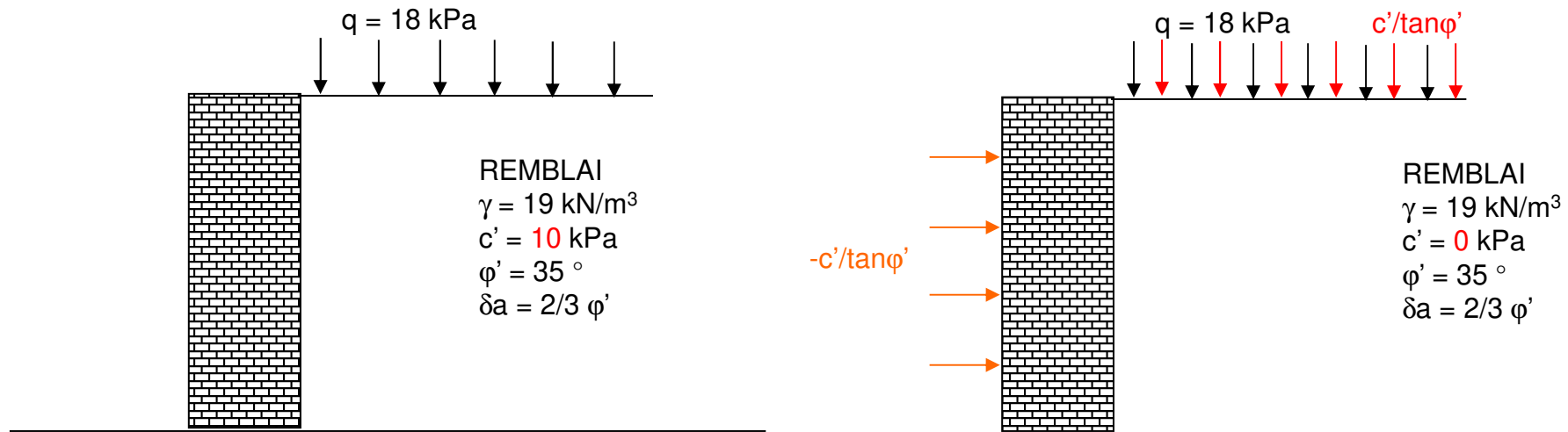
7. Application

1

$$ka_q = ka = 0,25$$

On prend la valeur projetée sur l'horizontale : $ka_q \cdot \cos(2\varphi/3) = ka \cdot \cos(2\varphi/3) = 0,229$

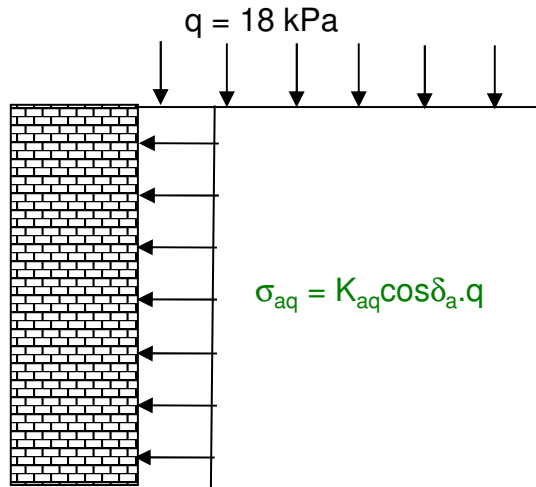
2



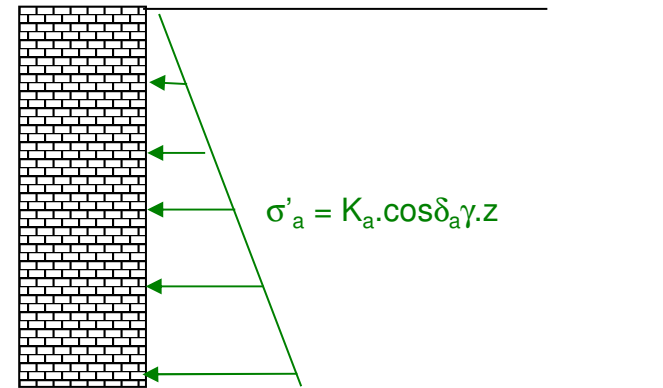
7. Application

2

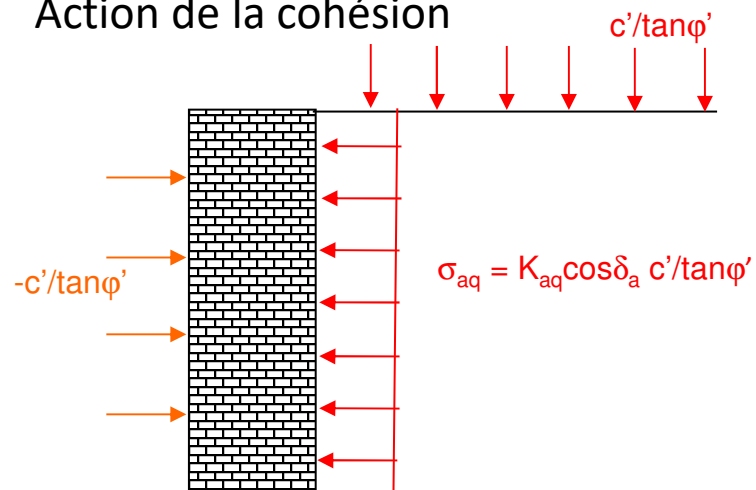
Action de la surcharge



Action du sol



Action de la cohésion



7. Application

2

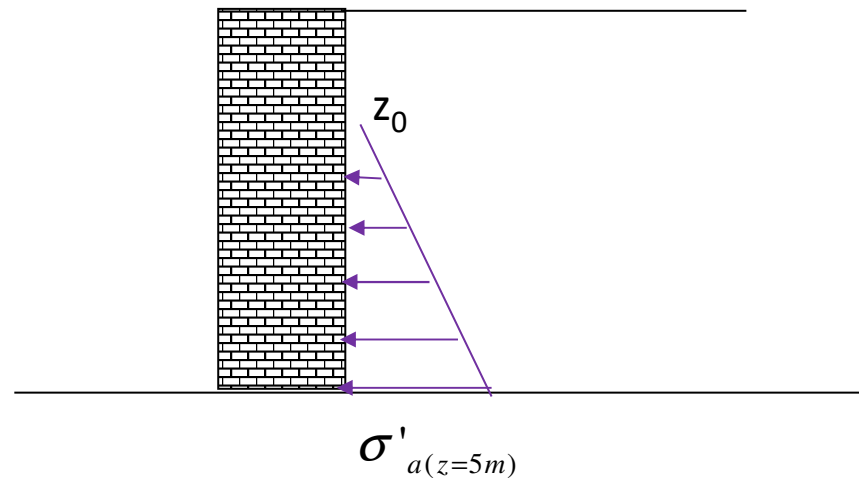
Détermination du point de pression nulle :

$$ka.\cos(2\varphi'/3).(q + \frac{c'}{\tan \varphi'}) + ka.\cos(2\varphi'/3).\gamma.z_0 - \frac{c'}{\tan \varphi'} = 0$$

$$\Rightarrow z_0 = 1,56m$$

La valeur de la contrainte en pied de mur:

$$\sigma'_{a(z=5m)} = ka.\cos(2\varphi'/3).(q + \frac{c'}{\tan \varphi'}) + ka.\cos(2\varphi'/3).\gamma.z - \frac{c'}{\tan \varphi'} = 15kPa$$



7. Application

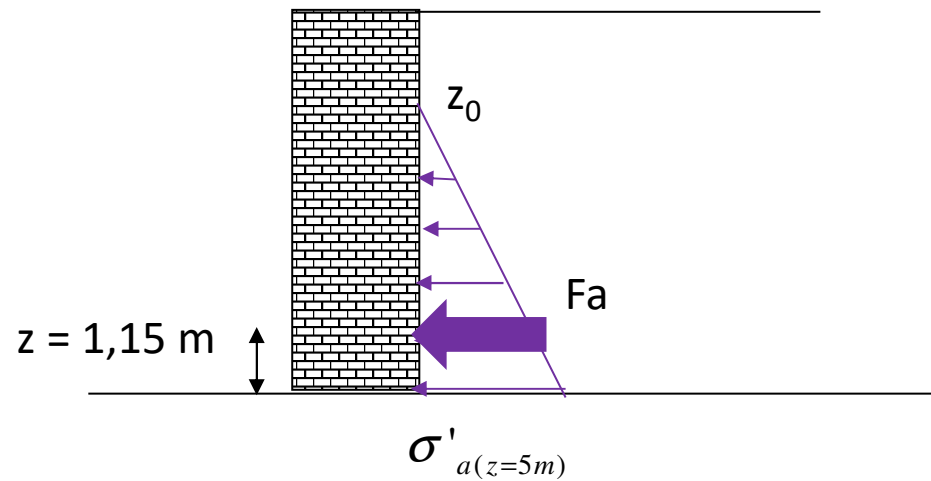
3

Détermination de la résultante :

$$F_a = ((5 - 1,56) \cdot \sigma'_{a(z=5m)}) / 2 = 25,8 \text{ kN/m}$$

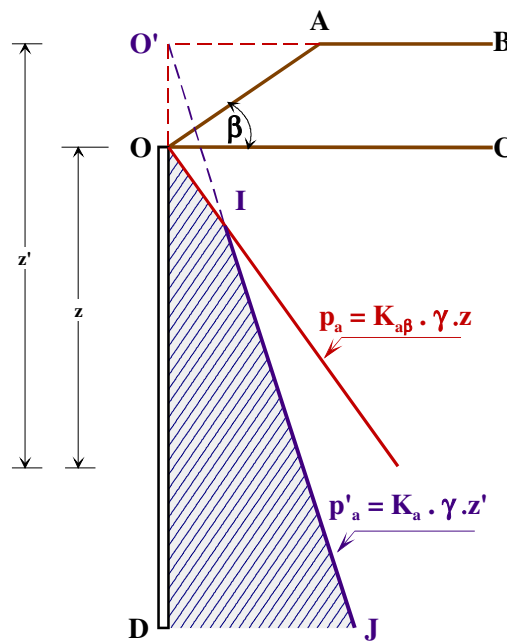
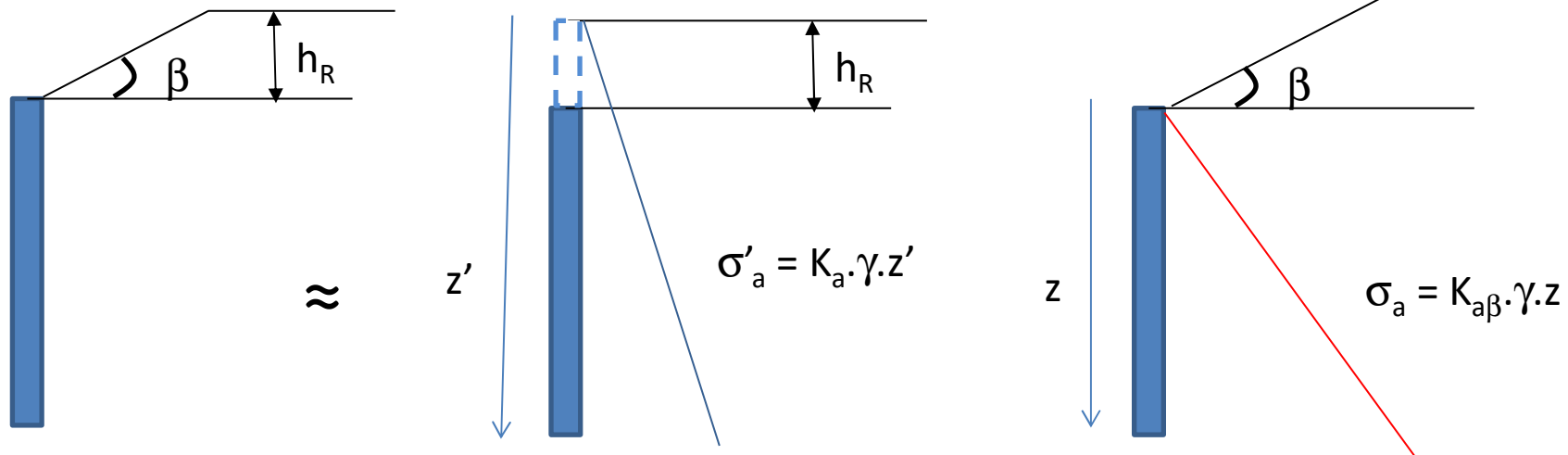
Point d'application :

$$z = (5 - 1,56)/3 = 1,15 \text{ m}$$



8. Calculs de la poussée butée pour un talus de géométrie quelconque

Cas simple : méthode de superposition



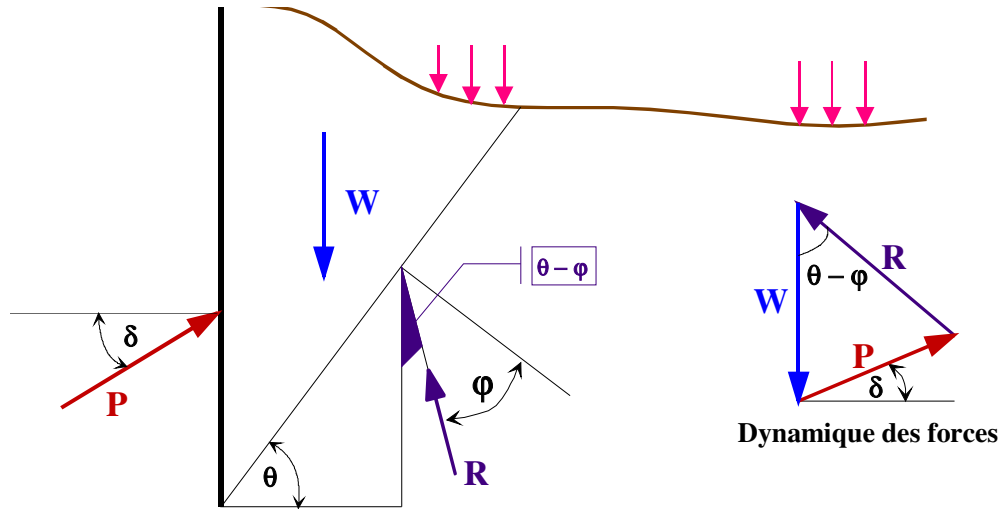
$$\sigma'_a = \sigma_a \Leftrightarrow K_a \gamma z'_I = K_{a\beta} \gamma z_I$$

$$\Leftrightarrow K_a \gamma (z_I + h_R) = K_{a\beta} \gamma z_I$$

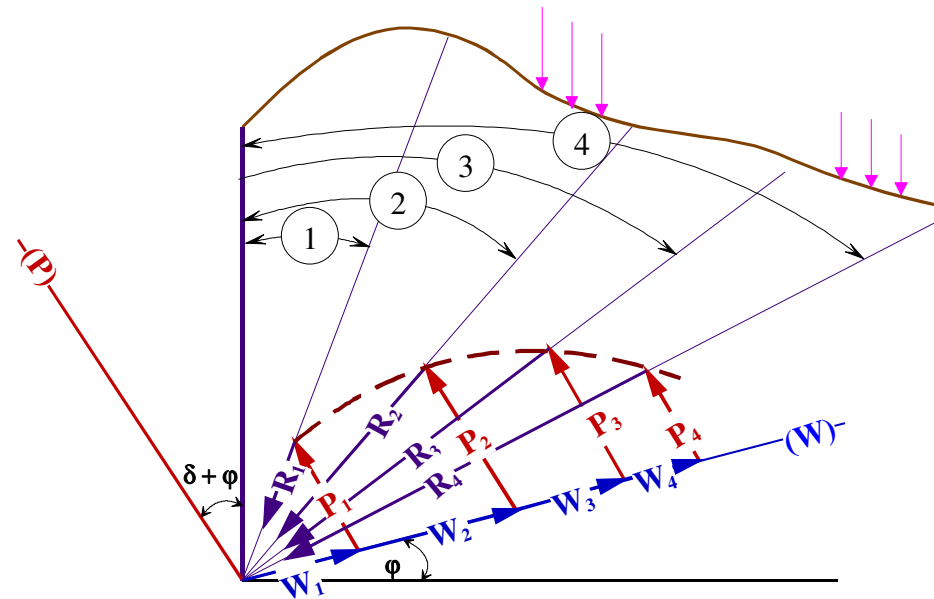
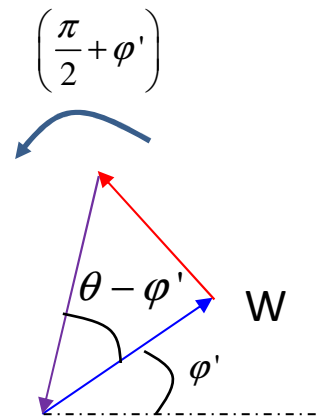
$$\Leftrightarrow z_I = \frac{K_a h_R}{K_{a\beta} - K_a}$$

8. Calculs de la poussée butée pour un talus de géométrie quelconque

Méthode de Culmann (extension de la méthode de Coulomb)

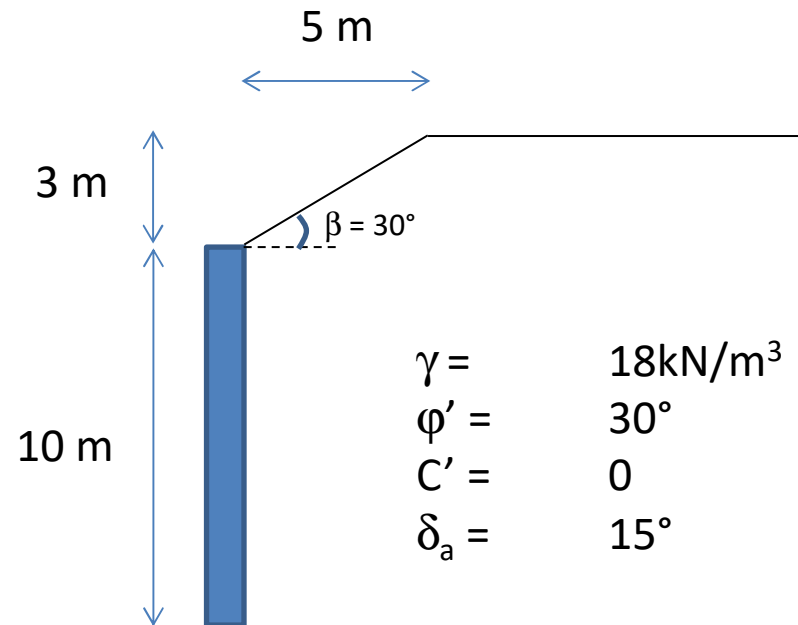


CULMANN a proposé une méthode permettant de décrire la variation de P sur le même graphique en faisant tourner le dynamique de $\left(\frac{\pi}{2} + \phi'\right)$ pour faire coïncider le vecteur avec le vecteur directeur du plan de coupure



8. Calculs de la poussée butée pour un talus de géométrie quelconque

Application



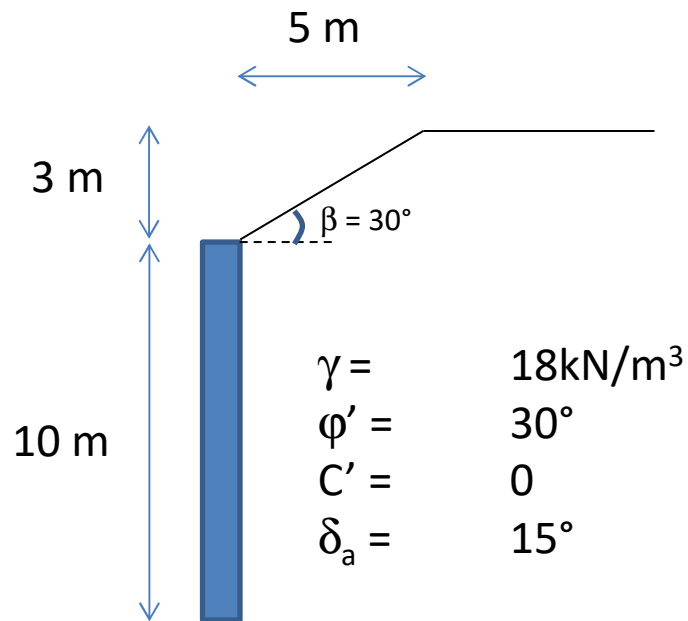
Calculer la poussée qui s'exerce sur l'écran par les deux méthodes:

- méthode de superposition
- construction de Culmann

8. Calculs de la poussée butée pour un talus de géométrie quelconque

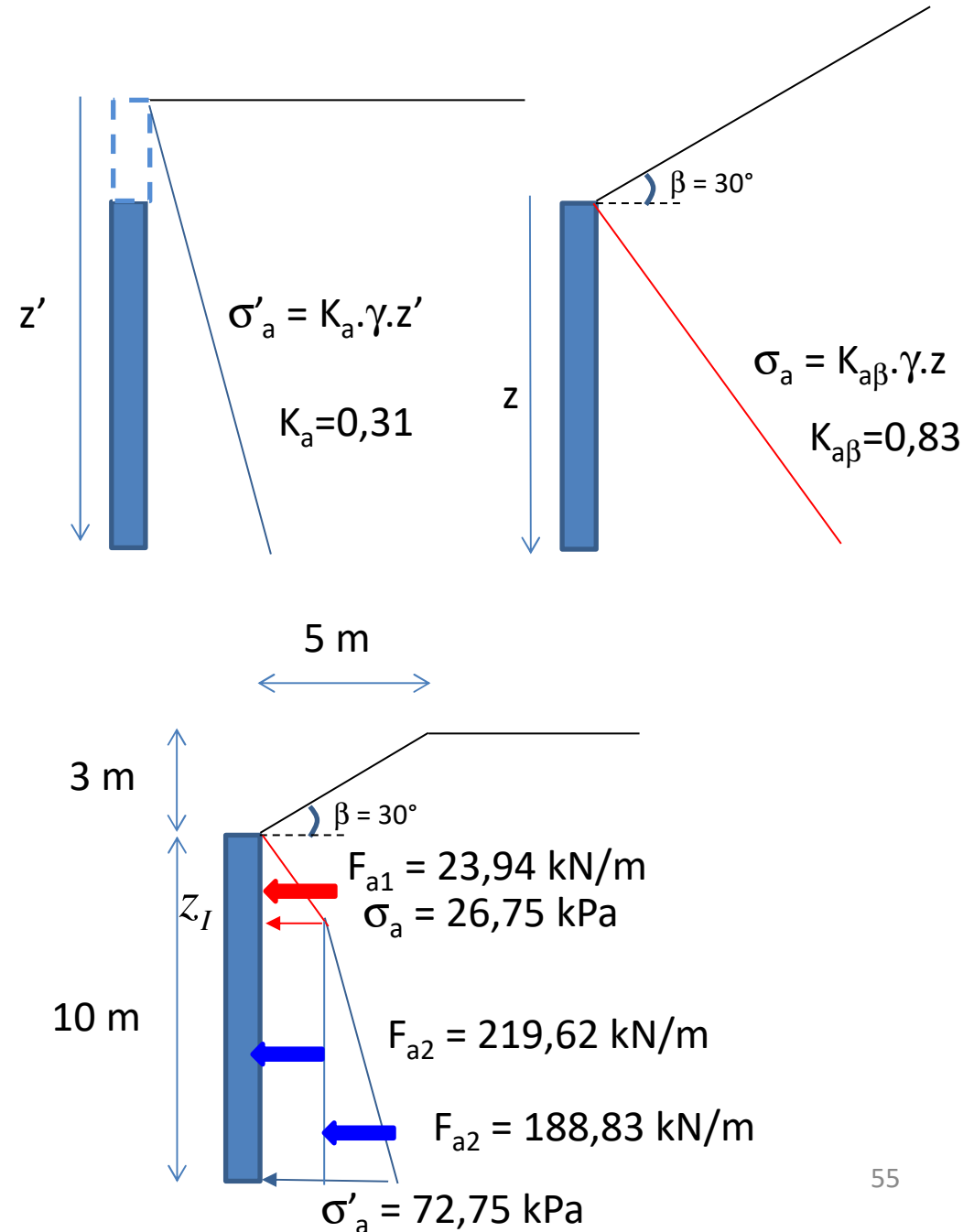
Application

méthode de superposition



$$z_I = \frac{K_a h_R}{K_{a\beta} - K_a} = 1,79 \text{ m}$$

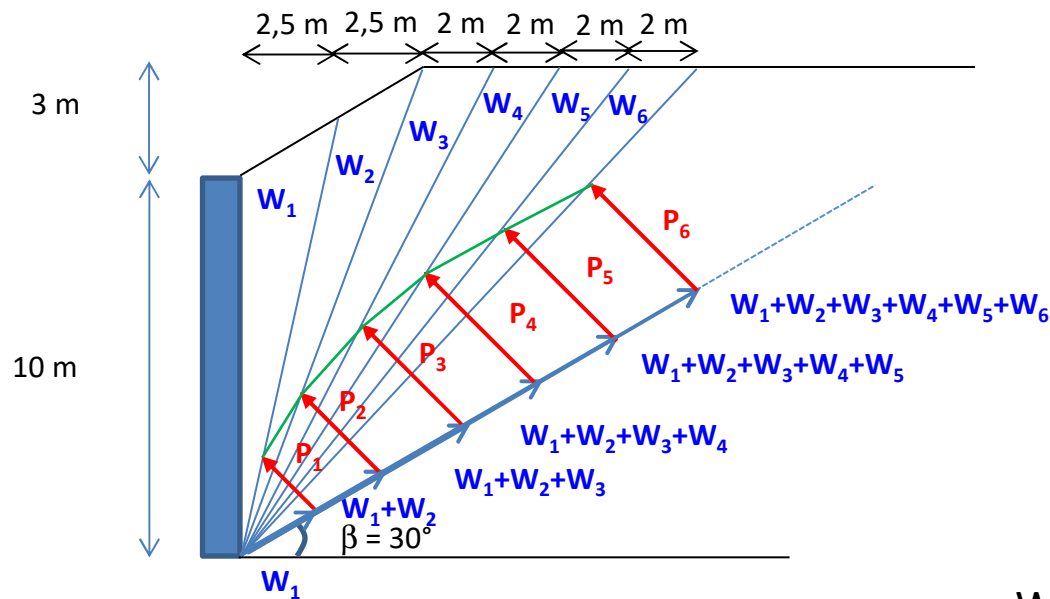
$$P_a = 432,39 \text{ kN/m}$$



8. Calculs de la poussée butée pour un talus de géométrie quelconque

Application

méthode de superposition



$$W_1 = 10 \cdot 2,5 \cdot 18 / 2 = 225 \text{ kN/m}$$

$$W_2 = (10 \cdot 5 \cdot 18 / 2) - W_1 = 225 \text{ kN/m}$$

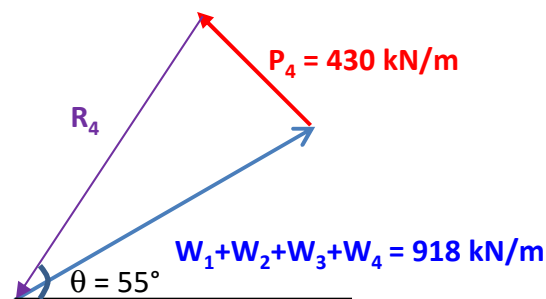
$$W_2 + W_1 = 450 \text{ kN/m}$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = 684 \text{ kN/m}$$

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = 918 \text{ kN/m}$$

$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 = 1152 \text{ kN/m}$$

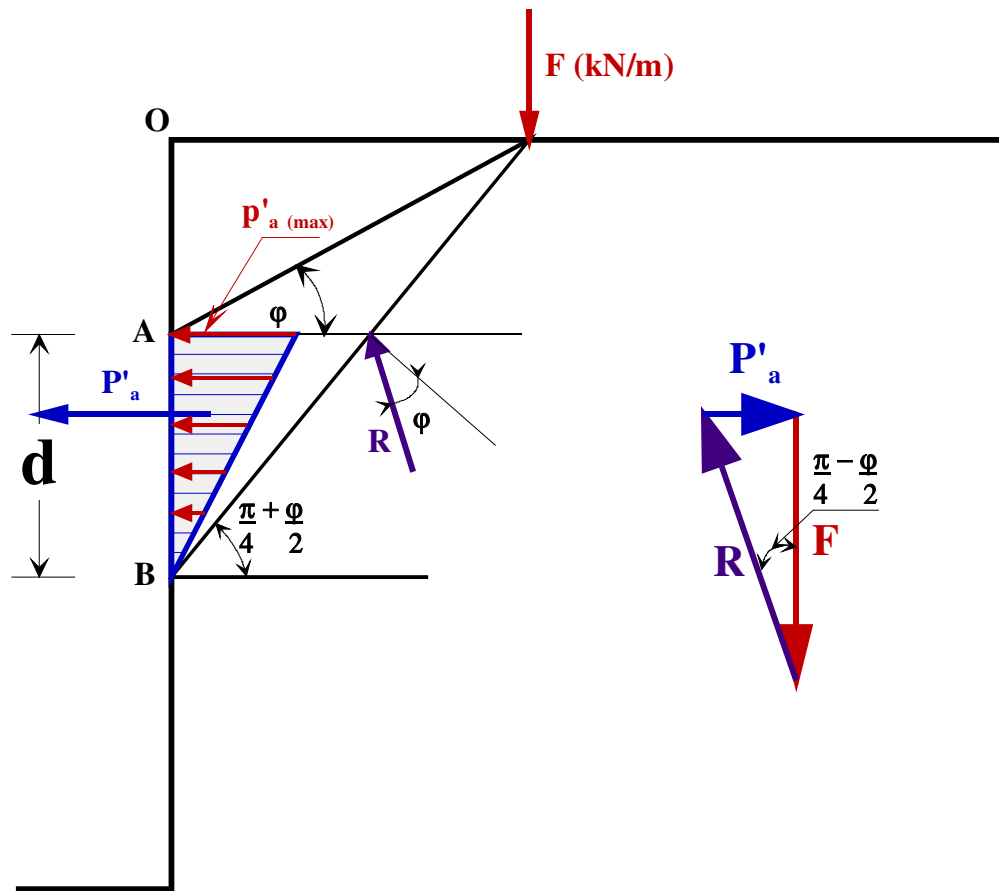
$$W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 + W_6 = 1386 \text{ kN/m}$$



9. Dispositions particulières de surcharges

Solution en plasticité

Pour une surcharge linéaire, on suppose que la contrainte de poussée p'_a sur l'écran est maximum en A (intersection de l'angle de talus avec l'écran) et décroît linéairement jusqu'à zéro au point B (intersection du coin de Coulomb et de l'écran).



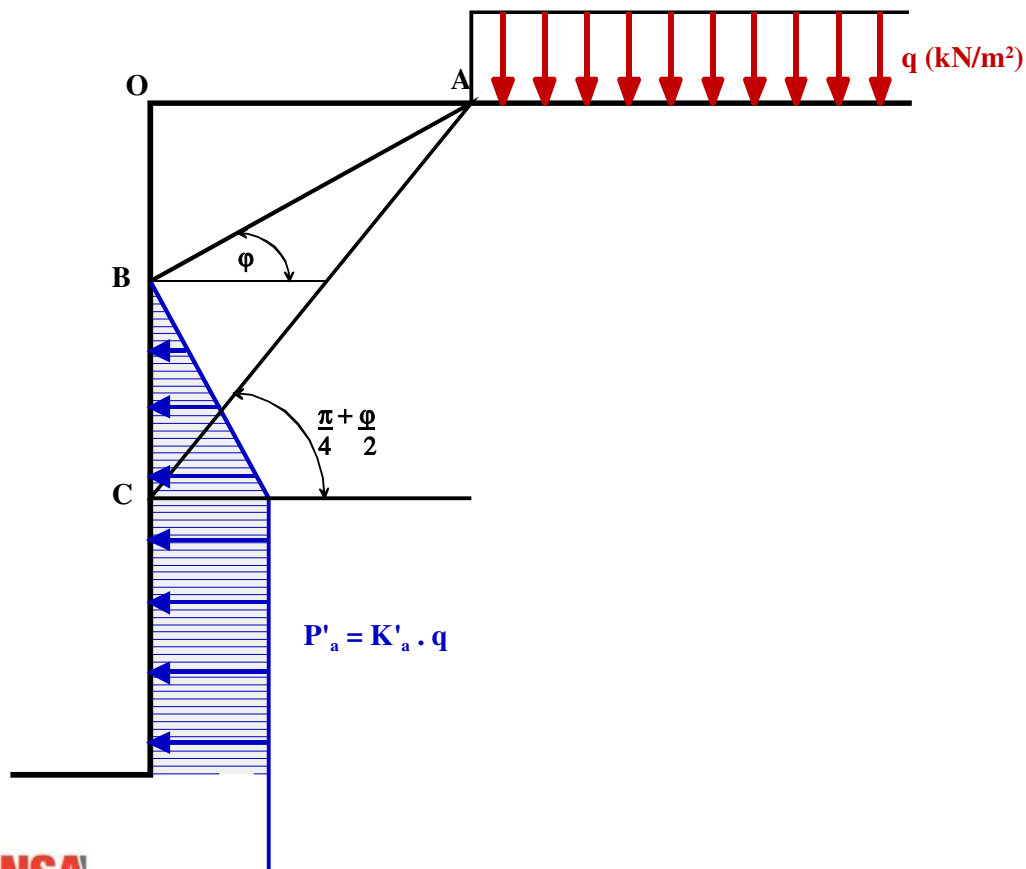
$$P'_a = F \times \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)$$

$$P'_a = p'_{a_{max}} \times \frac{d}{2}$$

9. Dispositions particulières de surcharges

Solution en plasticité

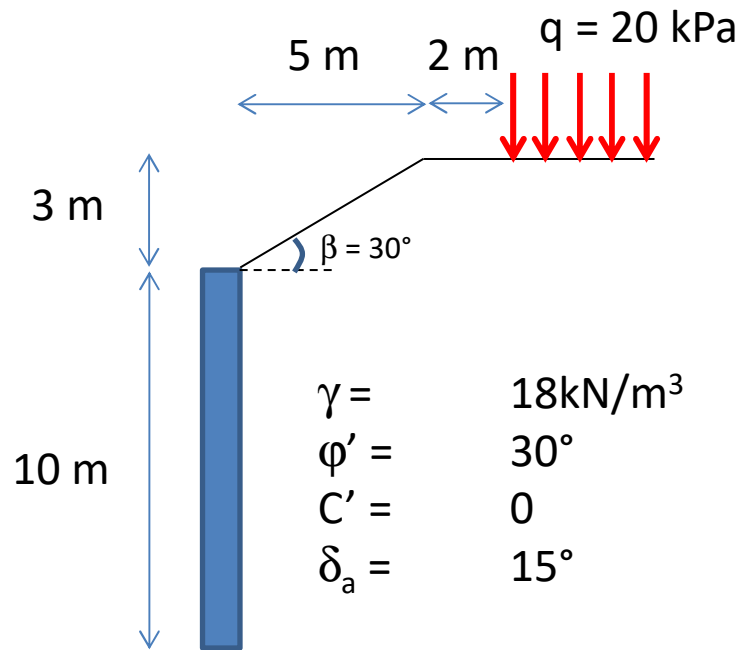
Pour une surcharge semi-infinie limitée sur un plan horizontal, on suppose que l'action de la surcharge est nulle au-dessus de l'angle de talus φ et que la distribution de la contrainte de poussée est linéaire entre B (intersection de l'angle de talus avec l'écran) et C (intersection du coin de Coulomb et de l'écran). Au-delà, on retrouve la poussée de la surcharge semi-infinie.



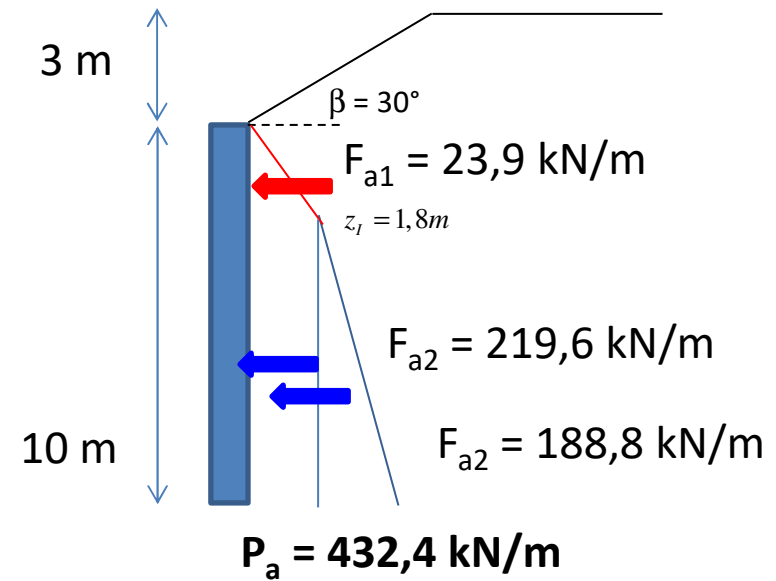
$$p'_a = K'_a \cdot q$$

9. Dispositions particulières de surcharges

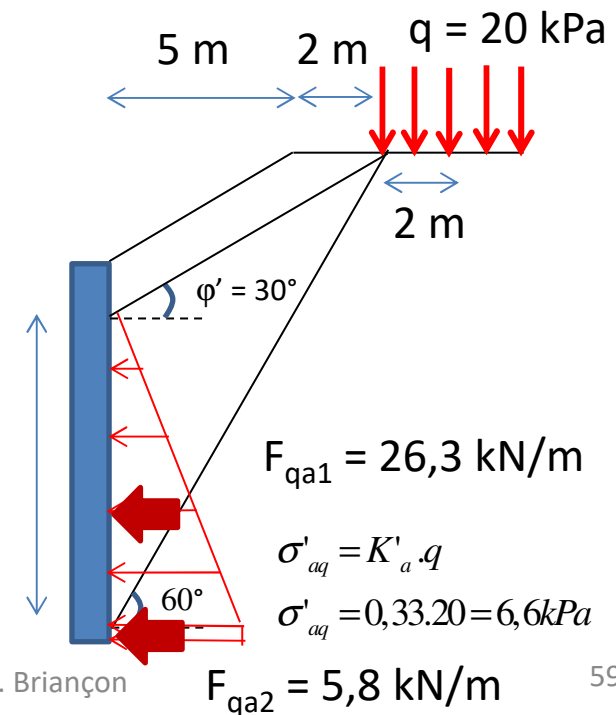
Application



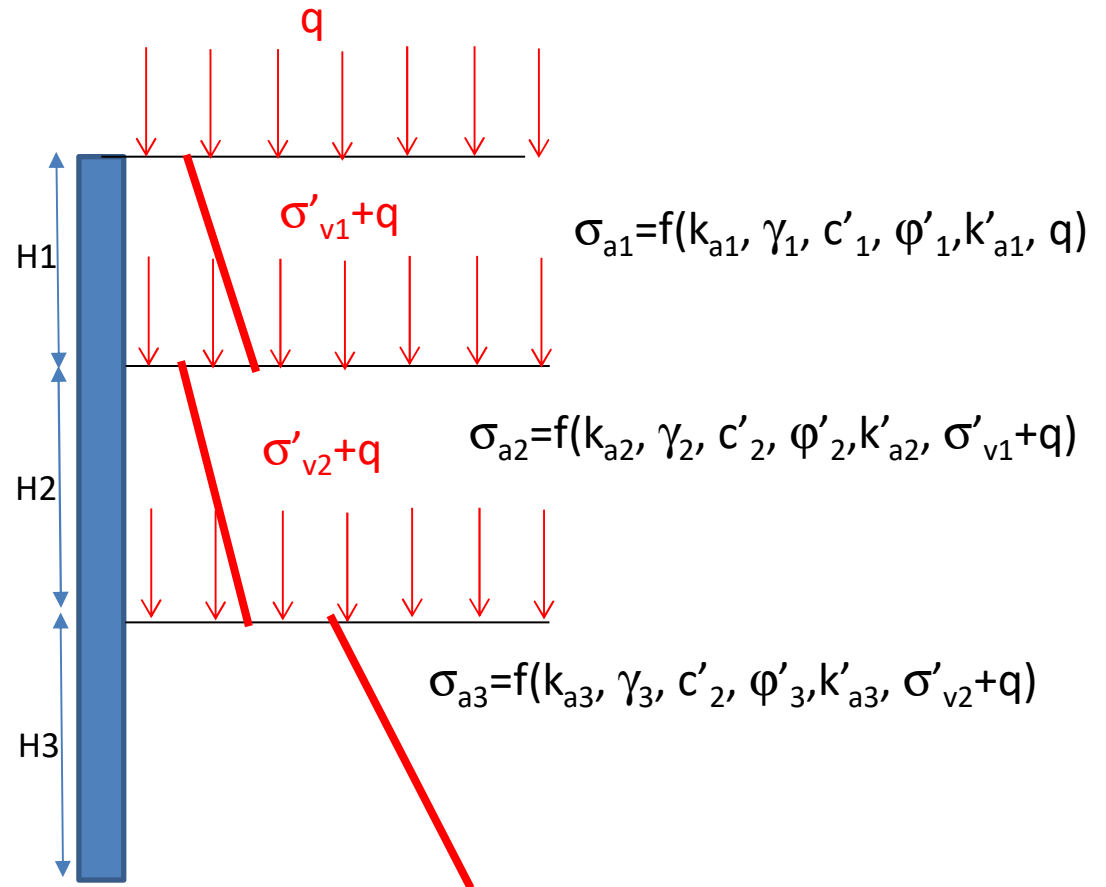
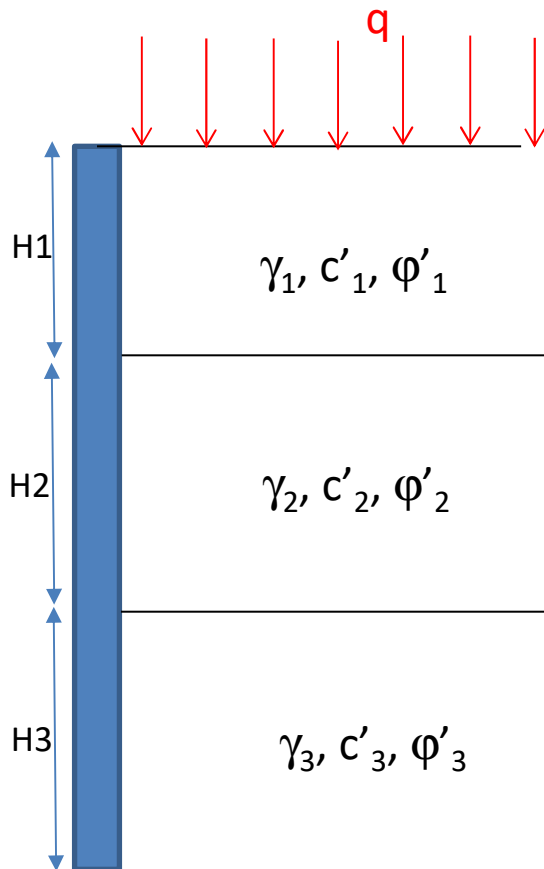
$$P_{qa} = 32,1 \text{ kN/m}$$



$$z = 8,08 \text{ m}$$

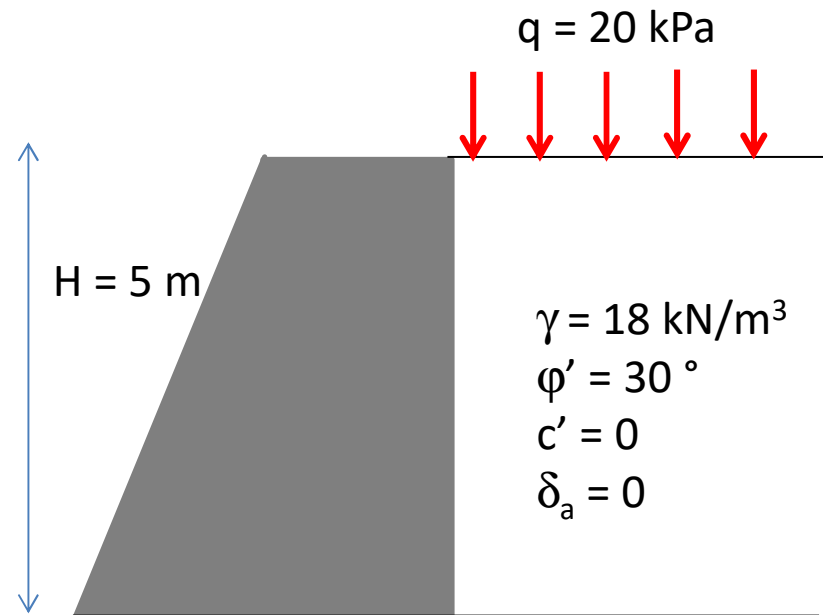


10. Cas d'un multicouche



10. Cas d'un multicouche

Application

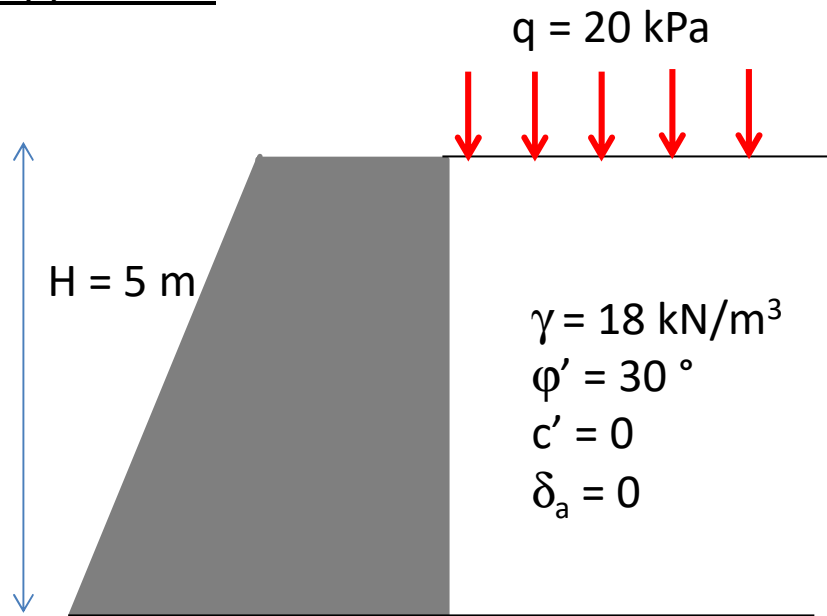


Milieu pesant pulvérulent														
$\frac{\delta}{\phi}$ ϕ degrés	- 1		- 2/3		- 1/3		0		1/3		2/3		1	
	K_a	K_p	K_a	K_p	K_a	K_p	K_a	K_p	K_a	K_p	K_a	K_p	K_a	K_p
10	1,06	1,66	0,81	1,59	0,75	1,51	0,70	1,42	0,68	1,31	0,66	1,17	0,65	—
15	1,06	2,2	0,72	2,05	0,64	1,88	0,59	1,70	0,56	1,50	0,54	1,26	0,53	—
20	1,04	3,1	0,64	2,75	0,54	2,40	0,49	2,04	0,46	1,69	0,44	1,33	0,44	—
25	1,02	4,4	0,55	3,70	0,47	3,10	0,41	2,45	0,38	1,92	0,36	1,40	0,37	—
30	0,98	6,5	0,49	5,30	0,38	4,0	0,33	3,00	0,30	2,15	0,30	1,46	0,30	—
35	0,94	10,5	0,40	8,0	0,32	5,4	0,27	3,69	0,25	2,40	0,25	1,51	0,26	—
40	0,88	18	0,34	12	0,26	7,6	0,22	4,60	0,20	2,75	0,20	1,54	0,20	—
45	0,82	35	0,27	20	0,19	11	0,17	5,83	0,16	3,0	0,16	1,58	0,16	—

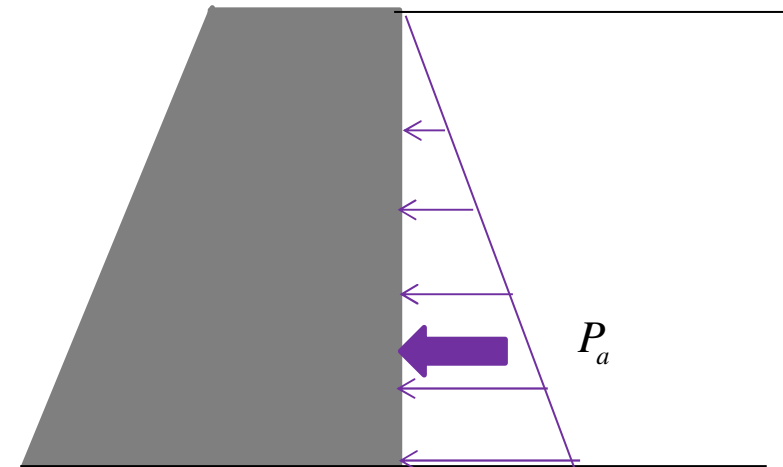
Valeurs de K_a et K_p pour $\lambda = 0$ et $\beta = 0$

10. Cas d'un multicouche

Application

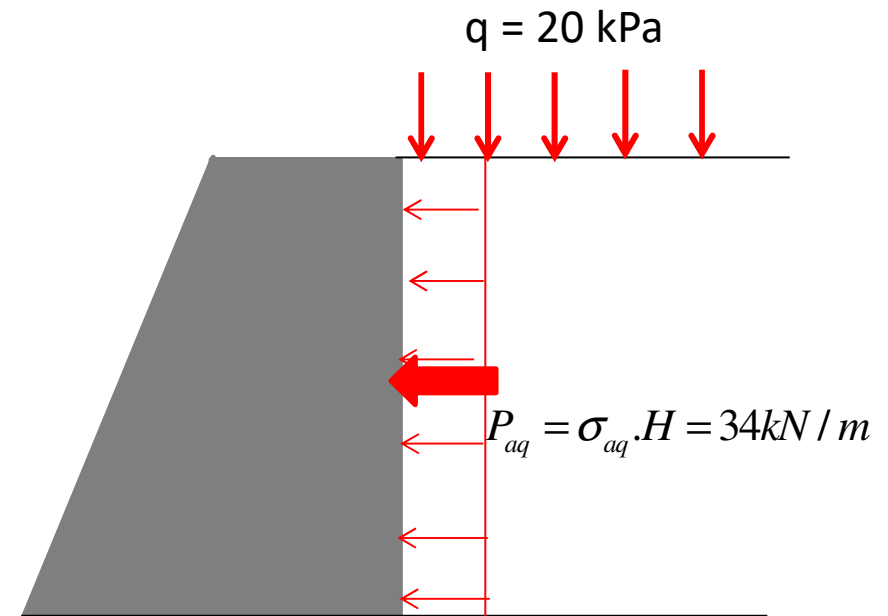


$$P = 109 \text{ kN/m}$$



$$\sigma_a = k_a \cdot \gamma \cdot z = 0,333 \cdot 18 \cdot 5 = 30 \text{ kPa}$$

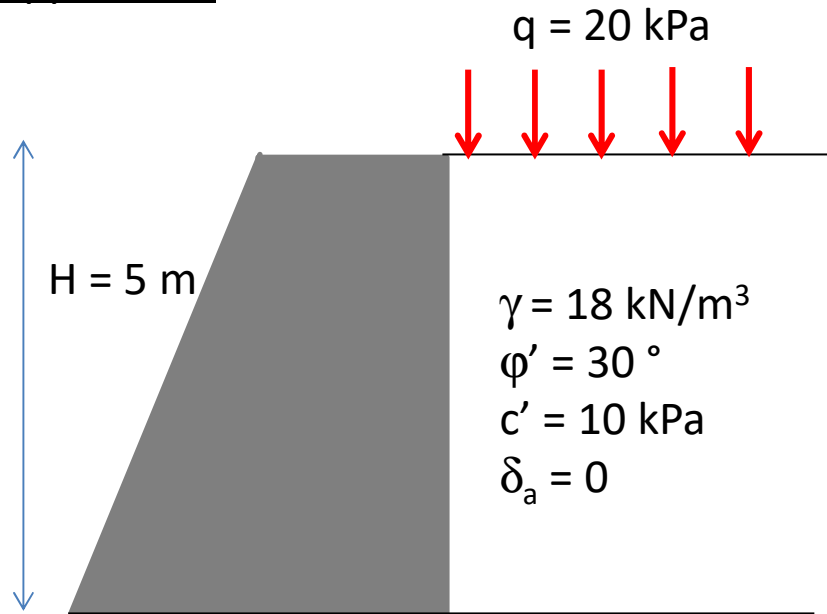
$$P_a = \sigma_a \cdot H / 2 = 30 \cdot 5 / 2 = 75 \text{ kN/m}$$



$$\sigma_{aq} = k_{aq} \cdot q = 0,333 \cdot 20 = 6,7 \text{ kPa}$$

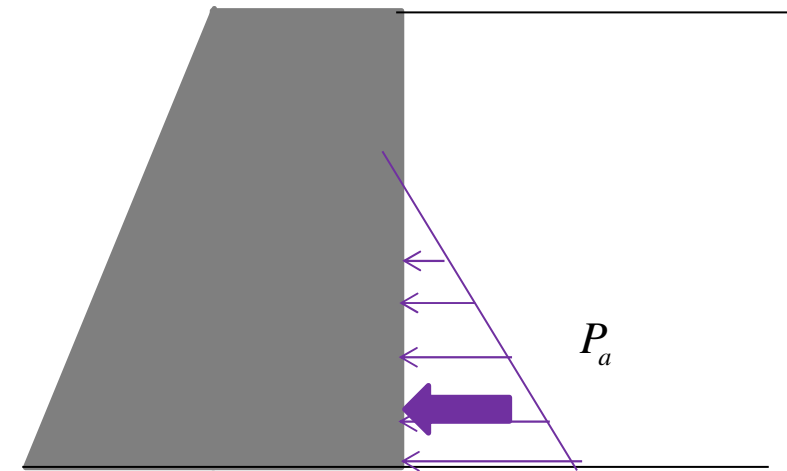
10. Cas d'un multicouche

Application



$$k_a \cdot \left(q + \frac{c'}{\tan \varphi'} \right) + k_a \gamma z - \frac{c'}{\tan \varphi'} = 0$$

$$z = 0,81 \text{ m}$$

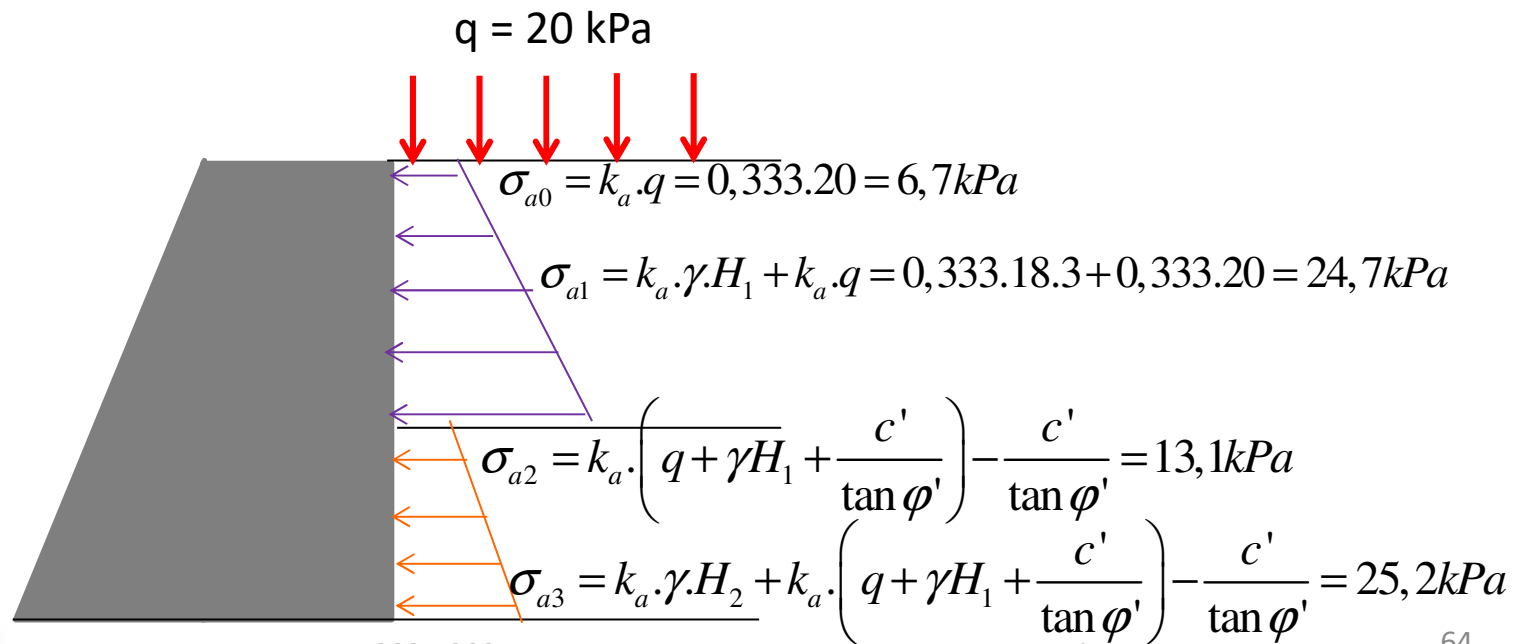
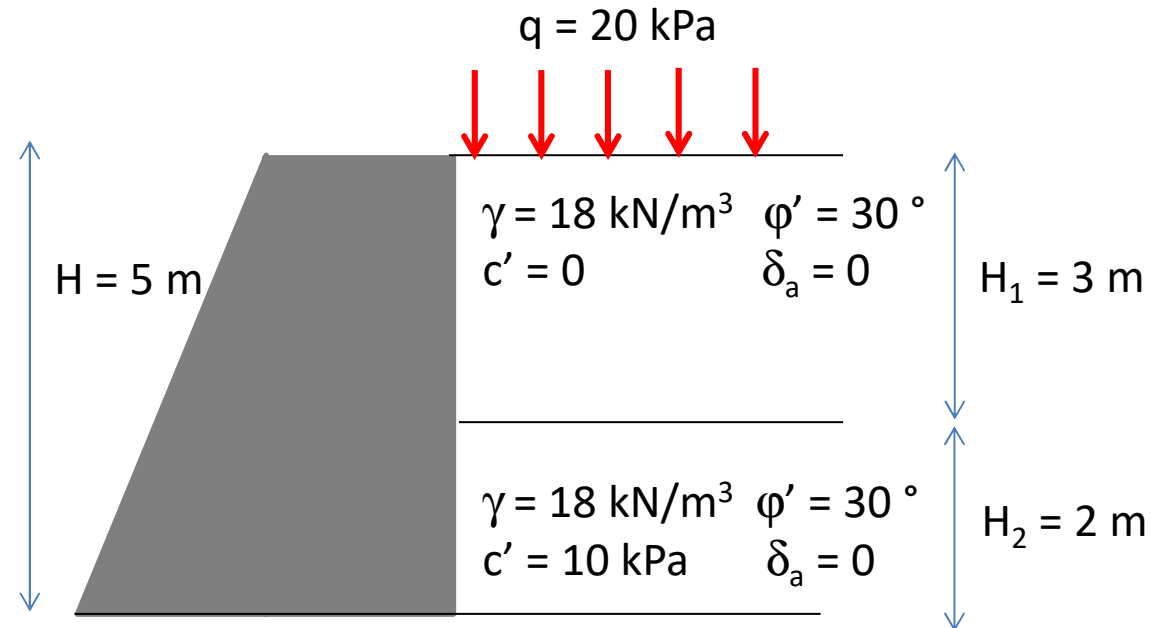


$$\sigma_a = k_a \cdot \gamma \cdot z + k_a \cdot \left(q + \frac{c'}{\tan \varphi'} \right) - \frac{c'}{\tan \varphi'} = 25 \text{ kPa}$$

$$P_a = \sigma_a \cdot H' / 2 = 25 \cdot 4,19 / 2 = 52 \text{ kN / m}$$

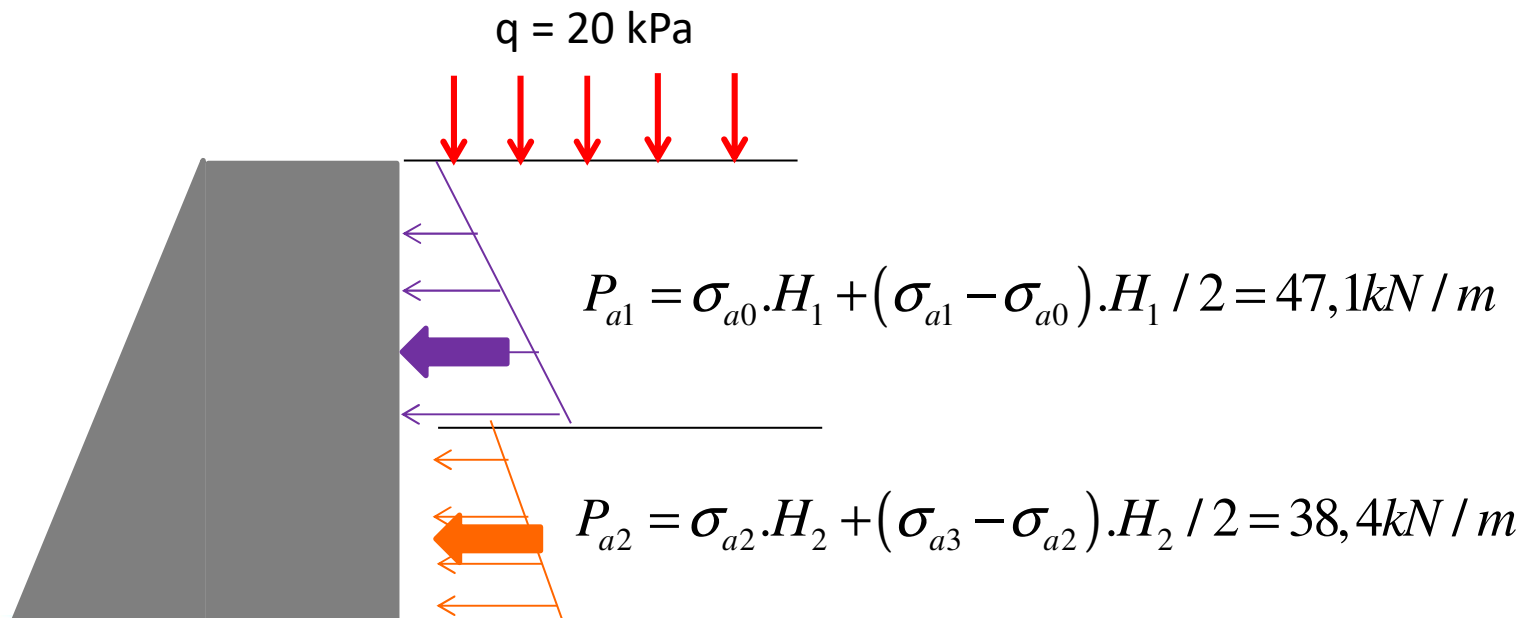
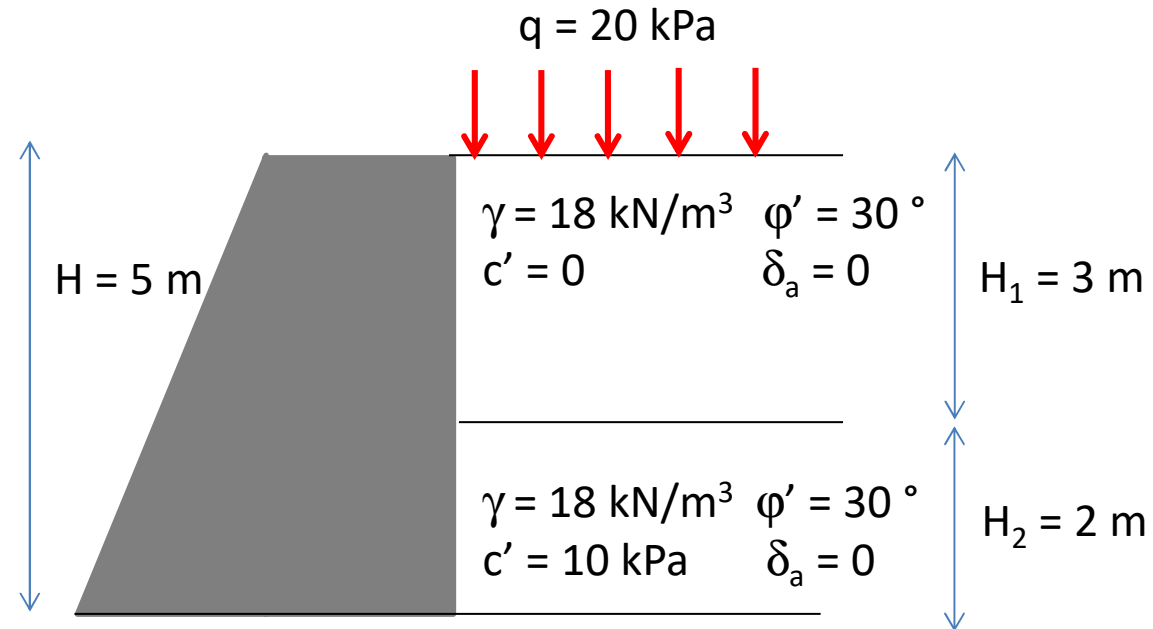
10. Cas d'un multicouche

Application

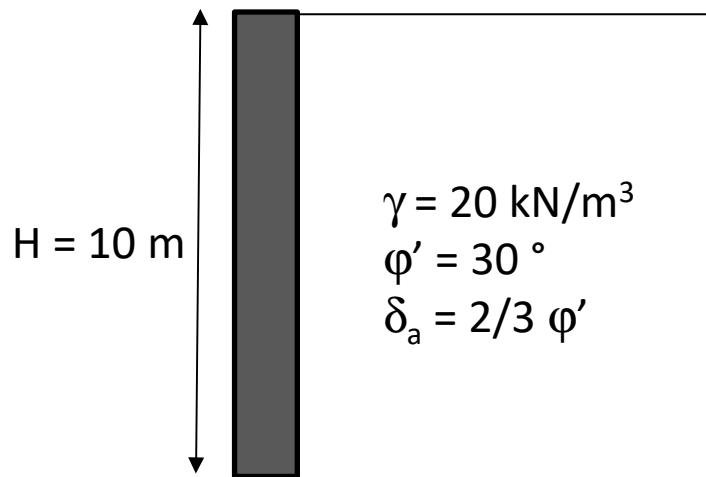


10. Cas d'un multicouche

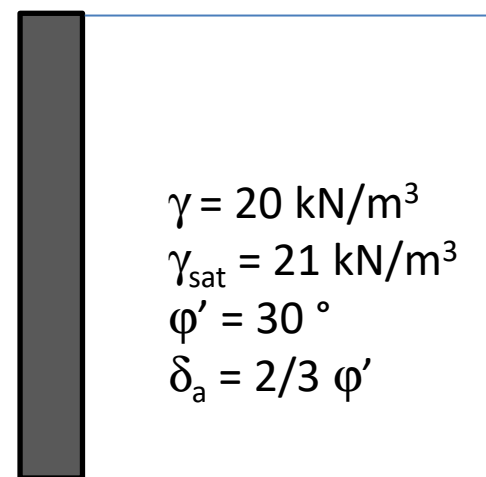
Application



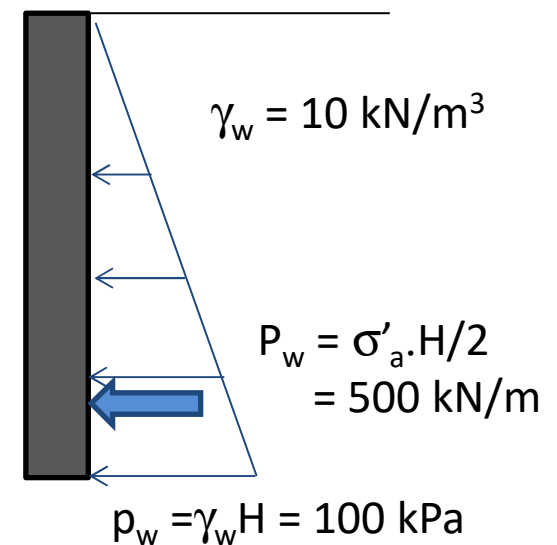
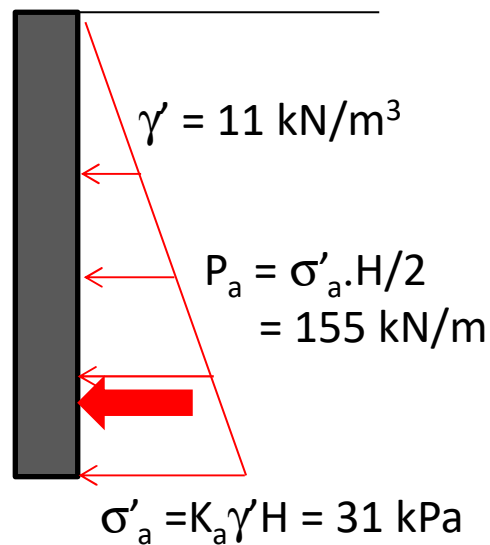
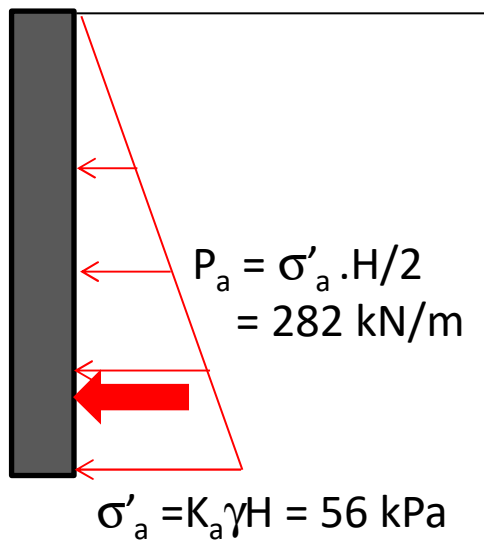
12. Prise en compte de l'eau



Kacos $\delta_a = 0,282$



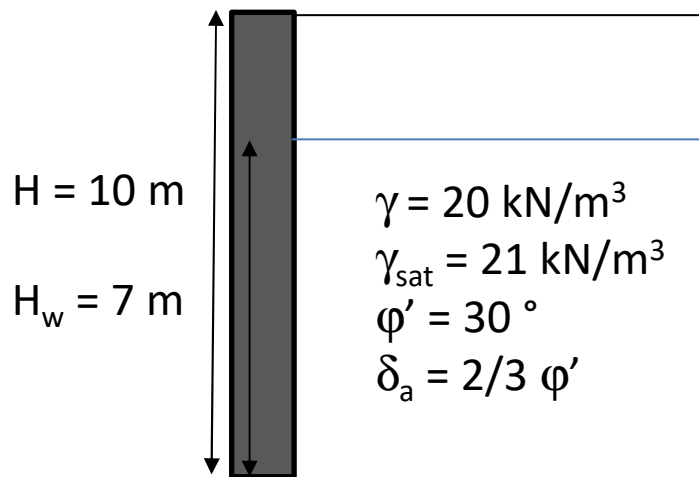
Kacos $\delta_a = 0,282$



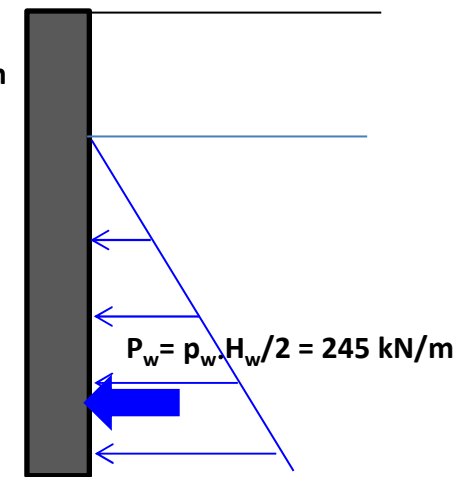
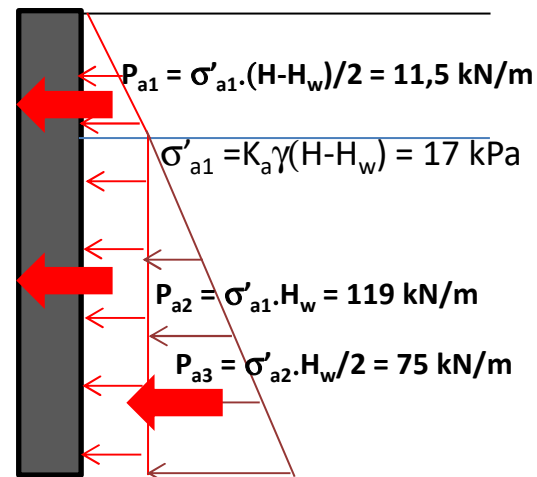
12. Prise en compte de l'eau

La présence d'eau derrière un écran va toujours avoir un rôle moteur
 $P_a(\text{sol saturé}) > P_a(\text{sol non saturé})$

La nappe derrière l'écran peut se situer à une hauteur $H_w < H$

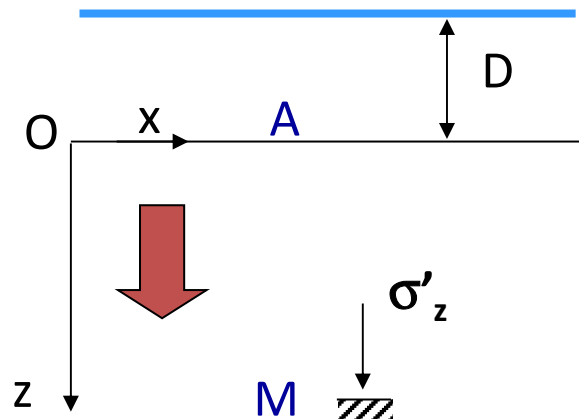


Kacos $\delta_a = 0,282$



12. Prise en compte de l'eau

L'effet « moteur » d'une nappe statique est amplifié lorsqu'il y a un écoulement descendant le long de l'écran.



$$h_A = \frac{u_A}{\gamma_w} - z_A \quad h_M = \frac{u_M}{\gamma_w} - z_M$$

$$\Delta h = h_A - h_M = \frac{u_A - u_M}{\gamma_w} - (z_A - z_M)$$

$$\text{or } i = \frac{\Delta h}{z_M - z_A} = \frac{u_A - u_M}{\gamma_w (z_M - z_A)} + 1 \quad d'o\grave{u} \quad u_A - u_M = \gamma_w (i - 1)(z_M - z_A)$$

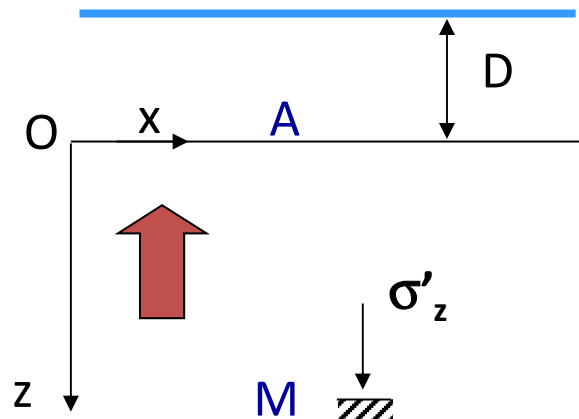
avec $u_A = \gamma_w \cdot D$ et $z_A = 0$, il vient : $u_M = \gamma_w (D + z_M) - i \gamma_w z_M$

$$\sigma_z = \gamma_w \cdot D + \gamma_{\text{sat}} z_M \quad \text{et} \quad \sigma'_z = (\gamma' + i \gamma_w) \cdot z_M$$

L'écoulement descendant transmet au squelette du sol une contrainte dirigée dans le sens de l'écoulement égale à $i \gamma_w z$.

12. Prise en compte de l'eau

L'effet « moteur » d'une nappe statique est diminué lorsqu'il y a un écoulement ascendant le long de l'écran.



$$h_A = \frac{u_A}{\gamma_w} - z_A \quad h_M = \frac{u_M}{\gamma_w} - z_M$$

$$\Delta h = h_M - h_A = \frac{u_M - u_A}{\gamma_w} - (z_M - z_A)$$

$$\text{or } i = \frac{\Delta h}{z_M - z_A} = \frac{u_M - u_A}{\gamma_w (z_M - z_A)} - 1 \quad \text{d'où } u_M - u_A = \gamma_w (i + 1)(z_M - z_A)$$

avec $u_A = \gamma_w \cdot D$ et $z_A = 0$, il vient : $u_M = \gamma_w (D + z_M) + i \gamma_w z_M$

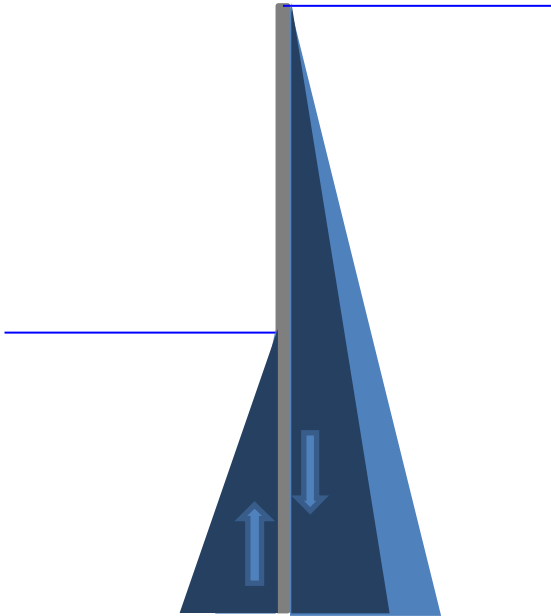
$$\sigma_z = \gamma_w \cdot D + \gamma_{\text{sat}} z \quad \text{et } \sigma'_z = (\gamma' - i \gamma_w) \cdot z$$

L'écoulement ascendant réduit la contrainte effective de $i \gamma_w z$. Si le gradient augmente, σ' peut s'annuler : c'est le phénomène de Boullance qui se produit pour

$$i_c = \gamma' / \gamma_w$$

12. Prise en compte de l'eau

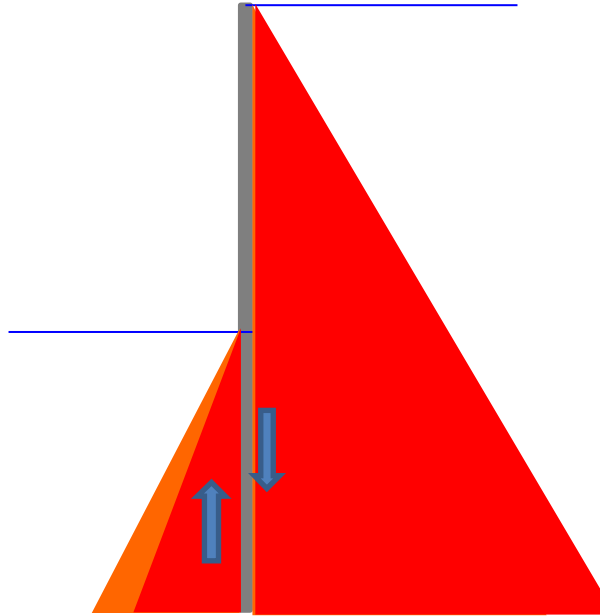
Profil des pressions



$$u_{\text{stat aval}} < u_{\text{stat amont}}$$

$$u_{\text{dyn aval}} = u_{\text{dyn amont}}$$

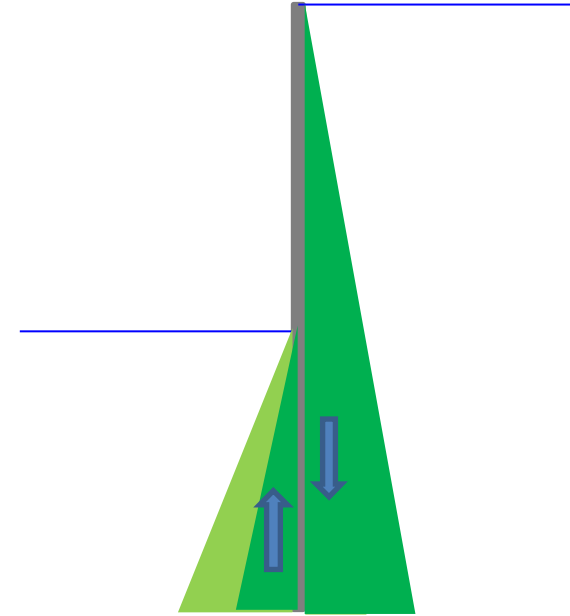
Profil des contraintes effectives



$\sigma'_{v \text{ amont}}$ augmente

$\sigma'_{v \text{ aval}}$ diminue

Profil des poussée-butée



σ'_a augmente

σ'_p diminue